УДК 621.371:621.372

Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю., Рожновский М.В.
Ivanitckiy A.M., Dmitrieva I.Yu., Rozhnovskiy M.V.

СВЕДЕНИЕ «ПОЛНОЙ» СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА К ШЕСТИ СКАЛЯРНЫМ УРАВНЕНИЯМ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПОНЕНТ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^{6}$

THE REDUCTION OF THE «COMPLETE» SYSTEM OF MAXWELL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO THE SIX SCALAR EQUATIONS OF THE VECTOR-FUNCTION'S $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^{6}$ COMPONENTS

Аннотация. Предлагается аналитический алгоритм конструктивного сведения произвольной системы шести дифференциальных уравнений в частных производных к равносильной системе скалярных уравнений относительно компонент исходной вектор-функции $\vec{F}$. Левые части исследуемой системы – дифференциальные операторы первого порядка с постоянными коэффициентами над пространством (x, y, z, t).

Summary. The analytical constructive reduction algorithm for the arbitrary system of six partial differential equations is proposed. The considered system is reduced to the equivalent one of the six scalar partial differential equations of the initial vector-function's $\vec{F}$ components. The left parts at the investigated system are the differential operators of the first order with constant coefficients over the space (x, y, z, t).

В прикладных вопросах математики, физики, инженерии, как и раньше [1] … [3], существует проблема получения простым способом конструктивного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, поскольку все реальные физические процессы могут быть описаны именно таким образом. Но, так как спектр прикладных задач, математически смоделированных в виде систем указанного типа, достаточно обширен, на данном этапе исследований будем ограничиваться только вопросами классической электродинамики и, в частности, системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Так, в работе [4] Иваницким А.М. исследовалась проблема зависимости третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух векторных уравнений, а в статье [5] этого же автора без применения *только* аналитических методов была доказана разрешимость системы дифференциальных максвелловских уравнений, основывалась на теории многомерных цепей.

В своей известной монографии [6] В.С. Владимиров строго обосновал существование решения максвелловской системы в частном случае пассивных систем. При этом был использован достаточно сложный аппарат теории обобщенных функций.

Заголовок работы [7] говорит сам за себя, и основные методы исследования здесь связаны с преобразованием Фурье и, опять-таки, теорией обобщенных функций. Применение обоих методов с конструктивной, прикладной точки зрения даже в случае систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка является задачей более чем трудоемкой, поскольку требует глубоких математических знаний по теории обобщенных функций и интегральных преобразований.

Насколько известно, достаточно простого по применимости к конкретным инженерным и физическим задачам, конструктивного аналитического решения системы дифференциальных уравнений Максвелла, пока предложено не было.

Поэтому в работе [8] был рассмотрен достаточно простой метод сведения системы двух основных векторных уравнений Максвелла для однородных изотропных покоящихся сред к эквивалентной системе шести скалярных уравнений, каждое из которых содержит только одну компоненту векторов $\vec{E} = \{E_i\}_{i=1}^{3}$, либо $\vec{H} = \{H_i\}_{i=1}^{3}$. Данный алгоритм базировался на последовательном применении соответствующих дифференциальных операторов к вышеупомянутой системе шести основных дифференциальных максвелловских уравнений в частных производных. Недостатками работы [8] можно считать то, что исследуемая система являлась «неполной», т.е. в каждом из ее шести уравнений присутствовали не все компоненты искомых векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, – скалярные функции $E_i, H_i (i = \overline{1,3})$, а также недостаточная формализация предложенного алгоритма.

Целью настоящей статьи является исправление указанных упущений и дополнение результатов [8] обобщением предложенного там алгоритма на случай системы шести дифференциальных уравнений в частных производных, каждое из которых содержит уже *все* компоненты неизвестной вектор-функции $\vec{F} = \{F_i\}_{i=1}^{6}$, – скалярные функции $F_i = F_i(x, y, z, t)$ $(i = \overline{1,6})$, а левые части уравнений рассматриваемой системы являются дифференциальными операторами вида

$$\sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{ki}^{(l)} a_{ki}^{(l)} \partial_k \right) \ (i, l = \overline{1,6}), \tag{1}$$

где $\partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \qquad \partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$

и коэффициенты $\alpha_{ki}^{(l)}, a_{ki}^{(l)}$ $(i, l = \overline{1,6})$ – произвольные известные действительные постоянные.

Скалярные функции F_i $(i = \overline{1,6})$ предполагаются бесконечно-дифференцируемыми по всем четырем переменным.

Такую систему дифференциальных уравнений в частных производных для дальнейшей простоты изложения назовем «полной» максвелловской системой.

Кроме того напомним, что под скалярным уравнением, как и в работе [8], понимается уравнение, содержащее *ровно одну* компоненту искомой вектор-функции $\vec{F}$.

