УДК 621.371:621.372

Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю.
Ivanitckiy A.M., Dmitrieva I. Yu.

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ “СИММЕТРИЧНОЙ” СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

DIAGONALIZATION OF THE “SYMMETRICAL” SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL MAXWELL EQUATIONS

Аннотация. Предлагается достаточно простой прикладной и строго математический метод диагонализации обобщенной максвелловской системы основных дифференциальных уравнений симметричной структуры. Симметрия понимается в смысле полноты правых частей системы, содержащих линейные дифференциальные операторы первого порядка по переменной *t.* При этом известные вектор-функции, описывающие как сторонние токи, так и сторонние напряжения, присутствуют. Процесс диагонализации проводится в два этапа – поблочно и покоординатно – применением соответствующих дифференциальных операторов над пространством (*x, y, z, t*) вначале к векторным, а затем и к обычным уравнениям исходной системы, содержащим компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Summary. We propose rather simply applied and shict mathematical method of diagonalization for the generalized Maxwell system that holds differential equations of the symmetrical structure. The symmetry is understood here in the meaning of the initial system’s right parts fullness which consist of linear first – ordered differential operators by argument *t*. The known vector – functions that describe the outside currents and tensions are given. The digitalization procedure is done in two stages: by blocks and by coordinates with the help of application of the corresponding differential operators over the space (*x, y, z, t*). At the first step these operators are applied to the vector equations of the initial system, and at the second step the appropriate operators are used for the usual original system’s equations that consist of vectors $\vec{E}$ and $\vec{H}$ components.

В настоящее время все еще требует рассмотрения проблема получения простым способом конструктивного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Это связано с тем, что увеличивается потребность в решении прикладных задач.

Как известно [1, 2], все реальные физические процессы могут быть описаны системами дифференциальных уравнений в частных производных, классическое решение которых зачастую осуществляется применением соответствующих интегральных преобразований, сводящих первоначальный объект к системе алгебраических либо обыкновенных дифференциальных уравнений относительно исходных функций. При этом, как правило, либо исходная, либо трансформированная система диагонализируется, т.е. сводится к эквивалентной, каждое уравнение которой содержит ровно одну неизвестную скалярную функцию. Все известные классические процедуры диагонализации систем дифференциальных уравнений в частных производных, даже первого порядка и даже линейных [3], при непосредственной реализации требуют знания такого серьезного математического раздела, как теория обобщенных функций. Кроме того, при переходе к трансформаторам, а затем обратно к оригиналу исходной функции следует учитывать не только математическую, но и физическую постановку задачи даже в частных случаях решений, например в вопросах классической электродинамики.

Так, в монографии В.С. Владимирова [4] с помощью теории обобщенных функций строго обосновано существование решения совокупности уравнения Максвелла в случае пассивных систем.

В работе А.М. Иваницкого [5] исследовалась проблема минимизации числа исходных векторных уравнений классической максвелловской системы, разрешимость которой была доказана этим же автором шестью годами ранее, основываясь на теории многомерных цепей [6].

В статье [7] классическая система дифференциальных уравнений электродинамики для линейных однородных изотропных покоящихся сред сводилась к равносильной системе скалярных уравнений относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, описывающих электрическую и магнитную напряженности электромагнитного поля соответственно. При этом под скалярным уравнением здесь и всюду в дальнейшем понимается то, что содержит ровно одну компоненту исходного вектора. В работе [8] вышеупомянутый результат существенно обобщался на случай произвольной системы шести дифференциальных уравнений в частных производных, левые части которых являлись линейными дифференциальными операторами первого порядка с постоянными коэффициентами над пространством (*x, y, z, t)*, где *x, y, z* – координаты точки поля; *t* – время.

В обоих случаях диагонализация, т.е. сведение матрицы исходной системы к равносильной ей диагональной, реализовывалась последовательным применением к первоначальным уравнениям соответствующих операторов, явный вид которых был заведомо известен.

Большое количество уравнений в системе приводит к необходимости оперировать при использовании метода, описанного в [7, 8], на каждом шаге процедуры диагонализации громоздкими математическими выражениями, что ставит задачу совершенствования вышеупомянутого метода с целью его упрощения. Одним из возможных путей упрощения процедуры диагонализации является выделение блоков матрицы исходной системы с дальнейшими преобразованиями матрицы в блочном виде, например, как это описано в [6], где применялся обобщенный алгоритм Гаусса. Недостатком применения обобщенного алгоритма Гаусса является необходимость нахождения обратного матричного дифференциального оператора. Однако в литературе отсутствует описание способов решения подобной задачи без применения обратного матричного дифференциального оператора. Кроме того, применение принципа дуальности в электродинамике [9] при решении задачи диагонализации строго симметричных уравнений Максвелла может принести дополнительные упрощения. Поэтому цель настоящей работы – дать метод диагонализации системы дифференциальных строго симметричных уравнений Максвелла без применения обратного матричного дифференциального оператора с дополнительными упрощениями за счет использования принципа дуальности.

