

## ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ РАМОЧНОЙ АНТЕННЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

### WAVE IMPEDANCE OF LOOP ANTENNA OF ELLIPTIC FORM

**Аннотация.** Представлен метод вычисления и получены интегральные математические выражения для волнового сопротивления эллиптической рамочной антенны. Выведена инженерная формула для расчета волнового сопротивления круглого рамочного излучателя. Проведен анализ волнового сопротивления антенны при изменении ее геометрических параметров.

**Summary.** Calculation method and integral mathematical equations of wave impedance of elliptic loop antenna are submitted. Engineering equation for wave impedance calculation of round loop radiator is obtained. The analysis of wave impedance of loop antenna at change its geometrical parameters is conducted.

Широкое развитие современных систем и средств цифровой радиосвязи, в том числе устанавливаемых на подвижных объектах, приводит к проблеме создания новых антенн, которые обладали бы достаточной широкополосностью и малыми габаритными размерами. При этом разработка таких антенн является нетривиальной задачей, трудность которой состоит в сложном характере изменения с частотой входного сопротивления антенны.

Одним из путей уменьшения пределов изменения входного сопротивления проволочной антенны является формирование в ней «бегущей» волны тока [1], которая, в свою очередь, характеризуется волновым сопротивлением антенны.

Однако известные выражения для волнового сопротивления проволочных антенн [2, 3], однородной или неоднородной двухпроводной линии [2] в полной мере не могут быть использованы для расчета волнового сопротивления рамочного излучателя произвольной формы, тем более для построения эквивалентной схемы и конструктивного синтеза широкополосной малогабаритной антенны на его основе.

Таким образом, цель исследований, результаты которых представлены в данной статье, состоит в построении математической модели и анализе волнового сопротивления различных модификаций эллиптической рамочной антенны для разработки на ее основе эквивалентной схемы антенны, учитывающей широкополосный режим возбуждения.

Для расчета волнового сопротивления рамочного излучателя воспользуемся методом, изложенным в работе [4] и применимым для проволочных антенн. Согласно этому методу, волновое сопротивление определяется отношением составляющих электромагнитного поля, формируемых антенной в ближней зоне, которые для тонкопроволочных малогабаритных антенн, в основном, характеризуются Т-волной. Тогда волновое сопротивление можно определить как

$$W_A = \sqrt{L_{\Pi} / C_{\Pi}}, \quad (1)$$

где  $L_{\Pi}$ ,  $C_{\Pi}$  – погонная индуктивность и погонная емкость соответственно, связанные с диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостью среды соотношением

$$\sqrt{L_{\Pi} C_{\Pi}} = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$W_A = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{C_{\Pi}} = \frac{L_{\Pi}}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (3)$$

В соответствии с (3), для определения волнового сопротивления достаточно вычислить погонную емкость, которая определяется из электростатической емкости  $C_{СТ}$  системы проводников в виде  $C_{СТ} = C_{\Pi} / l$ , где  $l$  – длина проводника.

Для дальнейшего анализа представим исследуемую рамку в виде двух идентичных дугообразных проводников 1 и 2 (рис. 1).

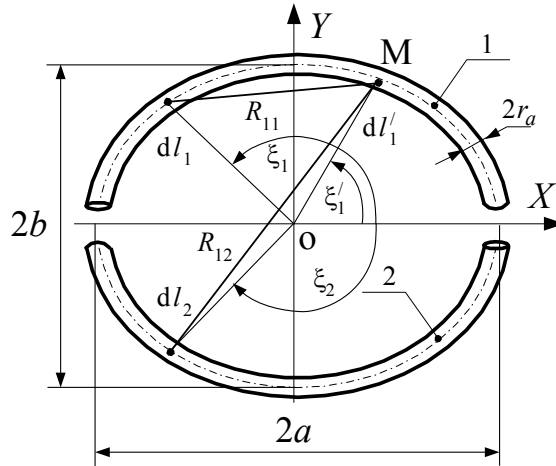


Рисунок 1 – Рамочная антенна эллиптической формы

Известно (см., например, [5]), что у системы проводников их заряды  $Q_i$  и потенциалы  $\Psi_i$  связаны между собой:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2; \\ \Psi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $P_{ij}$  – потенциальные коэффициенты, равные каждому потенциалу, создаваемому положительным единичным зарядом  $i$ -провода на  $j$ -проводе.

Численные значения потенциальных коэффициентов  $P_{ij}$  определяются по методу среднего потенциала, согласно которому линейная плотность заряда по длине проводника принимается постоянной. Потенциал на поверхности провода определяется нитевым зарядом и усредняется по длине проводника [4].