1. Сведение первого уравнения «полной» максвелловской системы к скалярному уравнению относительно компоненты F_1. Рассмотрим «полную» систему дифференциальных уравнений Максвелла

$$\left(\sum_{i=1}^{6} \sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{ki}^{(l)} + a_{ki}^{(l)} \partial_k \right) \right) F_i = f_l \quad (l = \overline{1,6}), \tag{2}$$

левая часть которой описана во введении $\left(\alpha_{ki}^{(l)} = \mathrm{const} \in R \right)$, а правая – известные вектор-функции $\vec{f} = \{f_l\}_{l=1}^{6}$, $f_l = j_l(x, y, z, t) = j_l (l = \overline{1,3})$, $f_l = e_{l-3}(x, y, z, t) = e_{l-3} (l = \overline{4,6})$, – бесконечно дифференцируемые по всем четырем переменным.

Запишем систему (2) в следующем виде

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{5} \sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{ki}^{(l)} + a_{ki}^{(l)} \partial_k \right) \right) F_i + \left(\sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{k6}^{(l)} + a_{k6}^{(l)} \partial_k \right) \right) F_6 = f_l \quad (l = \overline{1,5}), \\ \left(\sum_{i=1}^{5} \sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)} \partial_k \right) \right) F_i + \left(\sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{ki}^{(6)} \partial_k \right) \right) F_6 = f_6, \end{cases} \tag{3}$$

т.е. во всех уравнениях системы выделено слагаемое, содержащее компоненту F_6, и последнее, шестое уравнение записано отдельно.

Применим к последнему, шестому уравнению в (3) оператор

$$\left(-\sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{k6}^{(l)} + a_{k6}^{(l)} \partial_k \right) \right) \ (l = \overline{1,5}), \tag{3'}$$

а к первым пяти уравнениям – оператор

$$\left(\sum_{k=0}^{3} \left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)} \partial_k \right) \right), \tag{3''}$$

и сложим почленно преобразованное шестое уравнение со всеми первыми пятью преобразованными уравнениями последовательно, при всех $(l = \overline{1,5})$. В итоге придем к равносильной системе, первые пять уравнений которой уже не содержат компоненту F_6:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5}\left\{\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(l)}+a_{ki}^{(l)}\partial_k\right)\right)-\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(l)}+a_{k6}^{(l)}\partial_k\right)\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)\right\}F_i=\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)f_l-\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(l)}+a_{k6}^{(l)}\partial_k\right)\right)f_6 \quad (l=\overline{1,5}), \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i+\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6=f_6. \end{cases}$$

При этом здесь и всюду в дальнейшем существенно используется коммутативность, однородность и аддитивность операции дифференцирования:

$$\begin{gathered} \partial_k\partial_i=\partial_i\partial_k \quad \left(i,k=\overline{0,3}\right); \\ \partial_k\beta=\beta\partial_k, \forall\beta=\text{const}\in R \quad \left(k=\overline{0,3}\right); \\ \partial_k+\partial_i=\partial_i+\partial_k \quad \left(i,k=\overline{0,3}\right), \end{gathered} \tag{4}$$

а «умножение» операторов в первой формуле из (4) понимается как их последовательное применение в направлении «справа – налево», т.е. от внутреннего – к внешнему.

Обозначая в последней системе для удобства дальнейших выкладок известные дифференциальные операторы и функцию соответственно через

$$\begin{gathered} \left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(l)}+a_{ki}^{(l)}\partial_k\right)\right)-\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(l)}+a_{k6}^{(l)}\partial_k\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)=b_{li} \quad (l,i=\overline{1,5}), \\ \left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)f_l-\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(l)}+a_{k6}^{(l)}\partial_k\right)\right)f_6=G_{l1} \quad (l=\overline{1,5}), \end{gathered} \tag{5}$$

записываем рассматриваемую систему с учетом (5) и аналогично системе (3):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4}b_{li}F_i+b_{l5}F_5=G_{l1} \quad (l=\overline{1,4}), \\ \sum_{i=1}^{4}b_{5i}F_i+b_{55}F_5=G_{51}, \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i+\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6=f_6, \end{cases} \tag{6}$$

где в первых четырех уравнениях выделены слагаемые, содержащие компоненту F_5, а пятое уравнение (6) записано отдельно.

Применяя к пятому уравнению системы (6) оператор

$$\left(-b_{l5}\right) \quad (l=\overline{1,4}), \tag{6'}$$

а к первым четырем уравнениям – оператор

$$b_{55}, \tag{6''}$$

и складывая почленно преобразованное пятое уравнение последовательно при всех $l=\overline{1,4}$ с преобразованными первыми четырьмя уравнениями, приходим к системе, эквивалентной (6):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4}\left(b_{55}b_{li}-b_{l5}b_{5i}\right)F_i=b_{55}G_{l1}-b_{l5}G_{51} \quad (l=\overline{1,4}), \\ \sum_{i=1}^{4}b_{5i}F_i+b_{55}F_5=G_{51}, \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i+\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6=f_6, \end{cases} \tag{7}$$

где b_{li} $(l,i=\overline{1,5})$, G_{l1} $(l=\overline{1,5})$ – из формул (5), а первые четыре уравнения уже не содержат две компоненты - F_5 и F_6.

