УДК 621.391.26

Кротюков Е.Г.
Krotyukov E.G.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОГЕРЕНТНО-НЕКОГЕРЕНТНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ

EFFICIENCY COHERENTLY-NOT COHERENT SEQUENTIAL DETECTOR

Аннотация. Проведен анализ эффективности одноканального по доплеровской частоте когерентно-некогерентного последовательного обнаружителя сигналов в условиях помех с произвольной корреляционной матрицей.

Summary. The analysis of efficiency single-channel on Doppler frequency coherently-not coherent consecutive detector signals in conditions of interferences with an any correlation matrix is lead.

В настоящее время теория обнаружения хорошо разработана. Вместе с тем исследования по теории обнаружения продолжаются. Одним из направлений продолжающихся работ является дальнейшее применение последовательного анализа, разработанного А. Вальдом [1]. Для практически важных задач возникает проблема оптимизации последовательных обнаружителей в условиях воздействия различных помех.

Несмотря на значительную экономию времени наблюдения в последовательных процедурах по сравнению с процедурами с фиксированным объемом выборки широкого внедрения последовательных обнаружителей не произошло. Главной причиной этого было отсутствие эффективных методов синтеза и анализа последовательных обнаружителей, использующих различные решающие статистики и функционирующих в различных сигнально-помеховых ситуациях [2].

В [3] установлено, что реализация вальдовской процедуры обнаружения сигналов при воздействии коррелированных помех наталкивается на существенные технические трудности, связанные со сложностью формирования решающих статистик и необходимостью построения многоканального по доплеровской частоте обнаружителя.

Однако, решение данной задачи возможно путем использования когерентно-некогерентного метода обработки, являющегося аналогом одноэтапной процедуры Хотеллинга [4]. Принцип работы этого метода заключается в декорреляции помехи на каждом шаге процедуры и последующем последовательном обнаружении на фоне уже некоррелированных помех.

Целью настоящей работы является исследование потенциальной эффективности когерентно-некогерентной последовательной процедуры в условиях коррелированных помех.

Определим элементы матрицы обработки, декоррелирующей входную выборку X_n на последовательных шагах процедуры. Обеляющая матрица V_n, преобразующая X_n в вектор $\mathrm{Y}_n = \mathrm{V}_n \mathrm{X}_n$ с некоррелированными составляющими единичной дисперсии, является нижней треугольной и удовлетворяет соотношению [4]

$$\mathrm{V}_n^{*T} \mathrm{V}_n = \mathrm{R}_n^{-1},$$

где R_n – ковариационная матрица помехи

Неизвестные элементы i-й $\left(i = \overline{1,n}\right)$ строки V_n, с точностью до постоянного множителя, совпадают с элементами i-й строки R_i^{-1}. При этом вектор весовых коэффициентов фильтра-декоррелятора на i-ом шаге процедуры равен

$$\mathrm{W}_i = \frac{\mathrm{R}_i^{-1} \mathrm{e}_i}{\mathrm{e}_i^T \mathrm{R}_i^{-1} \mathrm{e}_i},$$

где e_i – вектор, i-й элемент которого равен единице, а остальные нулю.

Т.е., синтезированный фильтр-декоррелятор оптимален по критерию минимума мощности помехи на выходе при ограничении на последний весовой коэффициент.

Найдем совместные распределения решающих статистик на n-м шаге процедуры, если решающая статистика, формируемая рассматриваемым обнаружителем на i-м шаге, определяется известным выражением [5]

$$l_i=\sum_{j=1}^{i}-\frac{a_j^2}{2\sigma_j^2}+\ln \mathrm{I}_0\left(\frac{a_j u_j}{\sigma_j^2}\right)\approx\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{i}-\dfrac{a_j^2}{2\sigma_j^2}+\dfrac{a_j^2}{4\sigma_j^4} \quad \text{при} \quad \dfrac{a_j u_j}{\sigma_j^2}<1; & (1)\\ \sum\limits_{j=1}^{i}-\dfrac{a_j^2}{2\sigma_j^2}+\dfrac{a_j}{\sigma_j^2} \quad \text{при} \quad \dfrac{a_j u_j}{\sigma_j^2}>>1, & (2)\end{cases}$$

где $a_j=\left|\mathrm{W}_j^{*T}\mathrm{S}_j\right|$ – амплитуда сигнала на выходе фильтра; $\sigma_j^2=\mathrm{W}_j^{*T}\mathrm{R}_j\mathrm{W}_j$ – дисперсия на выходе фильтра; $u_j=\left|\mathrm{W}_j^{*T}\mathrm{X}_j\right|$ – огибающая процесса на выходе фильтра.

