

СТРУКТУРА РЕШЕТЧАТЫХ КОДОВ, СИГНАЛЬНО-КODOVЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
И ОЦЕНКА ИХ ХАРАКТЕРИСТИКTHE STRUCTURE OF LATTICE CODES, SIGNAL-TO-CODES DESIGNS  
AND THEIR CHARACTERISTICS EVALUATION

**Аннотация.** Разработана структура решетчатых кодов и сигнально-кодовых конструкций и дана оценка их характеристик. Введено понятие инвариантности решетчатых сигнально-кодовых конструкций, на базе которого определено минимальное расстояние решетчатых кодов и сигнально-кодовых конструкций.

**Summary.** The structure of lattice codes, signal-to-code designs and their characteristics evaluation is developed. The notions of trellis signal-to-code designs invariance and minimal distance are given lattice codes, signal-to-code designs.

Повышение эффективности систем передачи информации остается одной из основных и современных научно-технических задач. Как известно, корректирующие коды позволяют повысить помехоустойчивость передачи цифровой информации в обмен на введение избыточности в передаваемые последовательности символов (и, соответственно, на адекватное снижение удельной скорости передачи информации). В то же время, переход к многопозиционным сигналам повышает удельную скорость. Сигнально-кодовые конструкции представляют собой реализацию варианта сочетания положительных свойств сигналов и корректирующих кодов с целью повышения удельной скорости передачи при незначительном снижении помехоустойчивости. Термин «сигнально-кодовая конструкция» (СКК) в русскоязычной литературе был введен В.Л. Банкетом в докладе [1] и впоследствии неоднократно использовался в диссертации [2] и последующей литературе [3]. Как отмечено в монографии [4] возникает задача «удачного» сочетания (согласования) сигналов и кодов. Эта задача решалась различными путями. Первая «лобовая» попытка представлена в книге [5], в которой исследованы «многоуровневая фазовая модуляция и кодирование». В качестве внешнего кода использован длинный циклический код, а согласование выхода кодера с модулятором  $M$ -позиционной фазовой модуляции ФМ- $M$  ( $M=8, 16$ ) производилось с применением *модуляционного кода Грея*. Получен незначительный энергетический выигрыш. Автор объяснял этот факт низкой корректирующей способностью циклического кода. Новый этап изучения и применения СКК в реальных телекоммуникационных системах наступил с использованием эффективного алгоритма декодирования сверточных кодов (*алгоритма Витерби*) [6], а также после публикации пионерской работы Н. Imai и С. Haricawa [7], в которой был предложен новый метод согласования кодера и модулятора на основе *разложения* многопозиционного ансамбля на *вложенные подансамбли*. Затем эта идея была использована G. Ungerboeck в статьях [8, 9], которые вызвали поток публикаций на эту тему. Вопросам анализа структуры и оценки характеристик СКК такого типа посвящена обширная литература [3, 4, 10, 11]. Многие из авторов упомянутых монографий следуют идеологии работы G. Ungerboeck [8]. В диссертации [2] введен в теорию и исследован особый подкласс СКК (*Групповые СКК*) и дано понятие *инвариантности* применительно к групповым СКК. Специалистами по теории кодирования [3] СКК трактовались как *обобщенные каскадные коды*. Большое разнообразие подходов к синтезу СКК приводило к различным структурам (и поэтому затрудняло сравнение характеристик СКК), к неточностям в определениях, заблуждениям и даже ошибкам (о которых речь пойдет ниже). Однако, отсутствует единый подход к синтезу СКК (т. н. «решетчатых СКК»), включающий не только все возможные варианты СКК, описанные в цитируемой выше литературе [3, 4, 8-11], но и позволяющий трактовать известные и широко распространенные сверточные коды как частный случай решетчатых СКК. *Цель настоящей статьи* – представить новый подход к синтезу структуры решетчатых СКК, а также дать анализ свойств и характеристик таких СКК.