Далее обозначим известные дифференциальные операторы и функции соответственно так:

$$\begin{aligned} &b_{55}b_{li}-b_{l5}b_{5i}=c_{li} \quad (l,i=\overline{1,4}),\\ &b_{55}G_{l1}-b_{l5}G_{51}=G_{l2} \quad (l=\overline{1,4}), \end{aligned} \tag{8}$$

после чего запишем систему (7) в обозначениях (8) и выделим в первых четырех уравнениях слагаемые с компонентой F_3, а четвертое уравнение запишем отдельно:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} c_{li}F_i + c_{l4}F_4 = G_{l2} \quad (l=\overline{1,3}),\\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42},\\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51},\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{9}$$

Применим к четвертому уравнению в (9) оператор

$$\left(-c_{l4}\right) \ (l=\overline{1,3}), \tag{9'}$$

а к первым трем уравнениям – оператор

$$c_{44} \tag{9''}$$

и сложим последовательно при всех $l=\overline{1,3}$ почленно преобразованное четвертое – с первыми тремя преобразованными уравнениями из (9). В итоге получим систему, равносильную (9):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3}\left(c_{44}c_{li}-c_{l4}c_{4i}\right)F_i = c_{44}G_{l2}-c_{l4}G_{42} \quad (l=\overline{1,3}),\\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42},\\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51},\\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)}+a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)}+a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6, \end{cases}$$

первые три уравнения которой содержат только компоненты F_i $(i=\overline{1,3})$ и не содержат F_{i+3} $(i=\overline{1,3})$.

Вводя в последней системе соответствующие обозначения для известных дифференциальных операторов и функций

$$\begin{aligned} &c_{44}c_{li}-c_{l4}c_{4i}=d_{li} \quad (l,i=\overline{1,3}),\\ &c_{44}G_{l2}-c_{l4}G_{42}=G_{l3} \quad (l=\overline{1,3}) \end{aligned} \tag{10}$$

перепишем упомянутую систему в обозначениях (10) и таким образом, третье уравнение записывается отдельно, а слагаемое с компонентой F_3 выделено в первых трех уравнениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} d_{li}F_i + d_{l3}F_3 = G_{l3} \quad (l = \overline{1,2}), \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{11}$$

Применяя к третьему уравнению в (11) оператор

$$\left(-d_{l3}\right)(l = \overline{1,2}), \tag{11'}$$

а к первым двум уравнениям – оператор

$$d_{33} \tag{11''}$$

и складывая почленно преобразованное третье уравнение с первыми двумя преобразованными уравнениями системы (11) последовательно при всех $l = 1,\ 2$, приходим к системе, равносильной последней:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \left(d_{33}d_{li} - d_{l3}d_{3i}\right)F_i = d_{33}G_{l3} - d_{l3}G_{33} \quad (l = \overline{1,2}), \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6, \end{cases} \tag{12}$$

первые два уравнения которой уже не содержат четыре компоненты $F_{i+2} \quad (i = \overline{1,4})$.

Вводя вновь вспомогательные обозначения для соответствующих известных дифференциальных операторов и функций

$$\begin{aligned} d_{33}d_{li} - d_{l3}d_{3i} &= p_{li} \quad (i, l = 1,2), \\ d_{33}G_{l3} - d_{l3}G_{33} &= G_{l4} \quad (l = 1,2), \end{aligned} \tag{13}$$

представляем систему (12) в новых обозначениях (13), где в первых двух уравнениях выделяем слагаемое с компонентой F_2, записывая при этом второе уравнение системы отдельно:

$$\begin{cases} p_{11}F_1 + p_{12}F_2 = G_{14}, \\ p_{21}F_1 + p_{22}F_2 = G_{24}, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{14}$$

Применим ко второму уравнению из (14) оператор

$$(-p_{12}), \tag{14'}$$

а к первому – оператор

$$p_{22}, \tag{14''}$$

и складывая почленно оба преобразованных уравнения, получим систему, эквивалентную (14)

$$\begin{cases} (p_{22}p_{11} - p_{12}p_{21})F_1 = p_{22}G_{14} - p_{12}G_{24}, \\ p_{21}F_1 + p_{22}F_2 = G_{24}, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{15}$$

При этом первое уравнение в (15) – уже искомое скалярное, так как содержит только одну компоненту искомого вектора $\vec{F} - F_1$.

Вводя последние вспомогательные обозначения для известных дифференциального оператора и функции

$$\begin{aligned} p_{22}p_{11} - p_{12}p_{21} &= q_{li} \quad (l, i = 1), \\ p_{22}G_{14} - p_{12}G_{24} &= G_{l5} \quad (l = 1) \end{aligned} \tag{16}$$

соответственно, запишем искомую систему (15) в более компактной форме

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ p_{21}F_1 + p_{22}F_2 = G_{24}, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6, \end{cases} \tag{17}$$

и цель, поставленная в разделе 1 настоящей работы, достигнута.

