

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ
С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ И СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

Восстановление непрерывных сигналов по их отсчетам – задача, которая решается практически в любой аппаратуре связи. Обычно такое восстановление осуществляется с использованием ряда Котельникова. Однако это не единственный возможный способ восстановления непрерывных сигналов.

В настоящей работе проведено сравнение двух способов восстановления непрерывных сигналов по их отсчетам – с помощью ряда Котельникова и сплайн-интерполяции.

Теорема В.А. Котельникова (или теорема отсчетов) позволяет по отсчетам значений аналогового сигнала в дискретные моменты времени с частотой дискретизации, равной удвоенной наивысшей частоте в спектре сигнала, точно восстановить значение сигнала в любой момент времени [1], т.е.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \frac{\sin \omega_m(t - k\tau)}{\omega_m(t - k\tau)}, \tag{1}$$

где F_m – граничная частота спектра сигнала, $\tau = \frac{1}{2F_m}$ – шаг дискретизации, $\omega_m = 2\pi F_m$.

Формула (1) представляет собой разложение аналогового сигнала с финитным спектром в ортогональном базисе на интервале $(-\infty; \infty)$.

Нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m(t - k\tau)}{\omega_m(t - k\tau)} \cdot \frac{\sin \omega_m(t - m\tau)}{\omega_m(t - m\tau)} dt = \tau \delta_{km}; \tag{2}$$

$$f(k\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_m(t - k\tau)}{\omega_m(t - k\tau)} f(t) dt. \tag{3}$$

Из (3) следует, что функция $\frac{\sin u}{u}$, как и дельта-функция δ_{km} , обладает фильтрующим свойством, т.е. интегральная свертка этой функции с произвольным сигналом $f(t)$ выделяет значение сигнала при том значении аргумента, при котором аргумент дельта-функции обращается в нуль.

Рассмотренные соотношения справедливы для случая ограниченного низкочастотного спектра сигнала. Заметим, что не существуют аналоговые сигналы, ограниченные и по длительности, и по спектру. Поэтому при замене бесконечной суммы в формуле (1) конечной суммой

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n f(k\tau) \frac{\sin \omega_m(t - k\tau)}{\omega_m(t - k\tau)}, \tag{4}$$

точное равенство должно быть заменено приближенным. При этом целесообразно знать энергию ошибки аппроксимации.

Оценим среднеквадратичную ошибку

$$\varepsilon_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_n(t)|^2 dt. \tag{5}$$

Учитывая, что функции $\frac{\sin \omega_m(t - k\tau)}{\omega_m(t - k\tau)}$ образуют ортогональную на всей оси систему, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k\tau)|^2. \tag{6}$$

Тогда, с учетом (6), имеем

$$\varepsilon_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_n(t)|^2 dt =$$

$$= \tau \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} |f(k\tau)|^2 + \tau \sum_{k=n+1}^{\infty} |f(k\tau)|^2. \quad (7)$$

Рассмотрим, например, класс аналоговых сигналов $f(t)$, удовлетворяющих неравенству $|f(t)| < \frac{A}{|t|^2}$. Тогда среднеквадратическая ошибка

$$\varepsilon_n^2 \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^2}{(k\tau)^4} \leq 2A^2 \int_{n\tau}^{\infty} \frac{dt}{t^4} = \frac{2A^2}{3(n\tau)^3} = \frac{2A^2 \cdot (2F_m)^3}{3n^3} = \frac{16F_m^3 A^2}{3n^3}. \quad (8)$$

Для восстановления сигналов также используют сплайн-интерполяцию. Пусть на отрезке $[0; T]$ вещественной оси задана сетка: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, где $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1} = h$, $C^r[0; T]$ – множество функций, имеющих на $[0; T]$ непрерывные производные до r -го порядка включительно ($r \geq 0$).

Рассмотрим интерполяционный кубический сплайн $S_3(t)$, для которого выполнены следующие условия:

- 1) на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$ он является многочленом третьей степени;
- 2) на всем отрезке $[0; T]$ обладает непрерывностью производных;
- 3) $S_3'(0+0) = f'(0)$, $S_3'(T-0) = f'(T)$.

Тогда, следуя [2], верна следующая оценка: если $f(t) \in C^{(4)}[0; T]$, причем $|f^{(4)}(t)| \leq B$, то справедлива оценка погрешности

$$|f^{(l)}(t) - S_3^{(l)}(t)| \leq C_l B h^{4-l}, \quad l = 0, 1, 2, 3. \quad (9)$$

Для $l = 0$

$$|f(t) - S_3(t)| \leq C_l B h^4, \quad (10)$$

где h – шаг дискретизации.