**1. Структура решетчатой СКК.** Рассмотрим структуру *решетчатой сигнально-кодовой конструкции* (РСКК), показанную на рис. 1, которая содержит *конечный автомат*. В состав автомата входит  $v$  элементов задержки ( $D$  – оператор задержки символов на один такт). На входе автомата действует случайная последовательность информационных символов  $U_i$ , выбираемых из алфавита объема  $M$ . В соответствии с теорией конечных автоматов набор символов на входах элементов задержки  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_v)$  называется *вектором состояний*. При поступлении на  $i$ -м такте на вход автомата символа  $u_i$  (из последовательности  $U_i$ ) автомат из предыдущего состояния

$Q_{i-1} = (q_{i-1,1}; q_{i-1,2}; \dots; q_{i-1,v})$  переходит в следующее состояние  $Q_i = (q_{i,1}; q_{i,2}; \dots; q_{i,v})$ . Если количество элементов задержки автомата равно  $v$  и объем алфавита символов на входе автомата равен  $M$ , то, в соответствии с теорией конечных автоматов, число состояний автомата определяется числом возможных вариантов вектора состояний, т.е.  $Q = M^v$ . Далее символы вектора состояний поступают на *формирователь ветвей* (ФВ), на выходе которого образуются *ветви*  $W_i = f(Q_i)$  как некоторые функции вектора состояний. После чего ветви  $W_i$  подаются на *модулятор*, в котором в соответствии с выбранным методом модуляции производится формирование *сигнала-переносчика*  $S_i(t)$ .

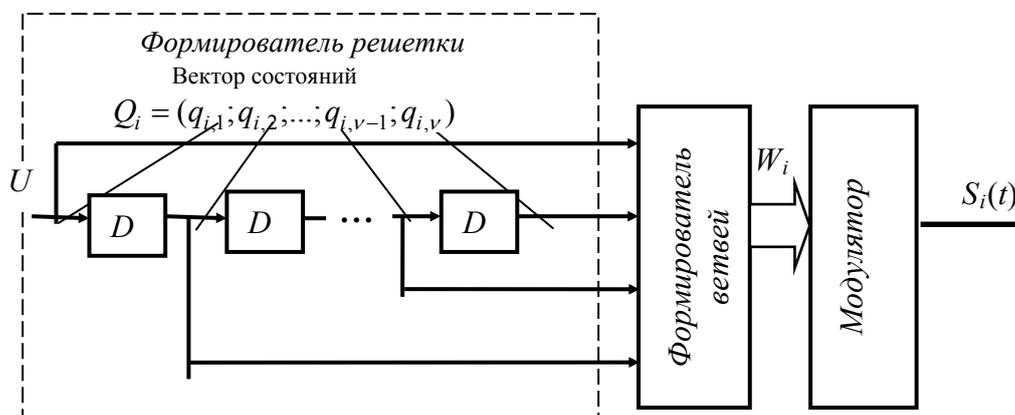


Рисунок 1 – Структура решетчатой сигнально-кодовой конструкции

Поведение такого автомата характеризуется решетчатой диаграммой (*решеткой*) с числом состояний  $Q$ . Решетка есть *направленный граф*, описывающий переходы автомата из предыдущих состояний во все последующие состояния. Ветви, соединяющие предыдущие и последующие состояния решетки, маркируются символами, которые являются функциями предыдущих состояний и определяются алгоритмом работы ФВ. Изложенное выше дает основание называть такой автомат «*формирователем решетки*» (ФР), а рассматриваемые далее СКК именовать «*Решетчатыми сигнально-кодовыми конструкциями*» (РСКК). В общем случае отображение  $Q \rightarrow W$  может быть как линейным, так и нелинейным. Устройство такого отображения может входить в состав модулятора (М), и тогда возникает понятие «*модуляционный код*».

**Определение 1.** Модуляционный код модулятора РСКК есть таблица взаимного соответствия наборов символов ветвей  $W$  и ансамбля сигналов  $S$  на выходе модулятора.