1. Блочная диагонализация заданной системы. В статье предложена максвелловская система, которую для удобства применения всюду в дальнейшем будем называть «симметричной»:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = (\sigma \pm \lambda\varepsilon_a)\vec{E} + \varepsilon_a \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\,\text{ст}}, \\ -\,\mathrm{rot}\vec{E} = (r \pm \lambda\mu_a)\vec{H} + \mu_a \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{e}^{\,\text{ст}}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь искомые вектор-функции $\vec{E} = \vec{E}(x,y,z,t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x,y,z,t)$ со скалярными компонентами $E_\text{к} = E_\text{к}(x,y,z,t)$, $H_\text{к} = H_\text{к}(x,y,z,t)$ $(\text{к} = \overline{1,3})$ обозначают напряженность электрического и магнитного поля соответственно; положительные постоянные σ, r, μ_a, ε_a – это удельная проводимость и удельное сопротивление, а также абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемость среды; λ – параметр сигнала, воздействующего на среду; вектор-функции $\vec{j}^{\,\text{ст}} = \vec{j}^{\,\text{ст}}(x,y,z,t)$, $\vec{e}^{\,\text{ст}} = \vec{e}^{\,\text{ст}}(x,y,z,t)$ со скалярными компонентами $j^\text{ст}_\text{к} = j^\text{ст}_\text{к}(x,y,z,t)$, $e^\text{ст}_\text{к} = e^\text{ст}_\text{к}(x,y,z,t)$ $(i = \overline{1,3})$ считаются известными и описывают сторонние токи и напряжение.

Система уравнений (1) является системой строго симметричных первого и второго уравнений Максвелла в дифференциальной форме [9], записанных для экспофункционального поля [10]. В [10] первое и второе уравнения Максвелла записаны в дуальной форме [9] с использованием дуальных операций $\mathrm{rot}_+ \equiv \mathrm{rot}$ и $\mathrm{rot}_- \equiv -\mathrm{rot}$. Поэтому в дальнейшем, где это будет удобно, будем пользоваться принципом дуальности. Применяя операции векторного анализа в матричной форме [11], систему уравнений (1) можно записать и в блочной матричной форме [5]. Поэтому все преобразования, которые произведены по отношению к системе (1), остаются справедливыми и к матричной форме уравнений Максвелла.

Здесь следует вновь напомнить, что под диагонализацией понимается сведение изначальной матрицы системы к диагональному виду, т.е. к равносильной системе (в данном случае – шести) скалярных уравнений относительно компонент исходных вектор-функций (в изучаемом варианте – $\vec{E}$ и $\vec{H}$). При этом под скалярным уравнением понимается то, которое содержит одну компоненту искомой вектор-функции, а именно либо $E_\text{к}$, либо $H_\text{к}$ $(\text{к} = \overline{1,3})$ для рассматриваемой системы (1).

Под блочной диагонализацией (1) понимаем сведéние матрицы исходной системы к диагональной относительно вектор-функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Для удобства дальнейших вычислений введем предварительно обозначения для дифференциальных операторов в частных производных над пространством (x, y, z, t):

$$\begin{gathered} \mathrm{rot} = A,\ \frac{\partial}{\partial t} = \partial_0,\ \partial_0 \pm \lambda = \partial_0^*, \\ \sigma + \varepsilon_\text{a}\partial_0^* = C,\ r + \mu_\text{a}\partial_0^* = D. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда в терминах (2) система (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} A\vec{H} - C\vec{E} = \vec{j}^{\,\text{ст}}, \\ -A\vec{E} - D\vec{H} = \vec{e}^{\,\text{ст}}. \end{cases} \tag{3}$$

Используя таблицы дуальных понятий, данных в [9, 10], и обозначения (2), все величины системы (3) можно представить в виде дуальных пар $\vec{j}^{\,\text{ст}} \leftrightarrow \vec{e}^{\,\text{ст}}$, $\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}$, $C \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow -A$, которые можно использовать при получении результатов с помощью принципа дуальности. Например, если заменить величины первого уравнения системы (3) на соответствующие дуальные, то получим второе уравнение этой системы, т.е. первое и второе уравнения являются дуальными.

Применив к первому уравнению (3) оператор D, а ко второму – A, после почленного сложения преобразованных уравнений приходим к системе, эквивалентной (3):

$$\begin{cases} -(DC + A^2)\vec{E} = D\vec{j}^{\,\text{ст}} + A\vec{e}^{\,\text{ст}}; \\ -A\vec{E} - D\vec{H} = \vec{e}^{\,\text{ст}}, \end{cases} \tag{4}$$

первое уравнение которой содержит уже только вектор-функцию $\vec{E}$.

Здесь и всюду в дальнейшем «умножение» операторов, а значит, и их натуральная степень понимается как последовательное операторное применение в направлении справа налево, от внутреннего к внешнему.