2. Сведение уравнений системы (17) к пяти скалярным уравнениям относительно компонент F_i $(i = \overline{2,6})$. Преобразуем теперь оставшиеся пять уравнений в (17) к скалярным, применяя алгоритм предыдущего разд. 1, а также полученное скалярное уравнение относительно компоненты F_1. При этом на каждом шаге вновь получаем систему, равносильную предыдущей, а значит, - как системе (17), так и исходной системе (2).

Применим к первому и второму уравнениям (17) операторы

$$(-p_{21}) \text{ и } q_{11}$$

соответственно после чего сложим почленно оба преобразованных уравнения

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} d_{3i}F_i + d_{33}F_3 = G_{33}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{18}$$

В системе (18) уже присутствует второе скалярное уравнение – относительно компоненты F_2, и (18) равносильна (17).

Далее, применим к первому и второму уравнениям (18) операторы

$$\left(-d_{31}p_{22}\right) \ \ и \ \ \left(-d_{32}\right)$$

соответственно, а к третьему уравнению той же системы – оператор

$$q_{11}p_{22},$$

и сложим почленно все три преобразованных уравнения. В итоге придем к системе, равносильной (18)

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}\left(q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}\right) - d_{31}p_{22}G_{15}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6, \end{cases}$$

и у которой уже третье уравнение – скалярное относительно компоненты F_3.

Преобразовав правую часть этого уравнения очевидным образом, выделяя при этом функцию G_{15}, перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24} + \left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)G_{15}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} c_{4i}F_i + c_{44}F_4 = G_{42}, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum\limits_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{19}$$

Применим в (19) к третьему, второму и первому уравнениям соответственно операторы

$$(-c_{43}),\ (-c_{42}d_{33})\ \text{и}\ (-c_{41}d_{33}p_{22}),$$

а к четвертому уравнению – оператор

$$q_{11}p_{22}d_{33}$$

и сложим все четыре преобразованных уравнения почленно. В результате получим систему, эквивалентную (19), у которой и четвертое уравнение теперь – скалярное относительно компоненты F_4:

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24} + (d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}F_4 = q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} - c_{43}(q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24}) - c_{43}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})G_{15} - \\ - c_{42}d_{33}(q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}) - c_{41}d_{33}p_{22}G_{15}, \\ \sum_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases}$$

Собирая в четвертом уравнении последней системы подобные при соответствующих известных функциях $G_{\ldots}$ и используя свойства операторов (4) из раздела 1, записываем данную систему следующим образом

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24} + (d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}F_4 = q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} - c_{43}q_{11}p_{22}G_{33} + \\ + q_{11}(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33})G_{24} + (d_{33}(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}) - c_{43}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}))G_{15}, \\ \sum_{i=1}^{4} b_{5i}F_i + b_{55}F_5 = G_{51}, \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{20}$$

Применив к пятому уравнению в (20) оператор

$$q_{11}p_{22}d_{33}c_{44},$$

а к четвертому, третьему, второму и первому уравнениям соответственно операторы

$$(-b_{54}),(-b_{53}c_{44}),(-b_{52}c_{44}d_{33})\ \text{и}\ (-b_{51}c_{44}d_{33}p_{22}),$$

затем сложим почленно все пять преобразованных уравнений. В итоге приходим к системе, равносильной (20), и у которой уже пятое уравнение является скалярным относительно предпоследней компоненты F_5:

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24} + (d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}F_4 = q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} - c_{43}q_{11}p_{22}G_{33} + \\ + q_{11}(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33})G_{24} + (d_{33}(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}) - c_{43}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}))G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55}F_5 = q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}G_{51} - b_{54}q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} + q_{11}p_{22}(b_{54}c_{43} - b_{53}c_{44})G_{33} - \\ - q_{11}(b_{54}(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}) + c_{44}(b_{52}d_{33} - b_{53}d_{32}))G_{24} - \\ - \{b_{54}(d_{33}(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}) - c_{43}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})) + \\ b_{53}c_{44}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}) + c_{44}d_{33}(b_{51}p_{22} - b_{52}p_{21})\}G_{15}, \\ \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_i + \left(\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{k6}^{(6)} + a_{k6}^{(6)}\partial_k\right)\right)F_6 = f_6. \end{cases} \tag{21}$$

Обозначив для удобства в шестом уравнении (21) операторы

$$\sum_{k=0}^{3}\left(\alpha_{ki}^{(6)} + a_{ki}^{(6)}\partial_k\right) = s_{6i} \quad (i = \overline{1,6}), \tag{21'}$$

преобразуем затем правые части уравнений последней системы к более компактному виду:

