МАТЕРІАЛИ 61-ї НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ПРОФЕСОРСЬКО-ВИКЛАДАЦЬКОГО СКЛАДУ, НАУКОВЦІВ І МОЛОДИХ ВЧЕНИХ “ОСВІТА І НАУКА”

РАДІОЗВ’ЯЗОК І ТЕЛЕБАЧЕННЯ

Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю., Рожновский М.В.
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В классической электродинамике всегда существовала проблема определения минимального числа постулатов. Еще в 1890 г. в своей работе «Об основных уравнениях электродинамики покоящихся сред» Р.Г. Герц показал [1], что в покоящихся средах первые два векторных уравнения Максвелла являются основными постулатами. С учетом трех материальных уравнений они представляют собой совместную систему шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1]. Неизвестные в этой системе – скалярные функции над пространством R^4 [2], – координаты векторов напряженности электрического и магнитного полей.

К настоящему моменту вышеуказанная проблема, а также вопрос разрешимости соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных не потеряли своей актуальности для электродинамики сред различной характеристики, что и является основной изучаемой здесь задачей.

Так, в работе [3] исследовался вопрос зависимости третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений. Этот результат позволил утверждать, что при аксиоматическом построении классической электродинамики линейных однородных изотропных покоящихся сред при наличии сторонних токов достаточно в качестве двух основных постулатов принять первые два векторных уравнения. Приведенное в [3] доказательство было получено благодаря обоснованному свойству консервативности многомерных экспофункций [4], [5].

На современном этапе изучения поставленной выше задачи стал почти классическим результат В.С. Владимирова [6] о существовании решения уравнений Максвелла в частном случае – для пассивных систем.

Кроме того, в известной работе А.М. Иваницкого [7] была доказана разрешимость классической максвелловской системы в дифференциальной форме при наличии схемы замещения цепи. При этом была задействована теория многомерных цепей без применения аналитических методов.

Подобная задача в классической электродинамике решена для случая установившихся электромагнитных процессов [8], применяя тождество векторного анализа [2].

Однако, насколько известно, математическое обоснование конструктивного решения классической системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для произвольных электромагнитных процессов пока не приведено. В связи с этим целью данной работы является чисто аналитическое доказательство существования вышеуказанного решения, и именно для такой системы, но без потери исходной физической постановки задачи.

Рассматриваемая в данном докладе задача решается с помощью последовательного применения соответствующих дифференциальных операторов к шести основным дифференциальным уравнениям в частных производных относительно компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве R^4 [2]. После применения дифференциальных операторов соответствующие уравнения почленно складываем и в результате получаем систему уравнений, которая содержит на одно уравнение меньше, а следовательно и меньше на одну неизвестную. Исходная система дифференциальных уравнений Максвелла имеет вид:

$$
\begin{cases}
-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)E_1+0+0+0-\partial_3H_2+\partial_2H_3=j_1^{\text{ст}},\\
0-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)E_2+0+\partial_3H_1+0-\partial_1H_3=j_2^{\text{ст}},\\
0+0-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)E_3-\partial_2H_1+\partial_1H_2+0=j_3^{\text{ст}},\\
0+\partial_3E_2-\partial_2E_3-\mu_a\partial_0H_1+0+0=0,\\
-\partial_3E_1+0+\partial_1E_3+0-\mu_a\partial_0H_2+0=0,\\
\partial_2E_1-\partial_1E_2+0+0+0-\mu_a\partial_0H_3=0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $\vec{E}=\vec{E}(x,y,z,t)$ и $\vec{H}=\vec{H}(x,y,z,t)$ – искомые вектор-функции, описывающие напряженность электрического и магнитного полей соответственно со скалярными компонентами $E_i=E_i(x,y,z,t)$ и $H_i=H_i(x,y,z,t)$ $(i=\overline{1,3})$ в традиционном координатном пространстве

$$\partial_1\equiv\frac{\partial}{\partial x},\qquad \partial_2\equiv\frac{\partial}{\partial y},\qquad \partial_3\equiv\frac{\partial}{\partial z},\qquad \partial_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}\ -$$

– дифференциальные операторы по действительным переменным x, y, z, t; σ – удельная проводимость среды;

μ_a, ε_a – абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемость среды соответственно; вектор-функция $\vec{j}^{\,\text{ст}}=\vec{j}^{\,\text{ст}}(x,y,z,t)$ предполагается известной и описывает сторонние источники тока, а $j_i^{\text{ст}}=j_i^{\text{ст}}(x,y,z,t)$ $(i=\overline{1,3})$ – ее скалярные компоненты также над пространством R^4.

При этом под «скалярными» всюду в данной работе подразумеваются те уравнения, что содержат в качестве неизвестной лишь одну компоненту векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е. неизвестной является уже не векторная, а скалярная функция над пространством R^4.

Решается поставленная задача с помощью вышеуказанного алгоритма.

В результате исходная система (1) сводится к равносильной ей системе (2) из шести уравнений, каждое из которых содержит только одну искомую скалярную компоненту указанных векторов, то есть первоначальная матрица системы диагонализируется:

$$
\begin{cases}
-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2j_2^{\text{ст}}+\partial_3j_3^{\text{ст}}\right),\\
-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_2=\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1j_1^{\text{ст}}+\partial_3j_3^{\text{ст}}\right),\\
-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_3=\left(\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_3^{\text{ст}}+\partial_3\left(\partial_1j_1^{\text{ст}}+\partial_2j_2^{\text{ст}}\right),\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=-\partial_3\tilde{\partial}_0^{\,2}j_2^{\text{ст}}+\partial_2\tilde{\partial}_0^{\,2}j_3^{\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\partial_3\tilde{\partial}_0^{\,2}j_1^{\text{ст}}-\partial_1\tilde{\partial}_0^{\,2}j_3^{\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=\partial_2\tilde{\partial}_0^{\,2}j_1^{\text{ст}}-\partial_1\tilde{\partial}_0^{\,2}j_2^{\text{ст}},
\end{cases}
\tag{2}
$$

где $\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)=\tilde{\partial}_0^2$; $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{3}\partial_i^2$ – оператор Лапласа.

Таким образом, цель данной работы достигнута и поставленная задача на данном этапе исследований полностью решена.

В заключение отметим, что система (2), является разрешимой в силу результатов монографии [6], а значит, и исходная максвелловская система (1) также разрешима (так как (1) ≡ (2)), что и требовалось обосновать.

Литература

1. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. – М.: ИЛ, 1958. – 501 с.
2. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1964. – 664 с.
3. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух при произвольном возбуждении электромагнитного поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С. 2 – 7.
4. *Иваницкий А.М.* Реактивные элементы при экспофункциональных воздействиях // Информатика и связь. – 1996. – №1. – С. 236 – 240.
5. *Иваницкий А.М.* Экспофункциональные поля // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. – №1. – С. 18 – 21.
6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
7. *Иваницкий А.М.* Свойства дифференциальных операторов многомерных электрических цепей // Сб. научных трудов УГАС им. А.С. Попова. – Одеса, 1998. – с. 37 – 41.
8. *Вольман В.И.*, *Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 488 с.