Далее, применив к первому уравнению (4) оператор ($-A$), а ко второму – ($DC + A^2$) и сложив вновь почленно оба преобразованных уравнения, получим систему, равносильную (4)

$$\begin{cases} -(A^2 + DC)\vec{E} = D\vec{j}^{\,\text{ст}} + A\vec{e}^{\,\text{ст}}; \\ -(A^2 + DC)D\vec{H} = (A^2 + DC)\vec{e}^{\,\text{ст}} - AD\vec{j}^{\,\text{ст}} - A^2\vec{e}^{\,\text{ст}}, \end{cases} \tag{5}$$

у которой также и второе уравнение содержит ровно одну вектор-функцию $\vec{H}$.

При этом очевидно, что уже на данном, первоначальном этапе диагонализации существенно используется попарная коммутативность исходных дифференциальных операторов (2). В противном случае даже первое искомое уравнение системы (5) указанным методом получено быть не может.

После элементарных преобразований в правой части второго уравнения (5) с учетом попарной коммутативности операторов (2) запишем (5) следующим образом:

$$\begin{cases} -(A^2 + DC)\vec{E} = D\vec{j}^{\,cm} + A\vec{e}^{\,\text{ст}}; \\ -D(A^2 + DC)\vec{H} = D(C\vec{e}^{\,\text{ст}} - A\vec{j}^{\,\text{ст}}). \end{cases}$$

«Сократив» обе части второго уравнения последней системы на «общий операторный множитель» D, приходим к искомой системе, эквивалентной (1), с матрицей, диагональной относительно вектор-функций $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\begin{cases} -(A^2 + DC)\vec{E} = A\vec{e}^{\,\text{ст}} + D\vec{j}^{\,\text{ст}}; \\ -(A^2 + DC)\vec{H} = C\vec{e}^{\,\text{ст}} - A\vec{j}^{\,\text{ст}}. \end{cases} \tag{6}$$

На блочном уровне, т.е. в терминах вектор – функций, диагонализация исходной системы (1) завершена.

Основной момент для дальнейшего решения задачи.

Нетрудно заметить, что оба уравнения (6) имеют тождественные операторные выражения левых частей, а поскольку предложенный здесь алгоритм полностью определяется структурой матрицы исходной системы, следовательно дальнейшая диагонализация обоих уравнений (6) относительно их соответствующих компонент $\{E_i\}_{i=1}^3$, $\{H_i\}_{i=1}^3$ может быть произведена одновременно представлением системы (6) в виде единого векторного уравнения, отличающегося лишь искомой вектор-функцией и известной первой частью, а именно:

$$-(A^2 + DC)\vec{F}_i = \vec{\varphi}_i \quad (i = 1{,}2), \tag{7}$$

где

$$\vec{F}_1 = \vec{E}; \quad \vec{F}_2 = \vec{H}; \quad \vec{\varphi}_1 = A\vec{e}^{\,\text{ст}} + D\vec{j}^{\,\text{ст}}; \quad \vec{\varphi}_2 = C\vec{e}^{\,\text{ст}} - A\vec{j}^{\,\text{ст}}. \tag{8}$$

2. Покоординатная диагонализация единого векторного уравнения “снизу вверх”. Под покоординатной диагонализацией векторного уравнения, содержащего ровно одну вектор-функцию, понимаем сведение такого уровня к эквивалентной системе скалярных уравнений, каждое из которых содержит ровно одну компоненту исходного вектора.

Для реализации указанной процедуры, очевидно, рассматриваемое векторное уравнение (в данном случае – (7)) необходимо вначале записать в виде соответствующей системы, т.е. покоординатно.

Возвращаясь к введенным ранее обозначениям (2), выразим дифференциальные операторы в явной форме:

$$A^2 = \mathrm{rot\ rot} = \mathrm{grad\ div} - \Delta = \mathrm{grad}\left(\sum_{\kappa=1}^{3} \partial_\kappa\right) - \Delta\,;\ \Delta = \sum_{\kappa=1}^{3} \partial_\kappa^2\,. \tag{9}$$

Положив операторный многочлен

$$DC = \mu_a \varepsilon_a \partial_0^{*2} + (\sigma\mu_a + r\varepsilon_a)\partial_0^* + r\sigma = \tilde{\partial}_0^2\,, \tag{10}$$

на основании формул (9), (10) имеем

$$A_2 + DC = \mathrm{grad}(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) - \Delta + \tilde{\partial}_0^2\,, \tag{11}$$

где

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x};\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y};\quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{12}$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2\,. \tag{13}$$

Тогда, на основании (9) … (13), уравнение (7) примет вид

$$\begin{gathered} -(\mathrm{grad\ div} - \Delta + \tilde{\partial}_0^2)\vec{F}_i = \vec{\varphi}_i \quad (i = 1{,}2); \\ \Updownarrow \\ (\Delta - \mathrm{grad\ div} - \tilde{\partial}_0^2)\vec{F}_i = \vec{\varphi}_i \quad (i = 1{,}2). \end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая очевидное равенство

$$\mathrm{grad\ div}\,\vec{F}_i = \mathrm{grad}(\partial_1 F_{i1} + \partial_2 F_{i2} + \partial_3 F_{i3})\,,$$