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}p_{22}G_{33} - d_{32}q_{11}G_{24} + (d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}F_4 = q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} - c_{43}q_{11}p_{22}G_{33} + \\ + q_{11}(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33})G_{24} + (d_{33}(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}) - c_{43}(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}))G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55}F_5 = q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}G_{51} - b_{54}q_{11}p_{22}d_{33}G_{42} + q_{11}p_{22}(b_{54}c_{43} - b_{53}c_{44})G_{33} - \\ - q_{11}(b_{54}(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}) + c_{44}(b_{52}d_{33} - b_{53}d_{32}))G_{24} - \\ - \{(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22})(b_{53}c_{44} - b_{54}c_{43}) + \\ + d_{33}(b_{54}(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}) + c_{44}(b_{51}p_{22} - b_{52}p_{21}))\}G_{15}, \\ \sum_{i=1}^{5} s_{6i}F_i + s_{66}F_6 = f_6. \end{cases} \tag{22}$$

Применив затем к шестому уравнению в (22) оператор

$$q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55},$$

а к уравнениям с пятого по первое включительно соответствующие операторы

$$(-s_{65}),\ (-s_{64}b_{55}),\ (-s_{63}b_{55}c_{44}),\ (-s_{62}b_{55}c_{44}d_{33}),\ (-s_{61}b_{55}c_{44}d_{33}p_{22}),$$

и складывая почленно все шесть преобразованных уравнений, приходим к системе, эквивалентной (22):

$$\begin{cases} q_{11}F_1 = G_{15}, \\ q_{11}p_{22}F_2 = q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}F_3 = q_{11}\left(p_{22}G_{33} - d_{32}G_{24}\right) + \left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}F_4 = q_{11}p_{22}\left(d_{33}G_{42} - c_{43}G_{33}\right) + q_{11}\left(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}\right)G_{24} + \left(d_{33}\left(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}\right)\right. \\ \left. - c_{43}\left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)\right)G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55}F_5 = q_{11}p_{22}d_{33}\left(c_{44}G_{51} - b_{54}G_{42}\right) + q_{11}p_{22}\left(b_{54}c_{43} - b_{53}c_{44}\right)G_{33} - \\ - q_{11}\left(b_{54}\left(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}\right) + c_{44}\left(b_{52}d_{33} - b_{53}d_{32}\right)\right)G_{24} - \\ - \left\{\left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)\left(b_{53}c_{44} - b_{54}c_{43}\right) + d_{33}\left(b_{54}\left(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}\right) + c_{44}\left(b_{51}p_{22} - b_{52}p_{21}\right)\right\}G_{15}, \\ q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55}s_{66}F_6 = q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}b_{55}f_6 + \left[s_{65}\left\{\left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)\left(b_{53}c_{44} - b_{54}c_{43}\right) + \right.\right. \\ \left. + d_{33}\left(b_{54}\left(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}\right) + c_{44}\left(b_{51}p_{22} - b_{52}p_{21}\right)\right)\right\} - s_{64}b_{55}\left\{d_{33}\left(c_{42}p_{21} - c_{41}p_{22}\right) - c_{43}\left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right)\right\} - \\ \left. - s_{63}b_{55}c_{44}\left(d_{32}p_{21} - d_{31}p_{22}\right) + s_{62}b_{55}c_{44}d_{33}p_{21} - s_{61}b_{55}c_{44}d_{33}p_{22}\right]G_{15} + \left\{s_{65}q_{11}\left(b_{54}\left(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}\right) + \right.\right. \\ \left. + c_{44}\left(b_{52}d_{33} - b_{53}d_{32}\right)\right) - s_{64}b_{55}q_{11}\left(c_{43}d_{32} - c_{42}d_{33}\right) + s_{63}b_{55}c_{44}q_{11}d_{32} - s_{62}b_{55}c_{44}d_{33}q_{11}\left.\right\}G_{24} - \\ - \left\{s_{65}q_{11}p_{22}\left(b_{54}c_{43} - b_{53}c_{44}\right) - s_{64}b_{55}q_{11}p_{22}c_{43} + s_{63}b_{55}c_{44}q_{11}p_{22}\right\}G_{33} + \\ + \left\{s_{65}q_{11}p_{22}d_{33}b_{54} - s_{64}b_{55}q_{11}p_{22}d_{33}\right\}G_{42} - s_{65}q_{11}p_{22}d_{33}c_{44}G_{51}, \end{cases} \tag{23}$$

все шесть уравнений которой – скалярные относительно искомых компонент $F_i \quad (i = \overline{1,6})$ вектора $\vec{F}$. При этом система (23) равносильна не только системе (22), но также и исходной системе (2). Таким образом, цель разд. 2 полностью реализована.

3. Проверка предложенного алгоритма на примере «неполной» системы уравнений Максвелла работы [8]. Применим алгоритм разд. 1, 2 к ранее упомянутой «неполной» максвелловской системе работы [8].

Для этого последовательно будем подставлять конкретные операторные и функциональные значения в общие обозначения, принятые в настоящей работе.

