СТАТТІ З ДОДАТКОВОЇ ТЕМАТИКИ

УДК 517.983

Баранов Н.И., Тарасенко И.В.
Baranov N.I., Tarasenko I.V.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С УНИТАРНЫМ СПЕКТРОМ

ON THE EXICTENCE OF TRIANGULAR REPRESENTATION OF LINEAR OPERATORS WITH UNITARY SPEKTRUM

Аннотация. Рассматриваются линейные операторы в гильбертовом пространстве. Доказано существование операторов, допускающих треугольное представление, отклонение которых не принадлежит идеалу Мацаева. Также доказано существование операторов, не имеющих треугольного представления, отклонение которых принадлежит идеалу Мацаева.

Summary. Consider bounded linear operators operating in a separable Hilbert space. Proof that existence operators with triangular representation with deflection not lying in the ideal of Macaev. And proof that existence operators has not triangular representation with deflection lying in the ideal of Macaev.

Теория операторных идеалов у гильбертовых пространствах появилась в работах Дж. Неймана, Р. Шэттена [1]. В исследованиях по проблеме приведения несамосопряженных операторов к абстрактному треугольному виду, в задаче о факторизации операторов вдоль цепочки ортопроекторов появилась необходимость применения идеалов ядерных операторов D_1, операторов Гильберта-Шмидта D_2, а также других операторных идеалов.

Абстрактное треугольное представление операторов является аналогом треугольной формы квадратной матрицы. В настоящей работе исследуется связь класса операторов, допускающих абстрактное треугольное представление с унитарным спектром [2], с операторным идеалом D_ω, введенным В. И. Мацаевым [3].

1. Обозначим через R множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Идеал В. И. Мацаева D_ω определяется [4; 5] как множество всех вполне непрерывных операторов $A \in R$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(A)}{2n-1} < \infty ,$$

где $S_n(A)$ – последовательность собственных чисел оператора $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, взятых в порядке убывания и с учетом их кратностей.

Рассмотрим операторный интеграл [4; 5] в смысле равномерной сходимости по цепочке ортопроекторов $\mathcal{P}$ вида

$$\int_{\mathcal{P}} PAdP . \qquad (1)$$

Идеал D_ω тесно связан с множеством из R, для которых интеграл (1) сходится.

Теорема 1 [4]. Пусть $A \in R$ – вполне непрерывный оператор. Для того чтобы интеграл (1) сходился по равномерной норме вдоль любой непрерывной цепочки ортопроектов $\mathcal{P}(\subset R)$, необходимо и достаточно, чтобы $A \in D_\omega$.

2. Для любого оператора $T \in R$ и любого ортопроектора P обозначим $T_p = PT \mid P\mathrm{H}$. Символом $e^{i[\alpha;\beta]}$ $\left(0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi\right)$ обозначим дугу единичной окружности, состоящую из точек $e^{i\lambda}$ $\left(\alpha \le \lambda \le \beta\right)$. Через $\sigma(T)$ будем обозначать спектр оператора T. Будем говорить, что ортопроектор P разделяет спектр оператора *T* в точке $e^{i\alpha}$ $\left(0 < \alpha < 2\pi\right)$, если $\sigma(T_P) \subset e^{i[0;\alpha]}$ и $\sigma(T_{I-P}) \subset e^{i[\alpha;2\pi]}$, I – единичный оператор в *H*.

Пусть $\mathcal{P}$ – максимальная цепочка ортопроектов [4; 5] в H. Оператор $T \in R$, будем относить к классу $A(\mathcal{P})$, если выполняются следующие условия I) – IV):

I) $\mathcal{P}$ – собственная цепочка оператора *T*.

II) Спектры всех операторов T_P $(P \in \mathcal{P},\ \ P > 0)$ унитарны.

III) Для каждой точки $e^{i\alpha}(0 < \alpha < 2\pi)$ существует ортопроектор $P \in \mathcal{P}$, разделяющий в этой точке спектр оператора *T*.

Положим $\underline{P} = \sup\{Q \in \mathcal{P} \mid Q > 0,\ \ \sigma(T_Q) = 1\}$, если существует ортопроектор $Q > 0$ $(Q \in \mathcal{P})$ такой, что $\sigma(T_Q) = 1$, и $\overline{P} = \inf\{Q \in \mathcal{P} \mid Q < I,\ \ \sigma(T_{I-Q}) = 1\}$, если существует ортопроектор $Q < I$ $(Q \in \mathcal{P})$, удовлетворяющий условию $\sigma(T_{I-Q}) = 1$. В случае, когда $\sigma(T_Q) \neq 1$ при всех $Q > 0$ будем считать $\underline{P} = 0$, если же $\sigma(T_{I-Q}) \neq 1$ при всех $Q < I$, то $\underline{P} = I$.

IV) Если ортопроекторы $P_1 \in \mathcal{P}$ и $P_2 \in \mathcal{P}$ разделяют спектр оператора *T* соответственно в точках $e^{i\alpha_1}$ и $e^{i\alpha_2}$, причем $\underline{P} \le P_1 < P_2 \le \overline{P}$, то $\alpha_1 \le \alpha_2$ и $\sigma(T_{P_2 - P_1}) \subset e^{i[\alpha_1;\ \alpha_2]}$.