компоненты которого в виде матрицы-столбца выглядят как

$$\begin{bmatrix} \partial_1^2 F_{i1} + \partial_1(\partial_2 F_{i2} + \partial_3 F_{i3}) \\ \partial_2^2 F_{i2} + \partial_2(\partial_1 F_{i1} + \partial_3 F_{i3}) \\ \partial_3^2 F_{i3} + \partial_3(\partial_1 F_{i1} + \partial_2 F_{i2}) \end{bmatrix} (i = 1{,}2)\,, \tag{15}$$

где

$$\vec{F}_i = \{F_{i\kappa}\}_{\kappa=1}^{3},\quad F_{i\kappa} = F_{i\kappa}(x, y, z, t)\ (i = 1, 2)\,, \tag{16}$$

запишем уравнение (14) покоординатно:

$$\begin{gathered} \begin{cases} (\Delta - \tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2)F_{i1} - \partial_1(\partial_2 F_{i2} + \partial_3 F_{i3}) = \varphi_{i1}; \\ (\Delta - \tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2)F_{i2} - \partial_2(\partial_1 F_{i1} + \partial_3 F_{i3}) = \varphi_{i2} \quad (i = 1{,}2); \\ (\Delta - \tilde{\partial}_0^2 - \partial_3^2)F_{i3} - \partial_3(\partial_1 F_{i1} + \partial_2 F_{i2}) = \varphi_{i3}; \end{cases} \\ \Updownarrow \\ \begin{cases} (\partial_2^2 + \partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2)F_{i1} - \partial_1(\partial_2 F_{i2} + \partial_3 F_{i3}) = \varphi_{i1}; \\ (\partial_1^2 + \partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2)F_{i2} - \partial_2(\partial_1 F_{i1} + \partial_3 F_{i3}) = \varphi_{i2} \quad (i = 1{,}2); \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2)F_{i3} - \partial_3(\partial_1 F_{i1} + \partial_2 F_{i2}) = \varphi_{i3}, \end{cases} \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\vec{\varphi}_i = \{\varphi_{i\kappa}\}_{\kappa=1}^{3},\quad \varphi_{i\kappa} = \varphi_{i\kappa}(x, y, z, t)\ (i = 1, 2)\,.$$

Таким образом, единое векторное уравнение (14) эквивалентно системе операторных уравнений (17) относительно компонент искомого вектора $\vec{F}_i$ – скалярных функций $F_{i\kappa} = F_{i\kappa}(x, y, z, t)\ (i = \overline{1{,}3})$.

Вводя в (17) вспомогательные обозначения известных дифференциальных операторов

$$A_{23}=\partial_2^2+\partial_3^2-\widetilde{\partial}_0^2;\quad A_{13}=\partial_1^2+\partial_3^2-\widetilde{\partial}_0^2;\quad A_{12}=\partial_1^2+\partial_2^2-\widetilde{\partial}_0^2\,; \tag{18}$$

$$B_{12}=\partial_1\partial_2;\quad B_{13}=\partial_1\partial_3;\quad B_{23}=\partial_2\partial_3, \tag{19}$$

выразим (17) в терминах (18), (19)

$$\begin{gathered} A_{23}F_{i1}-B_{12}F_{i2}-B_{13}F_{i3}=\varphi_{i1};\\ A_{13}F_{i2}-B_{12}F_{i1}-B_{23}F_{i3}=\varphi_{i2};\\ A_{13}F_{i3}-B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}=\varphi_{i3};\\ \Updownarrow \end{gathered}$$

$$\begin{cases} A_{23}F_{i1}-B_{12}F_{i2}-B_{13}F_{i3}=\varphi_{i1};\\ -B_{12}F_{i1}+A_{13}F_{i2}-B_{23}F_{i3}=\varphi_{i2} \qquad (i=1,2);\\ -B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}+A_{12}F_{i3}=\varphi_{i3}. \end{cases} \tag{20}$$

При этом существенно использовалась попарная коммутативность операторов (12), что и привело к очевидной симметричности матрицы системы (20) относительно главной диагонали.

Проведем первый этап диагонализации (20) в направлении «снизу вверх», т.е. сведем первое уравнение системы к скалярному относительно любой компоненты $\{F_{i\kappa}\}_{\kappa=1}^{3}(i=1,2)$. Не нарушая общности, считаем, что это будет $F_{i1}(i=1,2)$.

Применим к третьему уравнению (20)последовательно операторы

$$B_{13},B_{23}, \tag{21}$$

а к первым двум уравнениям той же системы – оператор

$$A_{12} \tag{22}$$

и сложим почленно преобразованное третье уравнение последовательно с первым и вторым вышепреобразованными уравнениями. В итоге придем к равносильной системе

$$\begin{cases} (A_{12}A_{23}-B_{13}^2)F_{i1}+(-A_{12}B_{12}-B_{13}B_{23})F_{i2}=A_{12}\varphi_{i1}+B_{13}\varphi_{i3},\\ (-A_{12}B_{12}-B_{23}B_{13})F_{i1}+(A_{12}A_{13}-B^2{}_{23})F_{i2}=A_{12}\varphi_{i2}+B_{23}\varphi_{i3},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}+A_{13}F_{i3}=\varphi_{i3} \quad (i=1,2), \end{cases} \tag{23}$$

в которой первые два уравнения содержат уже только компоненты F_{i1}, F_{i2}. При этом нетрудно заметить, что при «ликвидации» компоненты F_{i3} в первых двух уравнениях системы (20) существенно использовалась попарная коммутативность дифференциальных операторов (18), (19).

