Панфилов И.П., Морозов А.И.
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

Вопросы дискретизации достаточно широко освещены в отечественной [1] и зарубежной литературе[2], однако применение базисных функций, отличных от функции вида $\sin(x)/x$ (базис Котельникова), в частности базисных сплайн-функций различных степеней, стало рассматриваться только в начале 90-х годов двадцатого века.

Целью данной статьи является определение частотных характеристик предварительных фильтров, реализующих оптимальное? в смысле наименьших квадратов? восстановление входных сигналов в пространстве сплайн-функций заданного порядка.

Рассмотрим классическую структурную схему процесса дискретизации сигнала (рис. 1), который описывается некоторой функцией $f(x) \in L_2$. Для простоты дальнейшего изложения выберем интервал дискретизации $T = 1$.

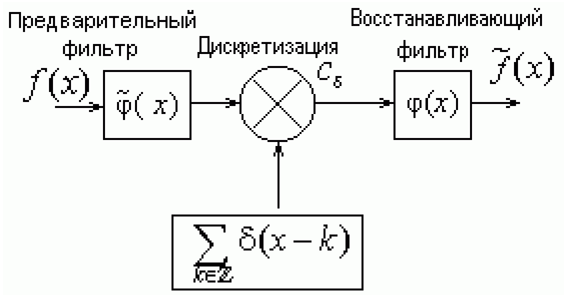

Рисунок 1 – Схема стандартного процесса дискретизации непрерывного сигнала.

Здесь $f(x)$ – функция, описывающая входной сигнал,

$\tilde{\varphi}(x)$ – импульсный отклик предварительного фильтра,

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака,

$c(k)$ – отсчеты отфильтрованной версии $f(x)$,

$\varphi(k)$ – импульсный отклик восстанавливающего фильтра,

$\tilde{f}(x)$ – восстановленный сигнал.

В классической теории дискретизации Котельникова $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x) = \dfrac{\sin x}{x} = \varphi(x)$, а $\tilde{f}(x)$ является аппроксимацией $f(x)$ с минимальной ошибкой.

Рассматривая дискретизацию в *SI*-пространствах (от англ. *Shift-Invariant* – инвариантный к сдвигу) базисных сплайн-функций $V(\varphi) \subset L_2$, возникает вопрос: как получить коэффициенты $c(k)$ такими, чтобы аппроксимация $f(x) \in L_2$ в $V(\varphi)$ была наилучшей?

Решение поставленной задачи в смысле наименьших квадратов дает ортогональное проецирование $f(x) \to V(\varphi)$ [3]:

$$f = P_{V(\varphi)} f = \sum_{k\in Z} \left\langle f, \overset{o}{\varphi}_k \right\rangle \cdot \varphi_k\,, \tag{1}$$

где $P_{V(\varphi)}$ – ортогональный проектор $P_{V(\varphi)} : L_2 \to V(\varphi)$,

$f = f(x)$ – функция, описывающая входной сигнал, $f \in L_2$,

$\varphi_k = \varphi(x-k)$ – импульсный отклик восстанавливающего фильтра, причем $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в $V(\varphi)$.

$\overset{o}{\varphi}_k = \overset{o}{\varphi}(x-k)$ – импульсный отклик предварительного фильтра,

$\langle f, g \rangle$ – операция скалярного L_2-произведения функций f и g.

Функции $\overset{o}{\varphi}_k$ в пространстве $V(\varphi)$ образуют базис, дуальный $\{\varphi_k\}_{k\in Z}$. Базис $\left\{\overset{o}{\varphi}_k\right\}_{k\in Z}$ является уникальным для заданной функции $\varphi(x)$ и определяется из условия биортогональности:

$$\left\langle \overset{o}{\varphi}_k, \varphi_l \right\rangle = \delta(k-l),\ k,l \in Z. \tag{2}$$

Функции $\overset{o}{\varphi}_k$, так же как и φ_k, обладают свойством инвариантности к сдвигу: $\overset{o}{\varphi}_k = \overset{o}{\varphi}(x-k)$. Так как $\overset{o}{\varphi}(x) \in V(\varphi)$, то $\overset{o}{\varphi}(x)$ можно представить в виде линейной комбинации функций $\varphi(x)$:

$$\overset{o}{\varphi}(x) = \sum_{k\in Z} p(k)\varphi(x-k), \tag{3}$$

либо в частотной области:

$$\hat{\overset{o}{\varphi}}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)\cdot P(e^{j\omega}), \tag{4}$$

где $\hat{\varphi}(\omega)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(x)$,

$p(k)$ – некоторая последовательность коэффициентов,

$P(e^{j\omega})$ – преобразование Фурье последовательности $p(k)$.