Теорема 2 [2]. Для того чтобы оператор *T* допускал треугольное представление

$$T = U(I + V), \tag{2}$$

где $V \in R$ - оператор с собственной максимальной цепочкой $\mathcal{P}$ и с диагональю вдоль нее, равной нулю, а U – унитарный оператор, определенный равенством

$$U = \int_{(\mathcal{P}]} e^{i\varphi(P)} dP, \tag{3}$$

в котором $\varphi(P)$ $(P \in \mathcal{P},\ \ P > 0,\ \ 0 \le \varphi(P) \le 2\pi)$ – неубывающая непрерывная слева функция, необходимо и достаточно, чтобы $T \in A(\mathcal{P})$ и

$$\int_{\mathcal{P}]} dP(I - PHP)^{-1} HdP \quad (H = I - T^*T). \tag{4}$$

Правая часть равенства (2) называется треугольным представлением оператора *T* с унитарным спектром.

Если в (2) оператор V является вольтерровым, то выполнение равенства (4) равносильно следующему условию: оператор $I - T^*T$ – вполне непрерывный [6].

3. При изучении операторов $A \in R$, «близких» к самосопряженным, их мерой отклонения от самосопряженного является оператор $A_I = \dfrac{1}{2i}(A - A^*)$. Мерой же отклонения оператора $T \in R$ от унитарного служит оператор $H = I - T^*T$. Ниже доказано, что условие $H \in D_\omega$ не является необходимым и достаточным для представления оператора *T* в виде (2).

Теорема 3. Существует оператор $T \in R$, обладающий треугольным представлением вида (2), для которого $H = I - T^*T \notin D_\omega$.

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 – сепарабельные гильбертовы пространства, причем $\dim \mathrm{H}_1 = \dim \mathrm{H}_2$, $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$ - ортонормированные базисы в H_1 и H_2 соответственно. Через V обозначим оператор, действующий в $\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2$ так, что $V\mathrm{H}_1 = 0$ и $Ve'_k = e_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Пусть P_j – ортопроекторы в H_1 на подпространства, натянутые на векторы $\{e_1, e_2, \ldots e_j\}$, а P'_j – ортопроекторы в H_2 на подпространства, натянутые на векторы $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_j\}$. Тогда $\mathcal{P} = \left\{P_1, P_2, \ldots I_{H_1}, I_{H_1} + P'_1, I_{H_1} + P'_2; \ldots, I\right\}$ – собственная максимальная цепочка ортопроектов оператора V. Легко видеть, что $\int_{\mathcal{P}} dPVdP = 0$. Построим оператор $T = U(I + V)$, где унитарный оператор U имеет вид (3), в котором $\varphi(P)$ – произвольная неубывающая непрерывная слева функция, определенная на цепочке $\mathcal{P}$ и принимающая значения на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Интеграл (3) сходится [2] и, следовательно, оператор *T* имеет треугольное представление вида (2). Покажем, что

$H = I - T^*T \notin D_\omega$. Имеем $H\mathrm{H}_1 = (I - T^*T)\mathrm{H}_1 = (-V - V^* - V^*V)\mathrm{H}_1 = -V^*\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$. Следовательно, оператор H не является вполне непрерывным. Из определения идеала D_ω вытекает $H \notin D_\omega$.

Теореме 3 удовлетворяют многие другие операторы. Например, чистые сжатия подобные унитарным операторам [7]. Оператор T, построенный в теореме 3, не является подобным унитарному.

4. **Теорема 4.** Существует оператор $T \in R$ такой, что $I - T^*T \in D_\omega$, но который не имеет треугольного представления (2).

Доказательство. Пусть H_3 – трехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормированный базис в H_3. Оператор T зададим соотношениями $Te_1 = e^{i\alpha}e_1$, $Te_2 = e_2$, $Te_3 = e^{i\beta}e_3$, где $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. Обозначим через P_1 и P_2 ортопроекторы на подпространства, натянутые на e_1 и на e_2, e_3, соответственно. Тогда $\mathcal{P} = \{0, \ P_1, \ P_2, \ I\}$ - максимальная собственная цепочка оператора T. Условия I), II) и III) выполняются. Вместе с тем, $\underline{P} = 0 < P_1 < P_2 < I < \overline{P}$. Ортопроекторы P_1 и P_2 разделяет спектр оператора T в точках $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$, но $\sigma(T_{P_1 - P_2}) = 1 \not\subset e^{i[\alpha;\beta]}$. Поэтому условие IV) не выполняется. Следовательно, оператор T не имеет треугольного представления вида (2). Вместе с тем, $I - T^*T \in D_\omega$. Теорема доказана.

Полученные результаты находят применение в задаче факторизации операторов, а также при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [4].

Литература

1. *Schatten R.* Norm ideals of completely continnous. – Berlin – Heidelberg. – 1960.
2. *Баранов Н.И., Бродский М.С.* Треугольное представления операторов с унитарным спектром // Функциональный анализ и его приложения. – 1982. – Т.16. – №1. – С. 58-59.
3. *Мацаев В.И.* Об одном классе вполне непрерывных операторов // ДАН СССР – 1961. – Т.139. – №3. – С.548-552.
4. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория* вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М: Наука. – 1967. – 508с.
5. *Бродский М.С.* Треугольное представление и жордановы предстовления линейных операторов. М: Наука. – 1969. – 288с.
6. *Бродский В.М., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Т.3. – №4. – С.1 – 27.
7. *С – Надь Б., Фоям Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М: Мир. – 1970. – 432 с.