УДК 621.372.4

Арбузников В.А., Палагин А.И., Рудый Е.М.
Arbyznikov V.A., Palagin A.I., Ryduy E.M.

БАЗОВЫЙ НАБОР НЕСТАЦИОНАРНЫХ 2х2-ПОЛЮСНИКОВ-АФФИНОРОВ

BASIC TIME-VARYING TWO-PORT-AFFINORS

Аннотация. Предложен базовый набор линейных нестационарных четырехполюсников-аффиноров для моделирования информационных структур.

Summary. Basic approaches of linear time-varying two-ports-affinors for modeling of information structures are presented.

Теория четырехполюсника, тем более проходного 2х2-полюсника, является важным разделом в теории цепей. Оперируя с характеристиками элементов, теория цепей использует понятие "точка"; множество точек образуют характеристику (например, двухполюсника). Используются понятия векторы воздействий и откликов при описании стационарных режимов.

Точечно-векторное множество образует аффинное пространство. Это пространство *лишено метрики*, т.е. способа измерения длин и углов. Подобно векторным пространствам, все аффинные пространства одной и той же размерности "устроены одинаково". Теория нестационарных четырехполюсников использует частично достижения теории инвариантных во времени четырехполюсников. При учете информационных особенностей в эту теорию следует вводить соответствующую метрику. Тогда аффинное пространство станет вполне идентичным *обычному пространству* [1].

Аффинное преобразование в теории четырехполюсника. Аффинное пространство называется n-мерным, если n-мерно соответствующее ему векторное пространство $\boldsymbol{R}$. Т.о. аффинное пространство $\boldsymbol{A}$ - это множество элементов двух родов: точек и векторов, связь между которыми задается с помощью операции откладывания векторов. Единственной характеристикой аффинного пространства является его размерность. Поэтому k-мерное аффинное пространство обозначается просто через $\boldsymbol{A}^k$. Пара алгебраических уравнений, описывающих четырехполюсник, по линейной алгебре является аффинным преобразованием на плоскости. Для аффинного преобразования оригинала на плоскости с координатами $\boldsymbol{Z}_2$ (x_2 , y_2) в изображение с координатами $\boldsymbol{Z}_1$ (x_1 , y_1) запишем в матричной форме (1):

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{C}. \tag{1}$$

Матрица центрального аффинного преобразования $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющая условию $det\,\boldsymbol{A} \neq 0$, является матрицей перемещения векторных координат.

Двухстороннее аффинное преобразование на плоскости от координат $(0; x_2 , y_2)$ в координаты $(0^*; x_1 , y_1)$ изображается $(0; x_2 , y_2) \longleftrightarrow (0^*; x_1 , y_1)$.

Если $det\,\boldsymbol{A} > 0$, преобразование *правильное*, не изменяющее ориентацию преобразованной геометрической конфигурации. В случае же $det\,\boldsymbol{A} < 0$ преобразование *неправильное*, так как ориентации оригинала и изображения преобразованной планарной конфигурации противоположны.

Многополюсники любой природы, описываемые линейным аффинным преобразованием, называются общим термином *аффинорами (affinors)* [2]. Линейные стационарные многополюсники чаще оперируют с комплексными амплитудами; нестационарные аффиноры оперируют с мгновенными значениями ("точками") воз действий и откликов.

Пусть имеется резистивный аффинор; в *u-i* базисе переменные представлены известным образом (1). При применении правил аффинного преобразования к электрическим цепям следует иметь ввиду размерности входящих в соотношения величин. Элементы цепочечной матрицы $\boldsymbol{A}$ имеют физические размерности:

$$a_{11}[\text{-}],\ a_{12}[\text{Ом}],\ a_{21}[\text{Сим}],\ a_{22}[\text{-}].$$

Двухстороннее аффинное преобразование запишется

$$(0; u_2 , -i_2) \longleftrightarrow (0^*; u_1 , i_1).$$

При описании алгебраических четырехполюсников с емкостными, индуктивными и мемристорными свойствами используются заряды q и магнитные потоки Φ. Если их преобразовать в *u-i* базис, появятся операторы дифференцирования p и интегрирования p^{-1} по времени:

$$u = d\Phi/dt = p\Phi\ ,\ \Phi = \int u\,dt = p^{-1}u\ ,\ u = dq/dt = pq\ ,\ q = \int i\,dt = p^{-1}i\ . \tag{2}$$

Для аффиноров-четырехполюсников двустороннее аффинное преобразование в случае перехода от одной плоскости к другой, используя общий базис, представлено в следующем виде

$$(0; p^c u_2 , p^d(-i_2)) \longleftrightarrow (0^*; p^a u_1 , p^b i_1),$$

где показатели a, b, c, d принимают значения (-1, 0).