Вычислим скалярное произведение функций $\varphi(x)$ и $\overset{o}{\varphi}(x)$:

$$\left\langle \overset{o}{\varphi}(x), \varphi(x) \right\rangle = \sum_{l\in Z} p(l)\varphi\langle (x-l), \varphi(x-k)\rangle = p * a_\varphi(k),\ k\in Z, \tag{5}$$

здесь $a_\varphi(k)$ – дискретная автокорреляционная последовательность функции $\varphi(x)$.

Так как $\overset{o}{\varphi}(x)$ и $\varphi(x)$ – биортогональные функции, то:

$$p * a_\varphi(k) = \delta_k, \tag{6}$$

где * – операция свертки.

Решая (6) в частотной области

$$P(e^{j\omega})\cdot A_\varphi(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow P(e^{j\omega}) = \frac{1}{A_\varphi(e^{j\omega})}, \tag{7}$$

найдем, что

$$\hat{\overset{o}{\varphi}}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)\cdot P(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{A_\varphi(e^{j\omega})} = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\sum_{k\in Z}\left|\hat{\varphi}(\omega+2\pi k)\right|^2}. \tag{8}$$

Функции φ_k образуют базис Рисса в пространстве $V(\varphi)$, поэтому решение (8) всегда существует. Итак, оптимальная дискретизация, которую мы рассмотрели, аналогична классической дискретизации по Котельникову, с тем лишь отличием, что импульсные отклики предварительного и восстанавливающего фильтров не идентичны. Характеристики оптимального предварительного фильтра полностью определяются выбором базисной функции $\varphi(x)$. В общем случае для заданной $\varphi(x) \xrightarrow{Fourier} \hat{\varphi}(\omega)$ частотный отклик $\hat{\overset{o}{\varphi}}(\omega)$ дан в (8).

Если $\{\varphi_k\}_{k\in Z}$ образуют ортонормированный базис, тогда импульсный отклик предварительного фильтра является перевернутой во времени версией $\varphi(x)$.

Например, оптимальным предварительным фильтром для кусочно-постоянной аппроксимации сигнала является фильтр с $\varphi(x) = \mathrm{rect}(x)$ (прямоугольный импульс).

Графики модуля частотного отклика оптимального фильтра порядка $n = 1, 2, 3$ приведены на рис. 2.

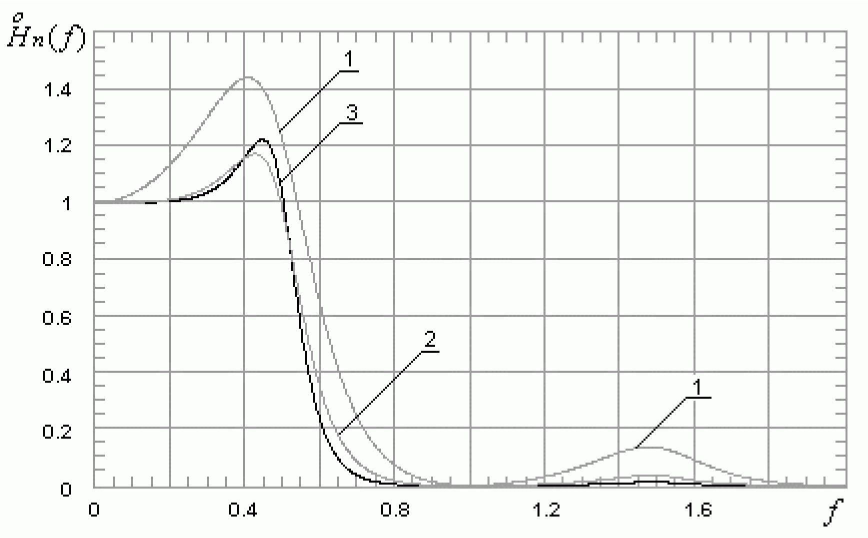

Рисунок 2 – Частотный отклик оптимального предварительного сплайн-фильтра порядка *n* (цифрами обозначен порядок фильтра)

Следует отметить, что с увеличением степени n оптимального сплайн-фильтра его частотный отклик $\overset{o}{H}_n(\omega) = \hat{\overset{o}{\varphi}}(\omega)$ приближается к прямоугольному (идеального ФНЧ [4]).

Литература

1. *Панфілов І.П., Дирда В.Ю., Капапацін А.В.* Теорія електричного зв'язку. – К.Техніка, 1998. – 328 с.
2. *Jerri A.J.* The Shannon sampling theorem –its various extensions and application: A tutorial review // Proceeding of the IEEE. – 1977. – Vol.65. – April. – P. 1565-1596.
3. *Unser M.* 50 Years After Shannon //Proceeding of the IEEE. – 2000. – Vol.88. – No.4. – April. – P. 569 - 585.
4. *Unser M.* Splines: A perfect fit for signal and image proccesing // IEEE Signal Processing Mag. – 1999. – Vol.16. – No.6. – P. 22-38.