**2. Кодер сверточного кода, как пример РСКК.** Как показывает анализ, хорошо изученные в теории кодирования и широко используемые на практике сверточные коды [10] можно также трактовать как вариант решетчатых сигнально-кодовых конструкций с *линейным* алгоритмом работы формирователя ветвей. Для подтверждения этого тезиса рассмотрим структуру кодера сверточного кода РСКК с порождающими многочленами в восьмеричном представлении  $G = (g_1, g_2) = (5, 1)$  [12], показанную на рис. 2. Работу такого кодера можно описать с помощью решетчатой диаграммы (*решетки*). На рис. 3,а показано один шаг такой решетки. На решетке состояния показаны *узлами*, а переходы (называемые *ветвями*) – соединяющими их линиями. Переходы помечаются символами ветвей. Полная решетчатая диаграмма является повторением одного и того же *шага решетчатой диаграммы* (ШРД), содержащего предыдущие и последующие состояния и символы ветвей, их соединяющих. Отсюда следует, что *структура ШРД представляет алгоритм работы формирователя ветвей ФВ*, преобразующего символы состояний формирователя решетки ФР в символы соединяющих их ветвей. Такое представление работы решетчатой СКК удобно, поскольку символы ветвей на ШРД являются выходами формирователя ветвей (ФВ) и подаются далее на модулятор. При этом необходимо отметить, что *ШРД полностью представляет свойства решетчатой диаграммы в целом*, в силу чего вместо громоздкого изображения полной решетки часто ограничиваются изучением *свойств одного шага*. На рис. 2 показана структура кодера РСКК с символами, выбираемыми из восьмеричного алфавита сигнального созвездия ФМ-8 (рис. 3, б) с операциями сложения и умножения по модулю 8. Один шаг решетчатой диаграммы этого кода представлен на рис. 3,а. Ветви СК формируются с использованием порождающего многочлена

$G = (g_1, g_2) = (5, 1)$ , причеи символи ветвей записаны в строках (рис. 3, а). В состав ФВ включен коммутатор  $K$ , формирующий ветви из пар символов  $(w_{i,1}, w_{i,2})$ .