Матричное уравнение, соответствующее этому преобразованию, запишется:

$$\begin{bmatrix} p^a u_1 \\ p^b i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^c u_2 \\ -p^d i_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

***C*-аффинор** (*const-affinors*) – четырехполюсник с постоянными во времени параметрами - описывается матричным уравнением в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} p^{c-a} & A_{12} p^{d-a} \\ A_{21} p^{c-b} & A_{22} p^{d-b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Размерность коэффициентов здесь A_{11} [$c^{\Sigma 11}$], A_{12} [Ом $c^{\Sigma 12}$], A_{21} [Сим $c^{\Sigma 21}$], A_{22} [$c^{\Sigma 22}$], где $\Sigma_{11} = c-a$; $\Sigma_{12} = d-a$; $\Sigma_{21} = c-b$; $\Sigma_{22} = d-b$.

***T*-аффиноры** (*time-affinors*) - четырехполюсники с переменными во времени параметрами - описываются соотношением (5):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{-a} \alpha_{11}(t) p^c & p^{-a} \alpha_{12}(t) p^d \\ p^{-b} \alpha_{21}(t) p^c & p^{-b} \alpha_{22}(t) p^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Размерность коэффициентов в ***A***-матрице в (5) такая же, как и в случае соотношения (4) с учетом особенностей оператора p.

В цепях с переменными параметрами вместо ($-a$, $-b$), (c, d) используем ($h1$, $n1$) и ($h2$, $n2$). В окончательном виде соотношения для нестационарного аффинора-четырехполюсника примут вид (6):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{h1} \alpha_{11}(t) p^{h2} & p^{h1} \alpha_{12}(t) p^{n2} \\ p^{n1} \alpha_{21}(t) p^{h2} & p^{n1} \alpha_{22}(t) p^{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

причем аффинное преобразование формально представлено:

$$(0;\ p^{h2} u_2\ ,\ p^{n2}(-i_2)\ ) \longleftrightarrow (0^*;\ p^{-h1} u_1\ ,\ p^{-n1} i_1\ ).$$

Базовый набор *t*-аффиноров. Введем понятие главный (базовый) набор аффиноров и синтетические аффиноры. Для базового набора показатели оператора p по модулю не превышают 1. Для синтетических аффиноров-четырехполюсников показатели оператора p принимают целые значения, которые по модулю больше 1.

Стационарные четырехполюсники характеризуют парой показателей (a, b): a_1 , $b_1 \longleftrightarrow a_2$, b_2 . Нестационарные четырехполюсники целесообразно характеризовать парой решеток показателей: ($-h_1$, $-n_1$) $\longleftrightarrow$ (h_2 , n_2). Четыре основные комбинации характеризуются показателями (n , h), принимающими значения (-1, 0). Используя принцип "каждое с каждым", получим полный набор вариантов преобразования. Этот базовый набор алгебраических преобразователей содержит (забегая вперед) 16 вариантов.

Классификация *t*-аффиноров-четырехполюсников. Важным классом в теории электрических цепей являются линейные нестационарные четырехполюсники (проходные четырехполюсники), характеризуемые попарно равными и противоположными мгновенными значениями токов или зарядов [3, 4].

Четырехполюсники классифицируют по разным признакам. Основные общепринятые классификации [5]: по энергетическому признаку четырехполюсники подразделяются на автономные и неавтономные, активные и пассивные, по принципу обратимости они бывают обратимые (взаимные) и необратимые (невзаимные); по различным топологическим признакам различают симметричные и несимметричные четырехполюсники, структурно-симметричные (относительно поперечной оси) и структурно-несимметричные, уравновешенные и неуравновешенные и т. п.

В теории стационарных цепей многие ученые изучали особенности стационарных многополюсников, такие как разрешимость, пассивность, отсутствие потерь и пр. Опорной работой являлась монография [6]; при этом сигналы $u \in D_+$, $i \in D_+$. Для характеристики общих свойств линейных нестационарных цепей некоторые исследователи также ввели обобщение – изменяющийся параметр $f(t) \in D_+$.

Были попытки построить общую теорию параметрических цепей, но авторы тратили большую часть усилий либо на преодоление математических трудностей, либо на конкретные приложения; нет системности и полноты [7, 8].

Мутанты и синтетические четырехполюсники. Обозначим h показатели на входе и выходе (h_1 или h_2) и n соответственно (n_1 или n_2). Эти показатели – целое число со знаком или 0. В общем случае они характеризуют *четырехполюсник-мутант*.

Если $|h| < 2$ и $|n| < 2$, то четырехполюсник называется *мутантом*; если $|h| > 1$ или $|n| > 1$, то четырехполюсник называется *синтетическим*.

Среди четырехполюсников-мутантов имеются важные классы однотипных четырехполюсников (например, нестационарный емкостный трансформатор), инверторы и конверторы, мутаторы, подразделяемые на *i*- и *k*-мутаторы и т.п. Аналогичные типы можно рассматривать и среди синтетических четырехполюсников.