Используя (1) и (2), вектор решающих статистик $\mathrm{L}_n^T=\left[l_1 l_2 ... l_n\right]$ на n-м шаге процедуры представим в виде

$$\mathrm{L}_n=\begin{cases}\mathrm{E}_n\mathrm{U}_n^2-\mathrm{K}_n;\\ \mathrm{C}_n\mathrm{U}_n^2-\mathrm{K}_n,\end{cases}$$

где

$$\mathrm{E}_n=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} a_1^2/\sigma_1^4 & 0 & \dots & 0\\ a_1^2/\sigma_1^4 & a_2^2/\sigma_2^4 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1^2/\sigma_1^4 & a_2^2/\sigma_2^4 & \dots & a_n^2/\sigma_n^4\end{bmatrix};\quad \mathrm{C}_n=\begin{bmatrix} a_1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0\\ a_1/\sigma_1^2 & a_2/\sigma_2^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1/\sigma_1^2 & a_2/\sigma_2^2 & \dots & a_n/\sigma_n^2\end{bmatrix};$$

$$\mathrm{K}_n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} a_1^2/\sigma_1^2\\ a_2^2/\sigma_2^2\\ \dots\\ a_n^2/\sigma_n^2\end{bmatrix};\quad \mathrm{U}_n^2=\begin{bmatrix} u_1^2\\ u_2^2\\ \dots\\ u_n^2\end{bmatrix};\quad \mathrm{U}_n=\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \dots\\ u_n\end{bmatrix}.$$

Применяя известные правила нахождения распределений функций случайных величин [5] и учитывая независимость элементов векторов U_n и U_n^2, для (1) получены выражения для плотности распределения вектора решающих статистик L_n

$$W_n\left(\mathrm{L}_n/H_1\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\sigma_i^2}{a_i^2}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\mathrm{E}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]+a_i^2}{2\sigma_i^2}\right\}\mathrm{I}_0\left[\frac{a_i\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\mathrm{E}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]}{\sigma_i^2}\right],$$

$$W_n\left(\mathrm{L}_n/H_0\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\sigma_i^2}{a_i^2}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\mathrm{E}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]}{2\sigma_i^2}\right\}.$$

При справедливости (2) соответствующие плотности имеют вид:

$$W_n\left(\mathrm{L}_n/H_1\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\mathrm{C}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]}{a_i}\exp\left\{-\frac{\left\{\sum\limits_{j=1}^{i}\left(\mathrm{C}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]\right\}^2+a_i^2}{2\sigma_i^2}\right\}\times$$

$$\times \mathrm{I}_0\left[\frac{a_i\sum_{j=1}^{i}\left(\mathrm{C}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]}{\sigma_i^2}\right],$$

$$W_n\left(\mathrm{L}_n/H_0\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j=1}^{i}\left(\mathrm{C}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]}{a_i}\exp\left\{-\frac{\left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\mathrm{C}_n^{-1}\right)_{ij}\left[\left(\mathrm{L}_n\right)_j+\left(\mathrm{K}_n\right)_j\right]\right\}^2}{2\sigma_i^2}\right\}.$$

Методом численного интегрирования [3] рассчитаны распределения продолжительности когерентно-некогерентной последовательной процедуры обнаружения $P_s\left(n/H_1\right)$, $P_s\left(n/H_0\right)$ (рис.1), условные выигрыши $\varepsilon\left(H_1\right)$, $\varepsilon\left(H_0\right)$ (рис.2) и фактически получаемые вероятности ложной тревоги $F^{\wedge}$ и правильного обнаружения $D^{\wedge}$ (рис.3). Исследования проводились при вероятностях $F=10^{-2}$ и $D=0{,}9$, коэффициенте корреляции $r=0{,}95$ для случаев справедливости гипотезы H_0 и альтернативы H_1 (пунктирные и сплошные линии соответственно).