Рассмотрим вначале формулы (5) разд. 1. Здесь

$$f_l \equiv 0 \quad (l = \overline{4,6})\,; \; f_l = j_l^{cm} \quad (l = \overline{1,3})\,, \tag{24}$$

а если вкратце обозначить дифференциальные операторы из левой части системы (2) аналогично формуле (21') разд. 2 через $s_{li}\,(l,i = \overline{1,6})$, то для исходной системы работы [8] получим следующее соотношения

$$\begin{gathered} s_{11} = s_{22} = s_{33} = -(\sigma + \varepsilon_a \partial_0)\,; \\ \left(s_{12} = s_{21}\right) = \left(s_{13} = s_{31}\right) = \left(s_{14} = s_{41}\right) = \left(s_{23} = s_{32}\right) = \left(s_{25} = s_{52}\right) = \left(s_{36} = s_{63}\right) = \left(s_{45} = s_{54}\right) = \\ = \left(s_{46} = s_{64}\right) = \left(s_{56} = s_{65}\right) = 0; \\ s_{15} = s_{51} = -\partial_3\,; \; s_{16} = s_{61} = \partial_2\,; \; s_{24} = s_{42} = \partial_3\,; \; s_{26} = s_{62} = -\partial_1\,; \; s_{34} = s_{43} = -\partial_2\,; \; s_{35} = s_{53} = \partial_1\,; \\ s_{44} = s_{55} = s_{66} = -\mu_a \partial_0\,, \end{gathered} \tag{25}$$

и тогда формулы (5) раздела 1 во вспомогательных обозначениях (25) примут вид

$$\begin{gathered} b_{li} = s_{li}s_{66} - s_{l6}s_{6i} \\ G_{l1} = s_{66}f_l \qquad (l,i = \overline{1,5}), \end{gathered} \tag{26}$$

а с учетом обозначения работы [8]

$$\tilde{\partial}_0^2 = \mu_a \partial_0(\sigma + \varepsilon_a \partial_0) \tag{27}$$

имеем

$$\begin{gathered} b_{11} = \tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2\,; \; b_{22} = \tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\,; \; b_{33} = \tilde{\partial}_0^2\,; \; b_{44} = b_{55} = \mu_a^2 \partial_0^2\,; \\ \left(b_{31} = b_{13}\right) = \left(b_{14} = b_{41}\right) = \left(b_{23} = b_{32}\right) = \left(b_{25} = b_{52}\right) = \left(b_{45} = b_{54}\right) = 0; \\ b_{12} = b_{21} = \partial_1\partial_2\,; \; b_{15} = b_{51} = \mu_a \partial_0 \partial_3\,; \; b_{24} = b_{42} = -\mu_a \partial_0 \partial_3\,; \; b_{34} = b_{43} = \mu_a \partial_0 \partial_2\,; \end{gathered} \tag{28}$$

$$b_{35} = b_{53} = -\mu_a \partial_0 \partial_1 \,;\; G_{l1} \equiv 0 \quad (l = 4{,}5)\,;$$

$$G_{l1} = -\mu_a \partial_0 j_l^{cm} \quad (l = \overline{1{,}3}).$$

Подставим теперь выражения (28) в формулы (8) разд. 1:

$$c_{11} = \mu_a^2 \partial_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2\right);\; c_{22} = c_{33} = \mu_a^2 \partial_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right);\; c_{44} = \mu_a^4 \partial_0^4\,;$$
$$c_{34} = c_{43} = \mu_a^3 \partial_0^3 \partial_2\,;\; c_{12} = c_{21} = \mu_a^2 \partial_0^2 \partial_1 \partial_2\,;\; c_{13} = c_{31} = \mu_a^2 \partial_0^2 \partial_1 \partial_3\,; \tag{29}$$
$$c_{24} = c_{42} = -\mu_a^3 \partial_0^3 \partial_3\,;\; \left(c_{14} = c_{41}\right) = \left(c_{23} = c_{32}\right) = 0\,;\; G_{l2} = b_{55} G_{l1} \quad (l = \overline{1{,}4})\,;$$

$$G_{42} = 0\,;\; G_{l2} = -\mu_a^3 \partial_0^3 j_l^{cm} \quad (l = \overline{1{,}3}).$$

Далее, используя (29), выразим соотношения (10) разд. 1:

$$G_{l3} = c_{44} G_{l2} = \mu_a^4 \partial_0^4 G_{l2} \quad (l = \overline{1{,}3})\,;\; G_{l3} = -\mu_a^7 \partial_0^7 j_l^{cm} \quad (l = \overline{1{,}3})\,;$$

$$d_{11} = \mu_a^6 \partial_0^6 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2\right);\; d_{22} = \mu_a^6 \partial_0^6 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2\right);\; d_{33} = \mu_a^6 \partial_0^6 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right); \tag{30}$$
$$d_{12} = d_{21} = \mu_a^6 \partial_0^6 \partial_1 \partial_2\,;\; d_{13} = d_{31} = \mu_a^6 \partial_0^6 \partial_1 \partial_3\,;\; d_{23} = d_{32} = \mu_a^6 \partial_0^6 \partial_2 \partial_3\,.$$