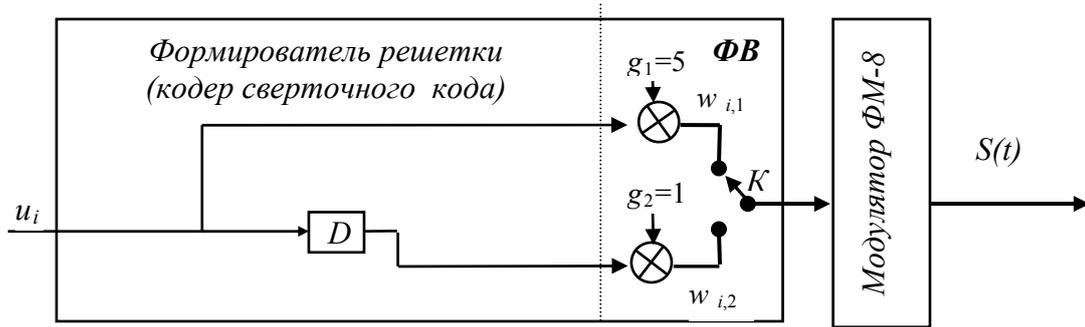


Рисунок 2 – Кодер восьмеричной РСКК



Рисунок 3 – Шаг решетчатой диаграммы (а) и сигнальное созвездие ФМ-8 (б) РСКК

**3. Инвариантность СКК.** Свойство *инвариантности* сигнально-кодовых конструкций было впервые введено в теорию СКК в диссертации [2] и затем неоднократно использовалось для анализа различных СКК. Поясним особенности свойства инвариантности на примере двумерных ансамблей (созвездий) сигналов, представленных точками на плоскости (рис. 4). Ансамбль  $A$  состоит из точек, расположенных в узлах регулярной квадратной сети. При передаче сигналов такого ансамбля по каналу с помехами помехоустойчивость приема сигналов определяется набором взаимных расстояний между сигналами, в котором определяющим является *минимальное расстояние*  $d$  между центральной точкой, соответствующей вектору передаваемого сигнала  $S$  и *ближайшей* точкой ансамбля. В пределах квадратной сети можно осуществить *аффинное преобразование* исходного ансамбля, используя вектор переноса  $S_n$ . Видно, что перенос всех точек с помощью вектора переноса  $S_n$  взаимные расстояния не изменяет (величина минимального расстояния  $d$  в ансамбле  $A_1$  остается без изменений). Произведем подобный перенос ансамбля  $A_1$  в начало координат (используя *вектор переноса*  $S_{n0}$ ) с целью совместить центральную точку ансамбля с началом координат (в ансамбле  $A_0$ ). Теперь дистанционные свойства ансамбля можно изучать, отсчитывая расстояние  $d$  сигнальной точки от начала координат. Этот пример иллюстрирует *свойство инвариантности* исходного ансамбля  $A$  (*устойчивости к аффинным преобразованиям в сигнальном пространстве*).

Понятие инвариантности рассмотрим применительно к анализу характеристик РСКК. Пусть последовательность символов  $U_i$  на входе РСКК (рис. 1) отображается формирователем ветвей в последовательность символов ветвей  $W_i$ , поступающих на вход модулятора, и далее в последовательность сигналов  $S_i(t)$  на выходе структуры РСКК:  $U_i \rightarrow W_i \rightarrow S_i(t)$ . Аналогично, рассмотрим другую цепочку отображений:  $U_j \rightarrow W_j \rightarrow S_j(t)$ .

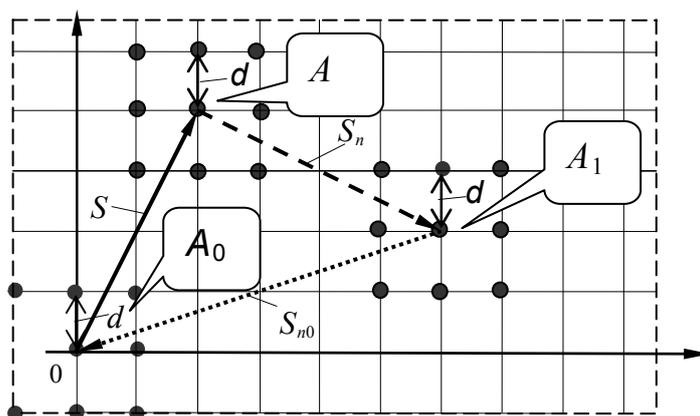


Рисунок 4 – К пояснению свойства инвариантности

Оценим расстояние (в произвольной метрике)  $d(S_i, S_j)$  между последовательностями сигналов:

$$\left. \begin{array}{l} U_i \rightarrow W_i \rightarrow S_i(t) \\ U_j \rightarrow W_j \rightarrow S_j(t) \end{array} \right\} \Rightarrow d(S_i, S_j). \quad (1)$$

Вновь определим цепочку отображений  $U^* \rightarrow W^* \rightarrow S^*(t)$ , где  $U^*$  – произвольная последовательность входных символов, а также рассмотрим отображения:

$$\left. \begin{array}{l} (U_i \oplus U^*) \rightarrow W_i^* \rightarrow S_i^*(t) \\ (U_j \oplus U^*) \rightarrow W_j^* \rightarrow S_j^*(t) \end{array} \right\} \Rightarrow d(S_i^*, S_j^*) \quad (2)$$

с последующим вычислением расстояния  $d(S_i^*, S_j^*)$ .

Здесь знак  $\oplus$  означает сложение в алгебре символов по модулю  $n$  ( $n$ -основание кода) на входе РСКК.