В случае анализируемого рамочного излучателя, состоящего из двух идентичных проводников, собственные потенциальные коэффициенты  $P_{11}$  и  $P_{22}$  будут равны; кроме того, влияние заряда проводника 1 на заряд проводника 2 будет аналогичным влиянию заряда проводника 2 на заряд проводника 1, т.е.  $P_{12} = P_{21}$ .

Так как к проводникам приложены разнополярные потенциалы, равные по абсолютному значению ( $\Psi_1 = -\Psi_2$  и  $|\Psi_1| = |\Psi_2|$ ), то они создают на проводниках такие же заряды ( $Q_1 = -Q_2$  и  $|Q_1| = |Q_2|$ ). Как следствие, система (4) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= P_{11}Q_1 - P_{12}Q_2; \\ \Psi_2 &= P_{12}Q_1 - P_{11}Q_2. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует, что электростатическая емкость

$$C_{\text{ст}} = \frac{Q_1}{\Psi_1 - \Psi_2} = \frac{Q_1}{2\Psi_1} = \frac{1}{2(P_{11} - P_{12})}$$

и, следовательно,

$$W_A = 2l(P_{11} - P_{12})\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (5)$$

Для вычисления собственного потенциального коэффициента  $P_{11}$  рассмотрим один из дугообразных проводников длиной  $l_1$ . Выделим на оси проводника элемент  $dl_1$  и определим потенциал в точке  $M(dl_1')$ , лежащей на поверхности этого проводника (см. рис. 1). Перейдя к полному потенциалу всего заряда, а также усредняя его по длине проводника, получаем выражение для определения собственного потенциального коэффициента

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{l_1^2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_1} \frac{dl_1 dl_1'}{R_{11}}, \quad (6)$$

где  $R_{11}$  – расстояние между точкой расположения элемента  $dl_1$  и точкой наблюдения  $M(dl_1')$ , которые находятся на проводнике 1.

Для вычисления взаимного потенциального коэффициента  $P_{12}$  выделим на оси проводника 2 элемент  $dl_2$  и определим потенциал в точке  $M(dl_1')$ , лежащей на поверхности проводника 1 (см. рис. 1), создаваемый зарядом этого элемента. Перейдем к полному потенциалу и также усредним его по длине проводника 1, получим выражение для определения взаимного потенциального коэффициента

$$P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \frac{dl_2 dl_1'}{R_{12}}, \quad (7)$$

где  $R_{12}$  – расстояние между точкой расположения элемента  $dl_2$ , находящейся на проводнике 2, и точкой наблюдения  $M(dl_1')$ , которая находится на проводнике 1.

Рассмотрим задачу определения волнового сопротивления эллиптического рамочного излучателя, выполненного из двух однородных цилиндрических проводников длиной  $l$  и радиусом  $r_a$ . Геометрическая конфигурация такого излучателя изображена на рис. 1. Здесь же приведены используемые геометрические параметры эллиптического рамочного излучателя, поясняющие процедуру вычисления его волнового сопротивления.

Для решения поставленной задачи необходимо вывести параметрические уравнения, описывающие геометрическую конфигурацию эллиптической рамки в декартовой системе координат, определяющих местоположение элементов  $dl_1$ ,  $dl_2$  и точки наблюдения  $M(dl_1')$ . Воспользуемся уравнениями эллипса в параметрическом виде, которые, согласно рис. 1, соответственно для проводника 1 и проводника 2 можно записать как

$$x_1(\xi) = a \cos \xi, \quad y_1(\xi) = b \sin \xi; \quad (8)$$

$$x_2(\xi) = a \cos \xi, \quad y_2(\xi) = -b \sin \xi, \quad (9)$$

где  $\xi$  – параметрический угол, отсчитываемый от оси  $OX$  и изменяющийся от 0 до  $\pi$ ;  $a, b$  – полуоси эллипса (в данном случае  $b < a$ ).

Тогда, на основании (8) и (9), можем записать уравнение для элемента  $dl$  эллиптического проводника рамки

$$dl(\xi) = \sqrt{dx^2(\xi) + dy^2(\xi)}, \quad (10)$$

где  $dx(\xi) = -a \sin \xi d\xi$ ,  $dy(\xi) = b \cos \xi d\xi$ .

Произведя ряд преобразований, получим

$$dl(\xi) = a \sqrt{1 - [1 - (b/a)^2] \cos^2 \xi} d\xi. \quad (11)$$

Если воспользоваться определением эксцентриситета эллипса, равного  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ , (11) можем переписать в виде

$$dl(\xi) = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \xi} d\xi. \quad (12)$$

Зная элемент  $dl(\xi)$ , можно записать также выражение для текущей длины проводника:

$$l(\xi) = a \int_0^{\xi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \xi} d\xi. \quad (13)$$

При  $l(\xi = \pi) = l$  получаем полную длину проводника эллиптической рамки.