Затем подставим (30) в формулы (13) того же разд. 1, применяя при этом обозначение для оператора Лапласа в пространстве R^3

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2\,, - \tag{31}$$

$$p_{11} = \mu_a^{12} \partial_0^{12} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right);\; p_{22} = \mu_a^{12} \partial_0^{12} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right);\; p_{12} = p_{21} = \mu_a^{12} \partial_0^{12} \partial_1 \partial_2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right);$$
$$G_{14} = \mu_a^{13} \partial_0^{13} \left(\partial_1 \partial_3 j_3^{cm} - \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) j_1^{cm}\right);\; G_{24} = \mu_a^{13} \partial_0^{13} \left(\partial_2 \partial_3 j_3^{cm} - \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) j_2^{cm}\right). \tag{32}$$

И, наконец, выражая (16) из первого раздела настоящей работы в терминах (32), после простейших преобразований имеем

$$q_{11} = \mu_a^{24} \partial_0^{24} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2 \tilde{\partial}_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right),$$
$$G_{15} = \mu_a^{25} \partial_0^{25} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1 \partial_3 j_3^{cm} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} + \partial_1 \partial_2 j_2^{\text{ст}}\right). \tag{33}$$

Подставив (33) в первое уравнение из (23) и «сокращая» на «общий операторный множитель» $\mu_a^{24} \partial_0^{24} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)$, приходим к скалярному уравнению относительно $F_1 = E_1$ работы [8]:

$$\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\tilde{\partial}_0^2 E_1 = \mu_a \partial_0 \left(\left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} + \partial_1 \left(\partial_2 j_2^{\text{ст}} + \partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)\right)$$
$$\Updownarrow \text{ по } (27)$$
$$\underline{-\left(\sigma + \varepsilon_a \partial_0\right)\left(\Delta - \tilde{\partial}_0^2\right) E_1 = \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} + \partial_1 \left(\partial_2 j_2^{\text{ст}} + \partial_3 j_3^{\text{ст}}\right).} \tag{34}$$

Далее, подставим (33) и (32) во второе уравнение системы (23), предварительно записав оператор

$$q_{11} p_{22} = \mu_a^{36} \partial_0^{36} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^3 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\tilde{\partial}_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) \tag{35}$$

и

$$q_{11} G_{24} - p_{21} G_{15} = \mu_a^{37} \partial_0^{37} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2 \tilde{\partial}_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_2 \partial_3 j_3^{\text{ст}} - \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) j_2^{\text{ст}}\right) -$$
$$- \mu_a^{37} \partial_0^{37} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2 \partial_1 \partial_2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1 \partial_3 j_3^{\text{ст}} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} + \partial_1 \partial_2 j_2^{\text{ст}}\right) \Leftrightarrow$$
$$q_{11} G_{24} - p_{21} G_{15} = \mu_a^{37} \partial_0^{37} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) \times$$
$$\times \left(\tilde{\partial}_0^2 \partial_2 \partial_3 j_3^{\text{ст}} - \tilde{\partial}_0^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right) j_2^{\text{ст}} - \partial_1^2 \partial_2 \partial_3 j_3^{\text{ст}} - \partial_1 \partial_2 \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} - \partial_1^2 \partial_2^2 j_2^{\text{ст}}\right) \Leftrightarrow$$
$$q_{11} G_{24} - p_{21} G_{15} = \mu_a^{37} \partial_0^{37} \left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_2 \partial_3 \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right) j_3^{cm} - \partial_1 \partial_2 \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right) j_1^{\text{ст}} -\right.$$
$$\left. - \left(\partial_1^2 \partial_2^2 + \tilde{\partial}_0^4 - \tilde{\partial}_0^2 \left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right)\right) j_2^{\text{ст}}\right)\,.$$

Применяя в последнем равенстве операторное тождество

$$\partial_1^2 \partial_2^2 + \tilde{\partial}_0^4 - \tilde{\partial}_0^2 \left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) = \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_2^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right), \tag{36}$$

запишем

$$q_{11}G_{24} - p_{21}G_{15} = \mu_a^{37}\partial_0^{37}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)\left(-\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}} - \partial_1\partial_2 j_1^{\text{ст}} - \left(\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_2^{\text{ст}}\right). \quad (37)$$

Подставив (35) и (37) окончательно во второе уравнение (23) и «сократив на общий операторный множитель» $\mu_a^{36}\partial_0^{36}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)$, приходим к следующему скалярному уравнению

$$-\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\tilde{\partial}_0^2 F_2 = \mu_a\partial_0\left(-\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}} - \partial_1\partial_2 j_1^{\text{ст}} - \left(\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_2^{\text{ст}}\right),$$

которое, после возврата к обозначению из правой части (27) и простейших преобразований, при $F_2 = E_2$

$$\underline{-\left(\sigma + \varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta - \tilde{\partial}_0^2\right)E_2 = \left(\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_2^{\text{ст}} + \partial_2\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}} + \partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),} \quad (38)$$

полностью совпадает со скалярным уравнением для E_2 работы [8].