**Определение 2.** Отображение  $U \rightarrow W \rightarrow S(t)$  и соответствующую ему РСКК назовем *инвариантными*, если для любых  $i \neq j$  и произвольной последовательности  $U^*$  в наборах отображений (1) и (2) выполняется равенство расстояний  $d(S_i, S_j) = d(S_i^*, S_j^*)$ .

Свойство инвариантности существенно облегчает поиск РСКК (и сверточных кодов в том числе) с использованием *перебора*, поскольку в этом случае достаточно отыскивать порождающие многочлены СК и РСКК, обеспечивающие максимум свободного расстояния только относительно «нулевой» последовательности, избегая необходимости *полного перебора* расстояний для всех пар  $U_i \rightarrow W_i \rightarrow S_i(t)$  и  $U_j \rightarrow W_j \rightarrow S_j(t)$  при  $(i \neq j)$ .

**4. Инвариантность линейных кодов.** Свойство инвариантности существенно используется в теории блоковых, и также сверточных линейных кодов.

**Утверждение 1.** Все линейные двоичные коды инвариантны исходя из Определения 1.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный двоичный код над групповым алфавитом  $\{0, 1\}$ . Символы этого алфавита образуют алгебраическое поле Галуа [13, 14] с операциями сложения  $\oplus$  и умножения  $\otimes$ , причем каждому символу поля  $u_k$  соответствует обратный по сложению элемент  $(-u_k)$  такой, что  $u_k \oplus (-u_k) = 0$ .

Кодирование производится по правилу  $W_j = G \cdot U_j$ , где  $G$  – порождающая матрица блокового (либо сверточного) кода. Для доказательства утверждения в соответствии с (1) и (2) запишем цепочки отображений (кодирования):

$$\begin{aligned} W_i &= G \cdot U_i, \\ W_j &= G \cdot U_j. \end{aligned}$$

Определим также расстояние по Хэммингу между последовательностями символов  $W_i$  и  $W_j$  на выходе кодера  $D_H = [G \cdot U_i \oplus G \cdot U_j] = [G(U_i \oplus U_j)]$ . Выберем произвольную цепочку

$W^* = G \cdot U^*$  и, в соответствии с (2), произведем операцию «переноса» с последующим вычислением расстояния по Хэммингу:

$$W_i^* = G \cdot (U_i \oplus U^*),$$

$$W_j^* = G \cdot (U_j \oplus U^*),$$

$$D_H^* = [G \cdot U_i \oplus G \cdot U_j] = [G \cdot (U_i \oplus U^* \oplus U^* \oplus U_j)] = [G \cdot (U_i \oplus U_j)] = D_H.$$

Поскольку для линейных двоичных кодов всегда выполняется равенство  $(U^* \oplus U^*) = 0$ . Подобное утверждение можно доказать и для групповых кодов с произвольным основанием.

**5. Модуляционные коды РСКК с сигналами многопозиционной ФМ-8.** Сигналы многопозиционной фазовой модуляции ФМ-8 с объемом ансамбля  $M = 8$  широко используются на практике, поскольку они позволяют существенно повысить скорость передачи цифровой информации при незначительном усложнении оборудования модема. Известны следующие варианты модуляционных кодов для согласования ансамбля ФМ-8 с двоичными кодами (табл. 1) [3, 4, 8, 9]:

Таблица 1 – Модуляционные коды для сигналов ФМ-8

Номер сигнала	0	1	2	3	4	5	6	7	Инвариантность
Арифм. код	000	001	010	011	100	101	110	111	<b>неинвариантен</b>
Код Gray	000	001	011	010	110	111	101	100	<i>инвариантен</i>
Код Ungerboeck	000	100	010	110	001	101	011	111	<b>неинвариантен</b>
M-ичный код	0	1	2	3	4	5	6	7	<i>инвариантен</i>

1. *Арифметический код* представлен набором комбинаций двоичных символов (записью номера сигнала ФМ-8 простым двоичным кодом).