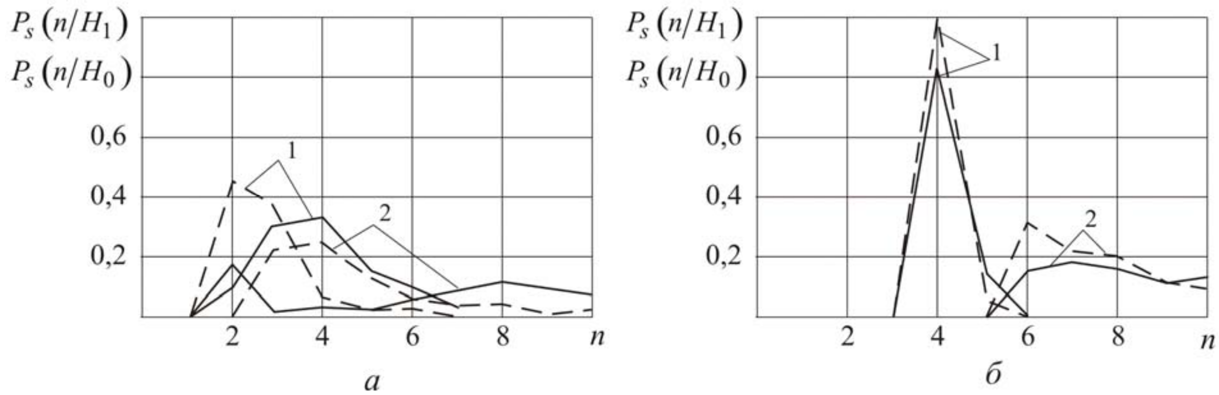


Рисунок 1 – Распределение продолжительности когерентно-некогерентной последовательной процедуры на фоне помехи с экспоненциальной (*а*) и гауссовской (*б*) ковариационными матрицами для продолжительности процедуры Неймана-Пирсона $N=4$ (1) и 8 (2)

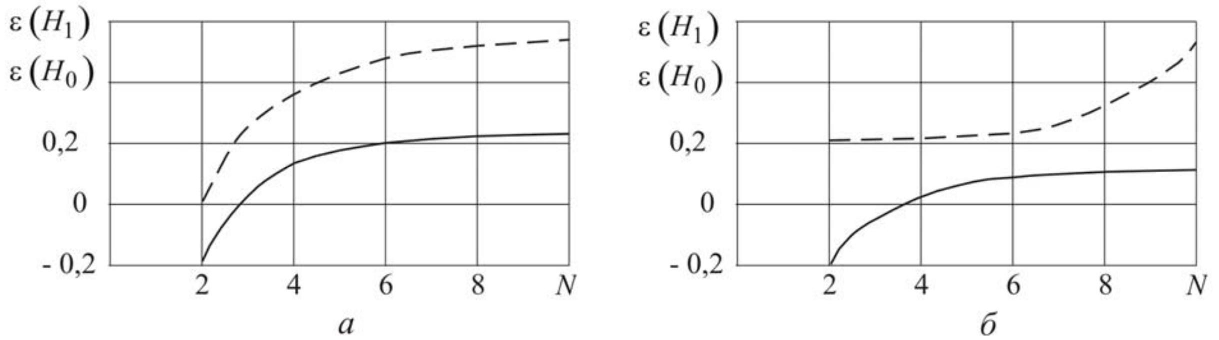
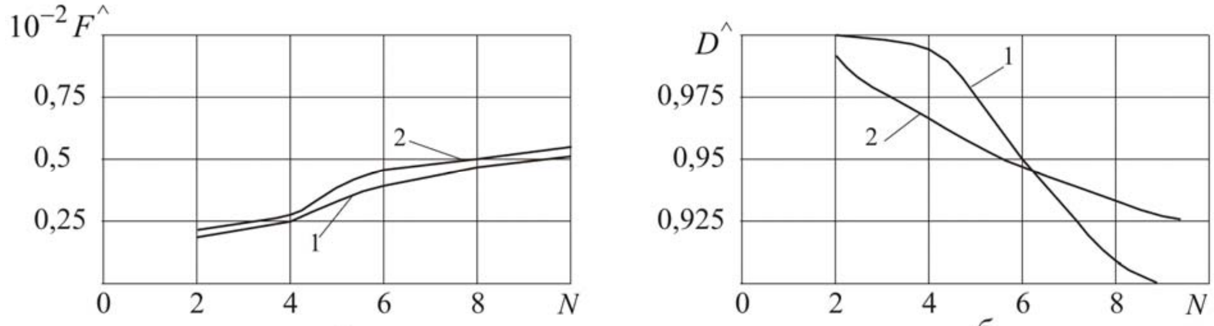