Учитывая неравенства (8) и (10), можем утверждать, что при некоторых условиях сплайн-аппроксимация лучше, чем аппроксимация рядом Котельникова.

Проиллюстрируем сказанное выше следующим примером. Пусть сигнал задан в любой момент времени на отрезке $[0; T]$ (промежуток наблюдения сигнала). Возьмем отсчеты с шагом T_δ (частота дискретизации $f_\delta = \frac{1}{T_\delta}$) и восстановим по ним исходный сигнал двумя способами: с помощью ряда Котельникова и сплайн-интерполяции.

Для численного моделирования выберем сигнал линейной частотной модуляции (ЛЧМ), т.е. синусоидальный сигнал с линейно нарастающей частотой от 0 до F_m . Этот сигнал позволит нам проследить поведение аппроксимирующих функций для различной частоты исходного сигнала. Результаты расчета в среде *Matlab* 6.5 представлены на рис. 1.

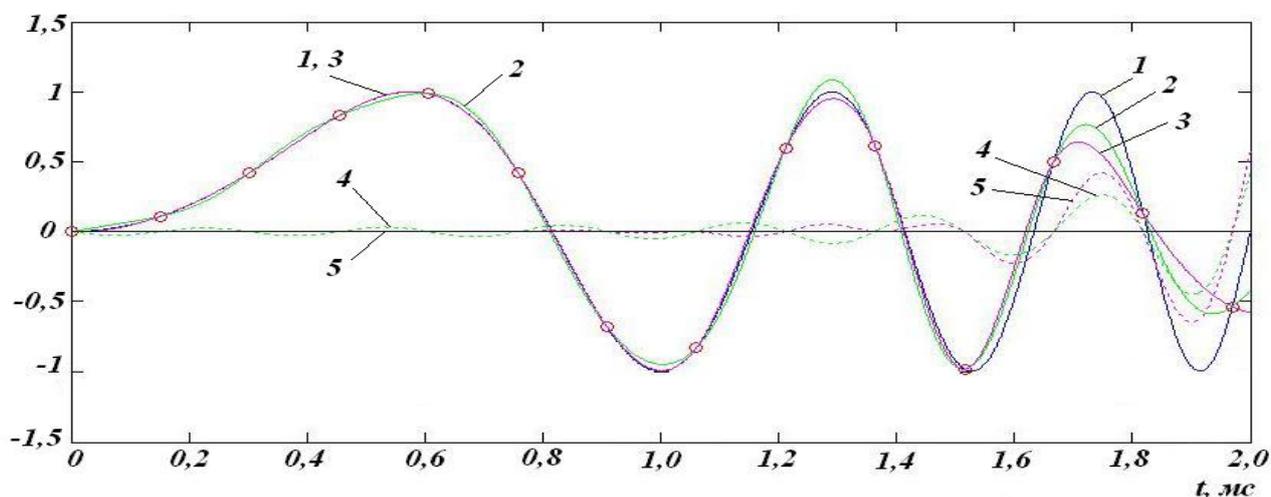
На рис. 1 приняты следующие обозначения:

- 1 – исходный ЛЧМ сигнал;
- 2 – аппроксимация рядом Котельникова;
- 3 – аппроксимация кубическим сплайном;
- 4 – ошибка аппроксимации рядом Котельникова;
- 5 – ошибка аппроксимации кубическим сплайном.