Далее применим ко второму уравнению (23) оператор

$$A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23}, \tag{24}$$

а к первому –

$$A_{12}A_{13}-B^2{}_{23} \tag{25}$$

и сложим почленно оба преобразованных уравнения, в результате чего получим систему, эквивалентную (23):

$$\begin{cases} ((A_{12}A_{13}-B_{23}^2)(A_{12}A_{23}-B_{13}^2)-(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})(A_{12}B_{12}+B_{23}B_{13}))F_{i1}=\\ =(A_{12}A_{13}-B_{23}^2)(A_{12}\varphi_{i1}+B_{13}\varphi_{i3})+(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})(A_{12}\varphi_{i2}+B_{23}\varphi_{i3}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -(A_{12}B_{12}+B_{23}B_{13})F_{i1}+(A_{12}A_{13}-B^2{}_{23})F_{i2}=A_{12}\varphi_{i2}+B_{23}\varphi_{i3},\\ -B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}+A_{12}F_{i3}=\varphi_{i3} \quad (i=1,2), \end{cases} \tag{26}$$

первое уравнение которой – искомое скалярное относительно компоненты $F_{i1}(i=1,2)$.

Используя попарную коммутативность операторов (18), (19), преобразуем операторное выражение из левой части первого уравнения (26) следующим образом:

$$\begin{gathered} (A_{12}A_{13}-B_{23}^2)(A_{12}A_{23}-B_{13}^2)-(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})^2=\\ =A_{12}(A_{12}A_{13}A_{23}-A_{13}B_{13}^2-A_{23}B_{23}^2-A_{12}B_{12}^2-2B_{12}B_{13}B_{23}), \end{gathered} \tag{27}$$

а правую часть того же уравнения запишем как

$$\begin{aligned}&A_{12}(A_{12}A_{13}-B_{23}^2)\varphi_{i1}+A_{12}(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})\varphi_{i2}+\\&+(A_{12}B_{12}B_{23}+B_{13}B_{23}^2+A_{12}A_{13}B_{13}-B_{23}^2B_{13})\varphi_{i3}=\\&=A_{12}((A_{12}A_{13}-B_{23}^2)\varphi_{i1}+(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})\varphi_{i2}+(B_{12}B_{23}+A_{13}B_{13})\varphi_{i3}).\end{aligned}\tag{28}$$

Подставив полученные выражения (27) и (28) соответственно в левую и правую части первого, уже скалярного, уравнения системы (26) и "сократив" на «общий операторный множитель»

$$A_{12},\tag{29}$$

после очевидных преобразований приходим к равносильному скалярному уравнению относительно компоненты F_{i1}

$$\begin{aligned}&(A_{23}(A_{12}A_{13}-B_{23}^2)-B_{12}(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})-B_{13}(B_{12}B_{23}+A_{13}B_{13}))F_{i1}=\\&=(A_{12}A_{13}-B_{23}^2)\varphi_{i1}+(A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23})\varphi_{i2}+(B_{12}B_{23}+A_{13}B_{13})\varphi_{i3}.\end{aligned}\tag{30}$$

Нетрудно заметить, что в обеих частях уравнения (30) присутствуют одинаковые операторные выражения. Воспользуемся этим для упрощения дальнейших вычислений. А именно, запишем явный вид нижеследующих операторов на основании формул (18) и (19):

$$\begin{aligned}&A_{12}A_{13}-B_{23}^2=(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)(\partial_1^2+\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_2^2\partial_3^2=\\&=((\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)+\partial_2^2)((\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)+\partial_3^2)=\\&=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)^2+(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\partial_2^2+\partial_2^2)\\&\Updownarrow\\&A_{12}A_{13}-B_{23}^2=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\Delta-\tilde{\partial}_0^2);\\&A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23}=\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)+\partial_1\partial_3\partial_2\partial_3=\\&=\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2+\partial_3^2)\\&\Updownarrow\\&A_{12}B_{12}+B_{13}B_{23}=\partial_1\partial_2(\Delta-\tilde{\partial}_0^2);\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}&B_{12}B_{23}+A_{13}B_{13}=\partial_1\partial_2\partial_2\partial_3+\partial_1\partial_3(\partial_1^2+\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)=\\&=\partial_1\partial_3(\partial_2^2+\partial_1^2+\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)\\&\Updownarrow\end{aligned}\tag{32}$$

$$B_{12}B_{23}+A_{13}B_{13}=\partial_1\partial_3(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)\,.\tag{33}$$

В формулах (31) … (33) Δ – оператор Лапласа, определенный равенством (13).