2. *Модуляционный код Грея (Gray)* обеспечивает изменение одного из символов двоичной комбинации при переходе любого сигнала ФМ-8 в соседний (по номеру) сигнал. В работе [7] использован для согласования кодеров двоичных СК с модулятором сигналов ФМ-8.

3. *Модуляционный код Ангербоэка (Ungerboeck)*, предложенный этим автором в работе [8] для синтеза сигнально-кодовых конструкций на основе разложения ансамбля ФМ-8 на наборы «вложенных» подансамблей. Такой модуляционный код неоднократно используют для СКК [3, 4, 10, 11].

4. *Недвоичный код* над кольцом целых чисел с операциями сложения и умножения по модулю  $M$ . Пример такого модуляционного кода показан в табл. 1.

**6. Инвариантность модуляционных кодов для ФМ-M.** Поскольку формирователь ветвей ФВ входит в состав РСКК, полезно рассмотреть свойства инвариантности этого блока. Рассмотрим алгебраическое описание сигнала ФМ-M [13]. Рассмотрим мультипликативную циклическую группу с образующим элементом в виде унитарной матрицы:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/M) & \sin(2\pi/M) \\ -\sin(2\pi/M) & \cos(2\pi/M) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $M$  – целое.

Мультипликативная Абелева циклическая группа порядка  $M$  содержит элементы:

$$G_S(M) = \{\Theta^0, \Theta^1, \Theta^2, \dots, \Theta^{M-1}\} \quad (4)$$

с операцией умножения матриц.

При этом результат возведения матрицы (3) в целую степень  $k$  будет:

$$\Theta^k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/M) & \sin(2\pi k/M) \\ -\sin(2\pi k/M) & \cos(2\pi k/M) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Если  $S_0 = (s_0, 0)$  – вектор сигнала в двумерном пространстве, то умножение этого вектора на унитарную матрицу (3) дает результат  $S_0 \cdot \Theta = (s_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi / M), 0)$ , т.е. модуль вектора  $S_0$  остается неизменным, а угол, по отношению к горизонтальной оси, изменяется на величину  $(2 \cdot \pi / M)$ . Можно сказать, что умножение исходного вектора на унитарную матрицу  $\Theta$  приводит к пространственному повороту на угол  $(2 \cdot \pi / M)$ . Циклическую группу матриц поворота (4) в теории связи часто используют для описания набора сигналов фазовой модуляции, отличающихся различными пространственными углами, кратными величине  $(2 \cdot \pi / M)$ , где  $M$  – число позиций фаз сигналов.

Пусть множество символов ветвей образует аддитивную циклическую группу с операцией сложения:

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_{M-1}\}. \quad (6)$$

Известно, что все циклические группы одного порядка изоморфны [14]. На этом основании сформулируем утверждение 2.

**Утверждение 2.** Если множество кодовых комбинаций модуляционного кода сигналов ФМ-М образует циклическую группу порядка  $M$ , то такой модуляционный код обладает свойством инвариантности.

Для доказательства рассмотрим цепочки отображений:

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow w_i \rightarrow S_i, \\ u_j &\rightarrow w_j \rightarrow S_j \end{aligned} \quad (7)$$

и выберем для реализации «поворота» векторов сигналов на плоскости цепочку отображений:

$$u_k \rightarrow w_k \rightarrow S_k, \quad (k \neq i, k \neq j). \quad (8)$$

Для заданных векторов сигналов ансамбля ФМ-М  $S_i$  и  $S_j$ , расстояние по Евклиду определится следующим образом:

$$d_E(i, j) = 2|s_0 \cdot \sin[\pi(i - j)/M]|, \quad (9)$$

где  $|\cdot|$  – знак модуля.

Применяя к паре (7) отображение «поворота» (8) получаем:

$$\begin{aligned} u_{i+k} &\rightarrow w_{i+k} \rightarrow S_{i+k}, \\ u_{j+k} &\rightarrow w_{j+k} \rightarrow S_{j+k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что векторы сигналов оказываются повернутыми на плоскости на одинаковый угол  $(k2\pi/M)$ , что не может изменить расстояние между ними  $d_E(i+k, j+k) = 2|s_0 \cdot \sin[\pi(i+k - j+k)/M]| = d_E(i, j)$ , что и доказывает инвариантность. На основе этого утверждения можно сформулировать **признак неинвариантности модуляционного кода сигналов ФМ-М**.