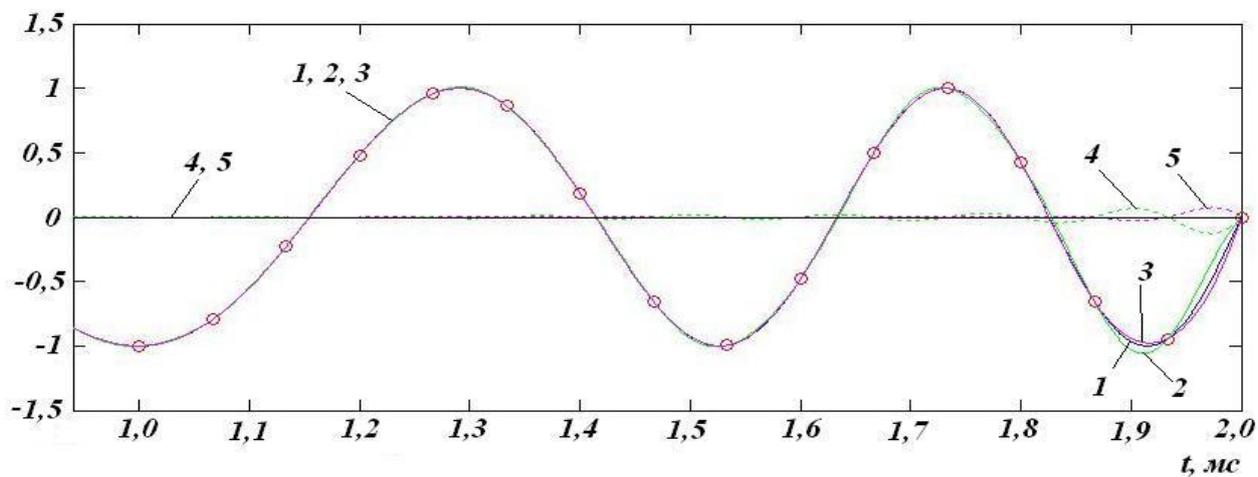
Кружками обозначены отсчеты сигнала, выступающие в качестве узлов интерполяции.

Из рис. 1 видно, что при $f_\delta \approx 2F_m$ ошибка обеих способов аппроксимации может быть достаточно большой за счет того, что отсчетные точки при равномерной дискретизации могут не попадать в максимумы и минимумы исходного сигнала, что делает невозможным точное восстановление быстрых осцилляций. Однако при достаточно большом значении f_δ аппроксимация сплайнами дает лучшие результаты, чем ряд Котельникова (см. рис. 1,б).

Для количественной оценки качества аппроксимации использовалось среднеквадратичное отклонение ошибки аппроксимации во всех точках интервала наблюдения сигнала (практически число этих точек было в 100 раз больше числа отсчетов). На рис. 2 приведены зависимости среднеквадратичного отклонения ошибки аппроксимации от частоты дискретизации для случая аппроксимации рядом Котельникова (кривая 1) и кубическим сплайном (кривая 2).



а)



б)

Рисунок 1 – Сигнал ЛЧМ и его аппроксимация различными способами:

а) $F_m = 3$ кГц, $f_\partial = 2,2 F_m$

б) $F_m = 3$ кГц, $f_\partial = 5 F_m$

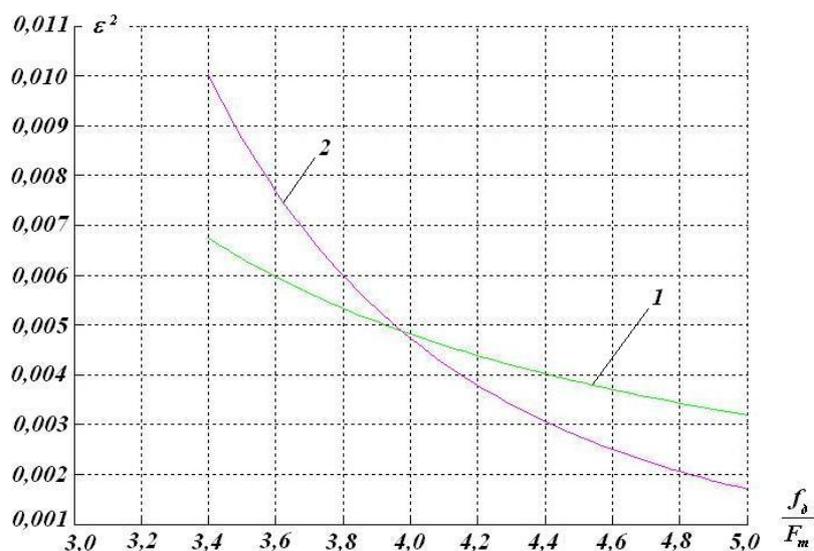


Рисунок 2 – Зависимость среднеквадратичного отклонения ошибки аппроксимации от частоты дискретизации ЛЧМ сигнала. Время наблюдения 20 мс, $F_m = 5$ кГц

Рис. 2 показывает, что аппроксимация ЛЧМ-сигнала рядом Котельникова дает лучшие результаты только при сравнительно низкой частоте дискретизации. При увеличении частоты дискретизации свыше $4F_m$ сплайн-аппроксимация лучше восстанавливает форму сигнала. Кроме того, при сплайн-аппроксимации практически отсутствует эффект Гиббса.

Литература

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.