Рисунок 2 – Отношение средней продолжительности когерентно-некогерентной последовательной процедуры к длительности процедуры Неймана-Пирсона на фоне помехи с экспоненциальной (*а*) и гауссовской (*б*) ковариационными матрицами



а *б*

Рисунок 3 – Вероятность ложной тревоги (*а*) и правильного обнаружения (*б*) на фоне помехи с гауссовской (1) и экспоненциальной (2) ковариационными матрицами

Сравнение когерентно-некогерентного последовательного обнаружителя и вальдовского обнаружителя [3] позволяет сделать следующие выводы:

1. Распределения продолжительности когерентно-некогерентной процедуры близки к распределениям процедуры Вальда, имеют тот же характер и смещены в область больших значений n, что свидетельствует о некотором увеличении средней продолжительности и дисперсии.

2. Рассматриваемая процедура по эффективности $\varepsilon\left(H_1\right)$, $\varepsilon\left(H_0\right)$ незначительно уступает процедуре Вальда (потери в средней продолжительности не превышают одного импульса). С увеличением N эффективность одноканального обнаружителя уменьшается, что объясняется возрастанием потерь за счет некогерентного накопителя.

3. Вероятность ложной тревоги $F^{\wedge}$ сравниваемых обнаружителей практически совпадают, а вероятности правильного обнаружения $D^{\wedge}$ когерентно-некогерентной процедуры оказываются несколько меньше, чем у вальдовской процедуры.

Существенным ограничением реализуемости рассматриваемого обнаружителя в случае помех с произвольной формой функции корреляции является необходимость формирования на каждом n-м шаге процедуры n-мерного вектора весовых коэффициентов W_n фильтра-декоррелятора. Поэтому представляет интерес, учитывая оптимальность W_n по критерию минимума мощности помехи и наличие во входном процессе некоррелированных шумов, ограничивающих эффективность подавления смеси помехи и шума, исследовать характеристики обнаружителя при постоянной после m-го шага, размерности W_n ($\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_m$ при $n \geq m$).

Исследования, проведенные методом математического моделирования при ограниченной размерности фильтра-декоррелятора, в условиях помех с гауссовской формой корреляционной функции позволили установить наличие минимального значения $m = m_0$, при котором обеспечиваются статистические характеристики обнаружителя, близкие к случаю неограниченной памяти фильтра. Так, при $F = 10^{-2}$, $D = 0.5$, $r = 0.95$, $N \leq 10$ и отношений помеха/шум λ = 30 дБ $m_0 = 4$. Очевидно, что для экспоненциальной функции корреляции помехи $m_0 = 2$.

В заключение отметим, что проведенные в настоящей статье исследования потенциальной эффективности когерентно-некогерентной последовательной процедуры показали, что в условиях коррелированных помех обеспечиваются незначительные потери в средней продолжительности по сравнению с когерентной последовательной процедурой Вальда. Определен порядок фильтра-декоррелятора, позволяющий реализовывать распределения продолжительности и ошибки обнаружения, близкие к соответствующим характеристикам процедуры без ограничения порядка фильтра-декоррелятора. Вместе с тем, учитывая отсутствие априорных сведений о спектрально-корреляционных свойствах помех, представляет интерес исследование разработанных алгоритмов в адаптивном режиме.

Литература

1. *Вальд А.* Последовательный анализ; Пер. с англ. / Под ред. Б. А. Севастьянова. – М.: Физматгиз, 1960. – 328 с.
2. *Сосулин Ю.Г.* Последовательное обнаружение сигналов: проблемы и перспективы // Радиотехника. – 1998. – №10. – С. 63 – 68.
3. *Аверочкин В.А., Баранов П.Е., Кротюков Е.Г.* Эффективность вальдовских обнаружителей сигналов в условиях коррелированных помех // Труды Одесского политехнического университета. – 2005. – Вып. 1(23). – С.154 – 158.
4. *Рао С.* Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968. – 548с.
5. Теория обнаружения сигналов / П.С. Акимов, П.А. Бакута, В.А. Богданович и др. / Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
6. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники: В 3-х кн. – М.: Сов. радио, 1974. – 1976. – Кн.1. – 1974. – 552 с.; Кн.2. – 1975. – 392 с.; Кн. 3. – 1976. – 288 с.