Тогда, на основании (31) … (33) и (13), (18), (19), уравнение (30) можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned}&((\Delta-\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_1^2\partial_2^2(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_1^2\partial_3^2(\Delta-\tilde{\partial}_0^2))F_{i1}=\\&=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1\partial_2(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_1\partial_3(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i3}\\&\Updownarrow\\&(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)((\Delta-\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_1^2\partial_2^2-\partial_1^2\partial_3^2)F_{i1}=\\&=(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)((\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1\partial_2\varphi_{i2}+\partial_1\partial_3\varphi_{i3}).\end{aligned}$$

После «сокращения» обеих частей последнего уравнения на «общий операторный множитель»

$$\Delta-\tilde{\partial}_0^2\tag{34}$$

И применения несложных операторных преобразований

$$\begin{aligned}&(\Delta-(\partial_1^2+\partial_2^2))(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_1^2\partial_2^2-\partial_1^2\partial_3^2=\\&=\Delta(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)-(\partial_1^4-\tilde{\partial}_0^4)-\partial_1^2(\Delta-\partial_1^2)=-\Delta\tilde{\partial}_0^2+\tilde{\partial}_0^4=\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\end{aligned}\tag{35}$$

запишем окончательный вид искомого скалярного уравнения относительно компоненты F_{i1}:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3}),\tag{36}$$

где известные функции $\varphi_{i1}\,(i=\overline{1,3})$ задаются формулами (8) и (18), а дифференциальные операторы – выражениями (2), (10), (12) и (13).

Таким образом, процесс покоординатной диагонализации единого векторного уравнения (7) в направлении «снизу вверх» завершен.

Следующий этап – покоординатная диагонализация того же уравнения в направлении "сверху вниз" с целью получения оставшихся искомых скалярных уравнений относительно компонент F_{i2} и F_{i3}. Этому процессу и будет посвящен следующий раздел данной статьи.

3. Покоординатная диагонализация единого векторного уравнения (7) в направлении «сверху вниз». Текущая задача сформулирована в конце предыдущего разд. 2. С этой целью перепишем систему (26) с учетом ее первого скалярного уравнения (36):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3});\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-(A_{12}B_{12}+B_{23}B_{13})F_{i1}+(A_{12}A_{23}-B_{23}^2)F_{i2}=A_{12}\varphi_{i2}+B_{23}\varphi_{i3};\\
&-B_{13}F_{i1}-B_{23}F_{i2}+A_{12}E_{i3}=\varphi_{i3}.
\end{aligned}\tag{37}$$

Для простоты дальнейших вычислений воспользуемся в левой части второго уравнения (37) операторными тождествами (33) и (32), а в левой части третьего уравнения (37) – обозначениями (13), (18) и (19), в результате чего последняя система примет вид

$$\begin{cases}
\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3});\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\partial_1\partial_2(-\Delta+\tilde{\partial}_0^2)F_{i1}+(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(-\Delta-\tilde{\partial}_0^2)F_{i2}=A_{12}\varphi_{i2}+B_{23}\varphi_{i3};\\
-\partial_1\partial_3F_{i1}-\partial_2\partial_3F_{i2}+(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)F_{i3}=\varphi_{i3}.
\end{cases}\tag{38}$$

Применив ко второму и первому уравнениям (38) операторы

$$\tilde{\partial}_0^2 \quad \text{и} \quad (-\partial_1\partial_2)\tag{39}$$

соответственно, после почленного сложения обоих преобразованных уравнений приходим к системе, равносильной (38):

$$\begin{cases}
\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3});\\
\tilde{\partial}_0^2(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)(\Delta-\tilde{\partial}_0^2)F_{i2}=(-\partial_1\partial_2(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2))\varphi_{i1}+\\
+(-\partial_1^2\partial_2^2+\tilde{\partial}_0^2A_{12})\varphi_{i2}+(\tilde{\partial}_0^2B_{23}-\partial_1^2\partial_2\partial_3)\varphi_{i3};\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
-\partial_1\partial_3F_{i1}-\partial_2\partial_3F_{i2}+(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)F_{i3}=\varphi_{i3},
\end{cases}\tag{40}$$

второе уравнение которой является искомым скалярным относительно компоненты F_{i2}.

Обращаясь к обозначениям (13), (18) и (19), преобразуем правую часть второго уравнения последней системы так:

$$\begin{aligned}
&\partial_1\partial_2(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)\varphi_{i1}+(\tilde{\partial}_0^2(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)-\partial_1^2\partial_2^2)\varphi_{i2}+\partial_2\partial_3(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)\varphi_{i3}=\\
&=\partial_2(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3})+(-\tilde{\partial}_0^4+\tilde{\partial}_0^2\partial_1^2+\tilde{\partial}_0^2\partial_2^2-\partial_1^2\partial_2^2)\varphi_{i2}=\\
&=\partial_2(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3})+(-\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)+\partial_2^2(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2))\varphi_{i2}=\\
&=(\tilde{\partial}_0^2-\partial_1^2)((\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3})).
\end{aligned}$$