*Кодовые комбинации модуляционного кода сигналов ФМ-М должны удовлетворять условию замкнутости аддитивной алгебраической группы.*

Доказательство *от противного*:

предположим, что условие замкнутости не выполняется. Тогда множество кодовых комбинаций не может составить аддитивную циклическую группу и по *Утверждению 2 модуляционный код неинвариантен*.

Этот признак позволяет проверить известные модуляционные коды из табл. 1 на инвариантность: достаточно, перебирая пары кодовых комбинаций найти хотя бы одну сумму их, которая не совпадает ни с одной комбинацией модуляционного кода. Свойства инвариантности перечисленных модуляционных кодов, проверенных по этому признаку отмечены в табл. 1. Отсюда следует вывод, что данные свободных расстояний РСКК в основополагающих пионерских работах *Ungerboeck* по сигнально-кодовым конструкциям [8, 9] *следует считать ошибочными*, равно как и подобные данные во всех публикациях авторов-последователей [3, 10, 11]. Таким образом, если модуляционный код не инвариантен, то все РСКК с таким кодом неинвариантны и, в соответствии с этим, понятие свободного расстояния и оценки асимптотического энергетического выигрыша от кодирования (АЭВК) на этой основе являются не вполне корректными.

**7. Примеры неинвариантных РСКК.** Как отмечалось выше, неинвариантность модуляционного кода приводит к неинвариантности всей РСКК. Вместе с тем, различные варианты неинвариантных РСКК изучаются многими авторами и даже широко используются на практике. Можно сказать, что эта «пресловутая» неинвариантность не является недостатком РСКК, а является «камнем преткновения» для неискушенного исследователя. Кроме неинвариантных модуляционных кодов из табл. 1 приведем наиболее показательные примеры:

1. *Неинвариантная РСКК*, реализованная в виде сочетания кодера сверточного кода и модулятора многопозиционных сигналов КАМ-256 [15] («гибрид» линейного СК и нелинейного модуляционного кода). Такая РСКК положена в основу популярной Рекомендации МСЭ V.34 при построении модемов для передачи данных по телефонным коммутируемым линиям со скоростью 33,6 кбит/с. Отдельно необходимо отметить, что в тексте Рекомендации *о свободном расстоянии* такой РСКК *никаких упоминаний нет*.

2. Особое место занимают работы [16-18], посвященные оптимизации параметров РСКК с линейными сверточными кодами на внешней ступени и сигналами *модуляции парциального отклика*

на внутрешней ступени. Авторы [16, 18] «послушно» следуют за «авторитетом» *Ungerboeck* [17], повторяя его ошибки и даже находя в результате своих поисков РСКК с «лучшим свободным расстоянием», чем в работе [17].

### 8. Свободное расстояние инвариантных РСКК.

**Утверждение 3.** Решетчатая сигнально-кодовая конструкция со структурой в виде последовательного соединения линейного формирователя решетки, произвольного формирователя ветвей (см. рис. 1) инвариантна в смысле определения 1, если выполняются условия инвариантности для последовательного соединения формирователя ветвей и модулятора.

Доказательство базируется на инвариантности линейного формирователя решетки.

Как видно некоторые из распространенных РСКК неинвариантны и возникает вопрос об оценке характеристик их помехоустойчивости. Общая теория помехоустойчивости многопозиционных сигналов при действии аддитивных помех [4] дает ответ на этот вопрос: теоретически вероятность ошибки оптимального приема многопозиционных сигналов может быть оценена с использованием *аддитивной верхней границы* вероятности ошибки, величина главного члена которой определяется *минимальным расстоянием* СКК. Конечно, как отмечалось выше, свойства помехоустойчивости неинвариантных РСКК возможно определять на основе прямого имитационного моделирования. Однако анализ показывает, что наиболее важный параметр РСКК – минимальное расстояние – может быть определен с применением процедуры *полного перебора*.