На основании представленных выражений (8) и (9) также определим расстояния между точками расположения элементов  $dl_1$ ,  $dl_2$  и точкой наблюдения  $M(dl_1')$  (см. рис. 1)

$$R_{11} = \sqrt{(x_1(\xi) - x_1(\xi'))^2 + (y_1(\xi) - y_1(\xi'))^2 + r_a^2}; \quad (14)$$

$$R_{12} = \sqrt{(x_2(\xi) - x_1(\xi'))^2 + (y_2(\xi) - y_1(\xi'))^2 + r_a^2}, \quad (15)$$

где  $\xi$  – параметрический угол, определяющий местоположение элементов  $dl_1, dl_2$  соответственно на оси проводника 1 или 2;  $\xi'$  – параметрический угол, определяющий местоположение точки наблюдения  $M(dl'_1)$ , находящейся на поверхности проводника 1.

Аналогичным образом можно описать геометрическую конфигурацию рамочного излучателя в виде эллипса, но “сжатого” вдоль другой оси (ось  $OX$ ). При этом в (8)...(10) необходимо произвести замену переменных  $a \rightarrow b$  и  $b \rightarrow a$ , а в формулах (11)...(13) заменить функцию  $\cos \xi \rightarrow \sin \xi$ .

Особый интерес представляет случай круглой рамки ( $b = a$ ), для которой выражения (6) и (7) можно преобразовать к виду

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\xi_1 d\xi'_1}{R_{11}}, \quad (16)$$

где  $R_{11} = \sqrt{a^2(\xi_1 - \xi'_1)^2 + r_a^2}$ ;

$$P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\pi-\xi'_2} \frac{d\xi_2}{R_{12}} + \int_0^{\xi'_2} \frac{d\xi_2}{R_{12}} \right\} d\xi''_2, \quad (17)$$

где  $R_{12} = \sqrt{4a^2 - 4a^2 \sin^2(0,5\xi_2)} = 2a \cos(0,5\xi_2)$ .

Преобразуем интеграл в (16). Произведя замену переменных  $x = \xi_1 - \xi'_1$  и изменив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\xi_1}{\sqrt{a^2(\xi_1 - \xi'_1)^2 + r_a^2}} &= \frac{1}{a} \int_{-\xi'_1}^{\pi-\xi'_1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_a^2/a^2}} = \\ &= \frac{1}{a} \left\{ \text{Arsh} \left[ \frac{a}{r_a} (\pi - \xi'_1) \right] + \text{Arsh} \left[ \frac{a}{r_a} (\xi'_1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично произведем второе интегрирование, соответственно изменив переменные на  $y = \frac{a}{r_a} (\pi - \xi'_1)$  и  $y = \frac{a}{r_a} (\xi'_1)$ . Тогда

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{1}{a} \left[ \text{Arsh} \left[ \frac{a}{r_a} (\pi - \xi''_1) \right] + \text{Arsh} \left[ \frac{a}{r_a} (\xi''_1) \right] \right] \right\} d\xi''_1 = \frac{2r_a}{a^2} \int_0^{\pi a/r_a} \text{Arsh}(y) dy,$$

где  $\int \text{Arsh}(y) dy = \int \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = y \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) - \sqrt{y^2 + 1}$ .

Таким образом, подставив вычисленные значения интегралов в (16), получим

$$P_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi a} \left\{ \ln \left[ \frac{\pi a}{r_a} + \sqrt{\left(\frac{\pi a}{r_a}\right)^2 + 1} \right] - \sqrt{\left(\frac{r_a}{\pi a}\right)^2 + 1} + \frac{r_a}{\pi a} \right\}. \quad (18)$$

Интегрирование в (17) проведем с помощью замены переменных  $z = 0,5\xi_2$ . Тогда

$$\int_0^{\pi-\xi'_2} \frac{d\xi_2}{2a \cos(0,5\xi_2)} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi-\xi'_2}{2}} \frac{dz}{\cos z} = \frac{1}{a} \ln \left| \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi-\xi'_2}{4} \right) \right|.$$

Аналогично

$$\int_0^{\xi'_2} \frac{d\xi_2}{2a \cos(0,5\xi_2)} = \frac{1}{a} \ln \left| \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\xi'_2}{4} \right) \right|.$$

Второе интегрирование по  $\xi'_2$  также проведем с помощью замены переменных соответственно на  $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi-\xi'_2}{4}$  и  $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\xi'_2}{4}$ . Получим:

$$\frac{1}{a} \int_0^{\pi} \left\{ \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi - \xi'_2}{4} \right) \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\xi'_2}{4} \right) \right| \right\} d\xi'_2 = \frac{2}{a} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg} t) dt,$$

где  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg} t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg} t) dt - \int_0^{\pi/4} \ln(\operatorname{tg} t) dt = G$ ;  $G = 0,916$  – постоянная Каталана [6].