Подставив правую часть полученного тождества в правую часть второго уравнения (40) и « сократив» на «общий операторный множитель»

$$(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2),\tag{41}$$

приходим к окончательному виду второго искомого скалярного уравнения относительно компоненты F_{i2}:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i2}=(\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3}).\tag{42}$$

Подставив (42) в (40), запишем систему, в которой осталось получить только третье, последнее искомое скалярное уравнение относительно компоненты F_{i3}:

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i2}=(\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\partial_1\partial_3F_{i1}-\partial_2\partial_3F_{i2}+(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)F_{i3}=\varphi_{i3}. \end{cases} \tag{43}$$

Применив к первым двум уравнениям (43) операторы

$$\partial_1\partial_3 \quad \text{и} \quad \partial_2\partial_3 \tag{44}$$

соответственно, а к третьему уравнению – оператор

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta), \tag{45}$$

после почленного сложения всех трех преобразованных уравнений конструируем систему, эквивалентную (43):

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i2}=(\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)F_{i3}=\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)\varphi_{i3}+ \\ +\partial_1\partial_3((\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3}))+ \\ +\partial_2\partial_3((\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3}), \end{cases} \tag{46}$$

в которой уже все три уравнения – искомые скалярные.

Преобразовав правую часть третьего уравнения (46) очевидным образом

$$\begin{aligned} &\partial_1\partial_3(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2+\partial_2^2)\varphi_{i1}+\partial_2\partial_3(\partial_1+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+ \\ &+(\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)+\partial_1^2\partial_3^2+\partial_2^2\partial_3^2)\varphi_{i3}= \\ &=(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i2})+(\tilde{\partial}_0^4-\tilde{\partial}_0^2\Delta+\partial_3^2\Delta-\partial_3^4)\varphi_{i3}= \\ &=(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i2})+((\tilde{\partial}_0^4-\partial_3^4)-\Delta(\tilde{\partial}_0^2-\partial_3^2))\varphi_{i3}= \\ &=(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i2})+(\tilde{\partial}_0^2-\partial_3^2)(\tilde{\partial}_0^2+\partial_3^2-\Delta)\varphi_{i3}= \\ &=(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)(-(\tilde{\partial}_0^2-\partial_3^2)\varphi_{i3}+\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i2})), \end{aligned}$$

подставим полученное тождество в правую часть третьего уравнения (46) и после «сокращения» обеих его частей на «общий операторный множитель»

$$(\partial_1^2+\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2) \tag{47}$$

запишем окончательный вариант последнего искомого скалярного уравнения относительно компоненты F_{i3}:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i3}=-(\partial_0^2-\tilde{\partial}_3^2)\varphi_{i3}+\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i2}). \tag{48}$$

Подставив (48) в (46), получим искомую систему скалярных уравнений относительно компонент $\{F_i\}_{i=1}^3$ вектор функции $\vec{F}_i\,(i=1,2)$ из (8):

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i1}=(\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i1}+\partial_1(\partial_2\varphi_{i2}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i2}=(\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i2}+\partial_2(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_3\varphi_{i3}); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i3}=(\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i3}+\partial_3(\partial_1\varphi_{i1}+\partial_2\varphi_{i1}). \end{cases} \tag{49}$$

Очевидно, что система (49) может быть представлена единообразно:

$$\tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2-\Delta)F_{i\kappa}=(\partial_\kappa^2-\tilde{\partial}_0^2)\varphi_{i\kappa}+\partial_\kappa(\partial_\nu\varphi_{i\nu}+\partial_l\varphi_{il}),\ \nu\neq l,\ \kappa\neq\nu,\ \kappa\neq l\ (\kappa,\nu,l=\overline{1,3};\ i=\overline{1,2}). \tag{50}$$

В (50) $\varphi_{i\kappa}\,(\kappa=\overline{1,3};\ i=\overline{1,2})$, $\quad F_{i\kappa}\,(\kappa=\overline{1,3};\ i=\overline{1,2})$ задается формулами (8).

Таким образом, процесс покоординатной диагонализации единого векторного уравнения (7) полностью завершен. Осталось проанализировать только явный вид правых частей (50) – $\vec{\varphi}_1$ для $\vec{F}_1 = \vec{E}$ и $\vec{\varphi}_2$ для $\vec{F}_2 = \vec{E}$.

Обращаясь в обозначениям (2), (8) и (16), на основании (49) запишем искомую систему скалярных уравнений для компонент вектор-функции $\vec{E}$:

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)E_1 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_3 e_2^{\text{ст}} - \partial_2 e_3^{\text{ст}}) + (r + \mu_a \partial_0^*)((\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_1^{\text{ст}} + \partial_1(\partial_2 j_2^{\text{ст}} + \partial_3 j_3^{\text{ст}})), \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)E_2 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_1 e_3^{\text{ст}} - \partial_3 e_1^{\text{ст}}) + (r + \mu_a \partial_0^*)((\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_2^{\text{ст}} + \partial_2(\partial_1 j_1^{\text{ст}} + \partial_3 j_3^{\text{ст}})), \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)E_3 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_2 e_1^{\text{ст}} - \partial_1 e_2^{\text{ст}}) + (r + \mu_a \partial_0^*)((\partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2) j_3^{\text{ст}} + \partial_3(\partial_1 j_1^{\text{ст}} + \partial_2 j_2^{\text{ст}})). \end{cases} \tag{51}$$