Таким образом, авторами разработан алгоритм полного перебора решетчатых кодов и сигнально-кодовых конструкций. Проведено исследование на примерах ряда неинвариантных РСКК. Ограниченный объем статьи не позволяет изложить подробности этого метода. Авторы намерены опубликовать результаты этих исследований в следующей статье.

### Литература

1. *Банкет В.Л.* Групповые сигнально-кодовые конструкции // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. – Ч. 3. – Одесса, 1988 – С. 59-60.
2. *Банкет В.Л.* Теория групповых сигнально-кодовых конструкций и ее применение в системах передачи информации: Дисс. ...док. техн. наук: 05.12.02. – М.: МЭИС, 1989. – 420 с.
3. *Зяблов В.В., Коробков Д.Л., Портной С.Л.* Высокоскоростная передача сообщений в реальных каналах. – М.: Радио и связь, 1991. – 228 с.
4. *Помехоустойчивость и эффективность передачи информации / А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П. Панфилов, В.Л. Банкет, П. В. Иващенко; Под ред. А.Г. Зюко.* – М.: Радио и связь, 1985.– 272 с.
5. *Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Инагаки Я.* Теория кодирования; Под ред. Р.Л. Добрушина, С.И. Самойленко. М.: Мир, 1978.– 576 с.
6. *Viterbi A.J.* Convolutional Codes and their Performance in Communication Systems // IEEE Transactions on Communication. –1971. –Vol. COM-19. – No. 5. – P.751-772.
7. *Imai H. Harikawa S.* New Multilevel Coding Method Using Error Correcting Codes // IEEE Transactions on Information Theory. –1977. – Vol. IT-23. – No. 5. – P. 371-377.
8. *Ungerboeck G.* Channel coding with multi level/phase signal // IEEE Trans. On Inform. Theory. – 1977. – Vol. IT-28. – No.1. – P. 55-67.
9. *Ungerboeck G.* Trellis Coded Modulation with Redundant Signal Sets. Part I: Introduction// IEEE Communications Magazine. – Febr. 1987. –Vol. 25. – No. 2. – P. 5-22.
10. *Кларк Дж., Кейн Дж.* Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи; Под ред. К.Ш. Зигангирова. – М.: Радио и связь, 1987.–392 с.
11. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, корректирующих ошибки; Под ред. Б.С. Цыбанова. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
12. *Banket V., Janoudi B., Michailov N., Al-Dakdouki A.* On the Signal-to-Code Construction of Space-Time Codes // Proceedings of 6-th International Conference «Modern Telecommunication Problems». Одесса, август 2003. – Т. 1. – P. 154-158.
13. *Банкет В.Л.* Использование положений дискретной математики в теории электрической связи: Учебн. пособие. – Одесса: ОНАС, 2005. – 36 с.
14. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.
15. *A modem operating at data signalling rates of up to 28.800 bit/s for use on the general switched telephone network and on leased point-to-point 2-wire telephone-type circuits. ITU-T Recommendation V.34.*
16. *Bartolomeu F., Filho U., Herro M. A., Costello D.J.* Multilevel Approach to Constructing Trellis - Matched Codes for Binary-Input Partial- Response Channels // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1999. – Vol. IT-45. – No.7. – P. 2582-2591.
17. *Wolf J.K., Ungerboeck G.* Trellis Coding for Partial Response Channels // IEEE Transactions on Communications. – 1986. – Vol. COM-34. – No.8. – P. 765-771.
18. *Haucheol P., Barry J.R.* Trellis Coded Multiple-Pulse-Position Modulation for Wireless Infrared Communications // IEEE Transaction on Communications. –2004. –Vol. COM-52. – No. 4. – P. 643-651.