Подставив численные значения интегралов в (17), получим

$$P_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{8G}{a\pi^2}. \quad (19)$$

И тогда общее выражение для вычисления волнового сопротивления  $W_A$  круглой рамки радиуса  $a$ , выполненной из проводника радиусом  $r_a$  можно представить в виде

$$W_A = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \ln \left( \frac{\pi a}{r_a} + \sqrt{\left( \frac{\pi a}{r_a} \right)^2 + 1} \right) - \sqrt{\left( \frac{r_a}{\pi a} \right)^2 + 1} + \frac{r_a}{\pi a} - \frac{4G}{\pi} \right\}. \quad (20)$$

Практический интерес представляет случай тонкой круглой рамки, когда  $(\pi a)/r_a \gg 1$ , что реально выполняется для исследуемых излучающих систем. При этом (20) можно упростить:

$$W_A = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ \ln \left( \frac{2\pi a}{r_a} \right) - \left( 1 + \frac{4G}{\pi} \right) \right\}, \quad (21)$$

и для свободного пространства записать в виде

$$W_A = 120 \left\{ \ln \left( \frac{6,28a}{r_a} \right) - 2,17 \right\}.$$

На рис. 2 изображены зависимости волнового сопротивления рамочной антенны эллиптической формы от отношения полуосей эллипса  $b/a$ , от соотношения длины излучающего проводника к его радиусу  $l/r_a$ , а также от положения эллипса в декартовой системе координат. Цифрами на этом рисунке обозначены зависимости волнового сопротивления соответственно для случаев: 1 –  $l/r_a = 200\pi$ ; 2 –  $l/r_a = 100\pi$ ; 3 –  $l/r_a = 50\pi$ . Из рис. 2 достаточно наглядно видно, как изменяется волновое сопротивление эллиптической рамочной антенны от ее геометрических параметров и каковы пределы этого изменения.

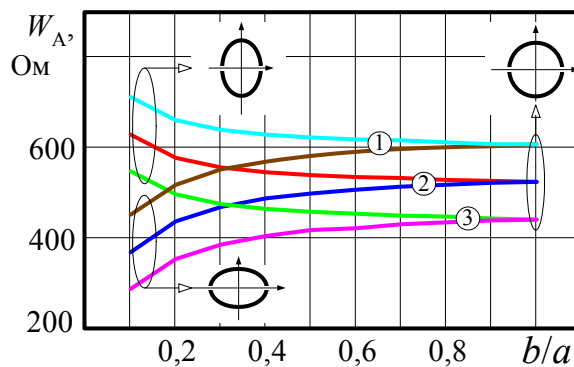


Рисунок 2 – Волновое сопротивление рамочного излучателя эллиптической формы

Таким образом, согласно проведенным исследованиям можно сделать следующие выводы:

- на основе решения электростатической задачи получены интегральные математические соотношения для расчета и анализа волнового сопротивления рамочного излучателя эллиптической формы;
- осуществлено преобразование интегральных соотношений к замкнутому виду, что позволило получить инженерную формулу для расчета волнового сопротивления круглого рамочного излучателя;

– проведены расчет и анализ волнового сопротивления рамочного излучателя двух модификаций («сжатие» эллипса вдоль оси  $OY$  и вдоль оси  $OX$ ), на основании которых показаны характер и пределы изменения волнового сопротивления антенны.

Полученные результаты являются основополагающими для дальнейших исследований и будут использованы при построении широкополосной эквивалентной схемы рамочного излучателя, а также при разработке метода конструктивного синтеза широкополосной малогабаритной антенны.

### **Литература**

1. *Проценко М.Б., Громоздин В.В.* Широкодиапазонная малогабаритная антенна с повышенной направленностью излучения // Радиотехника: Всеукр. Межвед. науч.-техн. сб. – Харьков, – 2002. – Вып. 125. – С. 8–12.
2. *Коротковолновые антенны / Г.З. Айзенберг, С.П. Белоусов, Э.М. Журбенко, Г.А. Клигер, А.Г. Курашов /* Под ред. Г.З. Айзенберга. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1985. – 536 с.
3. *Проценко М.Б., Посный О.А., Ивашина М.В.* Анализ волнового сопротивления кольцевых антенн // Вестник СевГТУ. Вып. 10: Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр./ Севастоп. гос. тех. ун-т. – Севастополь, 1998. – С. 116-120.
4. *Фрадин А.З.* Антенно-фидерные устройства: Учеб. пособие для вузов связи. – М.: Связь, 1997. – 440 с.
5. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.