Учитывая структуру правой части единого векторного уравнения (7), отраженную в формулах (8), на основании (2) и (51), приходим к искомой системе скалярных уравнений для компонент вектор-функции $\vec{H}$

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)H_1 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_2 j_3^{\text{ст}} - \partial_3 j_2^{\text{ст}}) + (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)((\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2) e_1^{\text{ст}} + \partial_1(\partial_2 e_2^{\text{ст}} + \partial_3 e_3^{\text{ст}})); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)H_2 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_3 j_1^{\text{ст}} - \partial_1 j_3^{\text{ст}}) + (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)((\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2) e_2^{\text{ст}} + \partial_2(\partial_1 e_1^{\text{ст}} + \partial_3 e_3^{\text{ст}})); \\ \tilde{\partial}_0^2(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta)H_3 = \tilde{\partial}_0^2(\partial_1 j_2^{\text{ст}} - \partial_2 j_1^{\text{ст}}) + (\sigma + \varepsilon_a \partial_0^*)((\partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2) e_3^{\text{ст}} + \partial_3(\partial_1 e_1^{\text{ст}} + \partial_2 e_2^{\text{ст}})), \end{cases} \tag{52}$$

которая непосредственно может быть получена по принципу дуальности из (51) заменой $E_\text{к}$ на $H_\text{к}$ $(\text{к} = \overline{1,3})$, $e_\text{к}^{\text{ст}}$ на $j_\text{к}^{\text{ст}}$ $(\text{к} = \overline{1,3})$ и наоборот, а также переобозначением оператора D на C согласно (2). При этом в (52) знак перед оператором А из (2) просто меняется на противоположный.

Системы (51) и (52) являются искомыми, процесс диагонализации (1) полностью завершен и цель работы достигнута.

Проверка полученных итоговых результатов (51) и (52) была произведена и подтверждена согласно работе [8]. Однако из-за отсутствия этапа блочной диагонализации в методе работы [8] получение результатов по этому методу было сопряжено с бóльшими трудностями, чем результатов по методу данной работы.

В заключение отметим следующее.

Прежде всего следует подчеркнуть, что всюду «умножение» операторов понимается как их последовательное применение в направлении «справа налево», от «внутреннего к внешнему».

Кроме того, порядки искомых скалярных уравнений, заключающих процедуру диагонализации на каждом этапе, как на блочном, так и на покоординатном, существенно понижались после “сокращения” обеих частей уравнений на соответствующие, так называемые “общие операторные множители”, – D на блочном уровне и (34), (41) и (47) – на покоординатном. После проделанной операции получалось уравнение, равносильное предыдущему, поскольку этот, на первый взгляд формальный, прием полностью согласован с математическим аппаратом предложенного процесса диагонализации, а именно, когда к обеим частям соответствующего уравнения применялся один и тот же оператор из фигурирующих в исходных матрицах (1) либо (20), а преобразованное уравнение складывалось почленно с другим, то новая система, эквивалентная предыдущей, содержала уравнение, полученное в результате почленного сложения, а также первоначальное уравнение без вышепримененного к нему оператора. Иными словами, описанный в данной статье метод является операторным аналогом решения систем алгебраических уравнений.

Здесь в очередной раз необходимо подчеркнуть применимость предложенного метода диагонализации как на блочном, так и на координатном уровне получения соответствующих скалярных уравнений, т.е. рассмотренная процедура инвариантна относительно структуры матрицы исходной системы. Единственным требованием здесь является попарная коммутативность матричных элементов, что в случае классических дифференциальных операторов в частных производных над пространством (x, y, z, t) всегда выполнимо.

Литература

1. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. – М.: ИЛ, 1956. – 403 с.
2. *Микусинский Я.* Операторное исчисления. – М.: ИЛ, 1956. – 336 с.
3. *Комеч А.М.* Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, фундаментальные направления. – М.: Наука, 1988. – Т. 31. – С. 127-261.

4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух при произвольном возбуждении электромагнитного поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 2. – С. 2-7.
6. *Иваницкий А.М.* Свойства дифференциальных операторов многомерных электрических цепей // Информатика и связь: Сб. научных трудов УГАС им. А.С. Попова. – Одесса, 1998. – С. 37-41.
7. *Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю, Рожновский М.В.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 1. – С. 37-47.
8. *Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю., Рожновский М.В.* Сведение «полной» системы дифференциальных уравнений Максвелла к шести скалярным уравнениям относительно компонент вектор-функции $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^{6}$ // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – № 2. – С. 48-60.
9. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – № 3. – С. 29-35.
10. *Иваницкий А*.М. Экспофункциональные поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. – № 1. – С. 18-21.
11. *Иваницкий А.М.* Матрицы в векторном анализе // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2002. – № 1. – С. 19-25.