Нестационарные четырехполюсники здесь изучаются с несколько иных позиций, чем это принято, а именно с позиций преобразования информации. Так как они характеризуются временной зависимостью коэффициентов $a_{ij} \to f(t)$, то начинать исследования целесообразно не для обобщенных функций, а для дифференцируемых функций и имеющих обратные функции; такие функции образуют пространство $D_+^{\,+} : a_{ij} \to f(t)$, $f \in D_+^{\,+}$, $i = 1, 2,\ j = 1, 2$.

Базовый набор *t*-аффиноров-мутантов. Для определений нестационарных четырехполюсников используем их алгебраическое представление, т.е. в определении должен отсутствовать оператор $p = d/dt$. *Базовый набор* нестационарных четырехполюсников образуется из четырех параметров: одного частотно-независимого резистивного *r* и трех частотно-зависимых параметров *l, c* и *m* (индуктивного, емкостного и мемристорного).

Теорема. Базовый набор *t*-аффиноров содержит 16 вариантов: 4 однотипных четырехполюсника и 12 мутантов. В стационарном случае набор превращается в 9 вариантов *C*-аффиноров.

Доказательство. В табл. 1,*а* представлены четырехполюсники-мутанты: даны обозначения и определения нестационарных 2x2-полюсников с помощью цепочечных алгебраических *A*-матриц. Коэффициенты матрицы, зависящие от времени, обозначены строчным курсивом. (Инвариантные во времени коэффициенты будем обозначать прописными буквами.) Пусть все переменные во времени коэффициенты принадлежат пространству $D_+^{\,+}$. Это важнейший случай для практики, так как позволит сосредоточиться на структурных свойствах мутантов. Для четырех однотипных схем аффинное преобразование осуществляется в одной плоскости (диагональные матрицы), для 12 вариантов мутантов – в разных плоскостях.

Преобразуем цепочечные *A*-матрицы в общий базис, например в *u-i*. Полученное представление схемы называется иммитансным; результаты даны в табл. 1,*б*. Эта таблица является центральной при анализе. Основные свойства определяются показателями *h* и *n* у операторов *p*. Наличие оператора *p* определяет информационные и усилительные возможности схемы.

Из таблицы следует, что получено 16 вариантов в базовом наборе нестационарных четырехполюсников.

Как уже говорилось, в стационарном случае 16 схем преобразуются в 9.

Общее соотношение (6) для табл. 1,*б* принимает вид (7)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{h_{0,1}}\alpha_{11}(t)p^{h_{-1,0}} & p^{h_{0,1}}\alpha_{12}(t)p^{n_{-1,0}} \\ p^{n_{0,1}}\alpha_{21}(t)p^{h_{-1,0}} & p^{n_{0,1}}\alpha_{22}(t)p^{n_{-1,0}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где показатели $h_1 = h_{0,1}$, $n_1 = n_{0,1}$, $h_2 = h_{-1,0}$, $n_1 = n_{-1,0}$ принимают одно из двух значений: h_1, $n_1 \in \{0,1\}$; h_2 , $n_2 \in \{-1,0\}$.

Заключение. Имеется базовый набор из шестнадцати *rlcm* – нестационарных 2x2-полюсников-аффиноров.

Литература

1. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985. – 395 с.
2. *Kouřil F*., *Vrba K*. Non-linear and parametric circuits. Principles, theory and applications. – Chichester: N.Y. – Ellis Horwood, John Wiley & Sons, 1988. – 413 p.
3. *Величко Ю.Т.* Прохідні чотириполюсники.– К.: Держ. видав. техніч. літ УРСР, 1958. – 410 с.
4. *Величко Ю.Т.* Теоретичні основи радіотехнічних мереж. Ч. 1. – Львів: Вид. Льв. ун., 1966.– 340 с.
5. *Зелях Э.В.* Основы общей теории линейных электрических схем.– М.: Изд. АН СССР, 1951.– 335 с.
6. *Newcomb R. W.* Linear multiport synthesis.– N.Y.: McGraw-Hill book company, 1966. – XXII, 397 p.
7. *Ионкин П. А., Миронов В. Г.* Синтез *RC*-схем с активными невзаимными элементами (вопросы реализации). – М.: Энергия, 1976. – 240 с.
8. *Андерсон*, *Ньюкомб*. Линейные пассивные цепи. Функциональная теория // ТИИЭР.– 1976. – Т. 64.– N 1. – С. 95-114. (*Anderson B.D.O.*, *Newcomb R.W.* Linear passive networks: functional theory // PIEEE.– 1976.– V. 64.– № 1.– P. 72-88.)

PS.

В журнале “Наукові праці ОНАЗ”, №1, 2002 год напечатана фамилия Рудых Е.М. вместо Рудый Е. М. Приносим извинения, следует читать на стр. 1 и 52:

Арбузников В. А., Рудый Е. М., Сукачев Э.А.
Arbyznikov V.A., *Ryduy E. M*., *Sykachev E.A*