Далее, рассмотрим третье уравнение (23). Для этого с помощью формул (35) и (30) запишем

$$q_{11}p_{22}d_{33} = \mu_a^{42}\partial_0^{42}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^3\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right), \quad (39)$$

а в правую часть этого же уравнения подставим выражения (33), (32) и (30):

$$\begin{aligned}
&\mu_a^{24}\partial_0^{24}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(-\mu_a^{12}\partial_0^{12}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\mu_a^7\partial_0^7 j_3^{\text{ст}} -\right.\\
&-\mu_a^6\partial_0^6\partial_2\partial_3\mu_a^{13}\partial_0^{13}\left(\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}} - \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)j_2^{\text{ст}}\right)\Big) + \Big(\mu_a^6\partial_0^6\partial_2\partial_3\mu_a^{12}\partial_0^{12}\partial_1\partial_2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right) -\\
&-\mu_a^6\partial_0^6\partial_1\partial_3\mu_a^{12}\partial_0^{12}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\Big)\mu_a^{25}\partial_0^{25}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_1^{\text{ст}} + \partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right) =\\
&= -\mu_a^{43}\partial_0^{43}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)j_3^{\text{ст}} + \partial_2^2\partial_3^2 j_3^{\text{ст}} - \partial_2\partial_3\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)j_2^{\text{ст}}\right) +\\
&+\mu_a^{43}\partial_0^{43}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\partial_1\partial_3\left(\partial_2^2 - \tilde{\partial}_0^2 + \partial_1^2\right)\left(\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_1^{\text{ст}} + \partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right) =\\
&= -\mu_a^{43}\partial_0^{43}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\Big(\tilde{\partial}_0^2\left(\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)j_3^{\text{ст}} + \partial_2^2\partial_3^2 j_3^{\text{ст}} - \partial_2\partial_3\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)j_2^{\text{ст}}\right) +\\
&+\partial_1\partial_3\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_1^{\text{ст}} + \partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right)\Big)\ .
\end{aligned}$$

Применив в последнем выражении операторное тождество

$$\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right) + \partial_2^2\partial_3^2 = \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2\right), \quad (40)$$

перепишем искомую правую часть, а именно, последнее равенство перед (40), в виде

$$\begin{aligned}
&-\mu_a^{43}\partial_0^{43}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)^2\Big\{\tilde{\partial}_0^2\left(\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2\right)j_3^{\text{ст}} - \partial_2\partial_3 j_2^{\text{ст}}\right) +\\
&+\partial_1\partial_3\left(\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}} + \left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_1^{\text{ст}} + \partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right)\Big\}\ .
\end{aligned} \quad (41)$$

Подставив (39) и (41) в третье уравнение (23) и «сокращая на общий операторный множитель» $\mu_a^{42}\partial_0^{42}\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2\right)^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)^2$, получим

$$\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)F_3 = -\mu_a\partial_0\Big\{\left(\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2\right) + \partial_1^2\partial_3^2\right)j_3^{cm} + \left(\partial_1^2\partial_2\partial_3 - \tilde{\partial}_0^2\partial_2\partial_3\right)j_2^{\text{ст}} + \partial_1\partial_3\left(\left(\partial_1^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_1^{\text{ст}}\right)\Big\}.$$

После применения к последнему равенству операторного тождества

$$\tilde{\partial}_0^2\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2 - \partial_3^2\right) + \partial_1^2\partial_3^2 = \left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_3^2\right)\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right) \quad (42)$$

и «сократив на общий операторный множитель» $\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_1^2\right)\mu_a\partial_0$, с учетом (27), приходим к уравнению

$$\left(\tilde{\partial}_0^2 - \Delta\right)\left(\sigma + \varepsilon_a\partial_0\right)F_3 = -\left(\left(\tilde{\partial}_0^2 - \partial_3^2\right)j_3^{\text{ст}} - \partial_2\partial_3 j_2^{\text{ст}} - \partial_1\partial_3 j_1^{\text{ст}}\right),$$

которое после простейших преобразований и при замене $F_3 = E_3$ тождественно совпадает со скалярным уравнением для компоненты E_3 из [8]:

$$\underline{-\left(\sigma + \varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta - \tilde{\partial}_0^2\right)E_3 = \left(\partial_3^2 - \tilde{\partial}_0^2\right)j_3^{\text{ст}} + \partial_3\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}} + \partial_2 j_2^{\text{ст}}\right).} \quad (43)$$

Таким образом, проверка предложенного алгоритма для вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ из работы [8] завершена. Результаты подтверждены полностью.

Проверка для вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$ проводится аналогично.

В заключение можно отметить следующее: алгоритм, первоначально предложенный в работе [8], обобщен и полностью формализован в случае системы шести дифференциальных уравнений в частных производных класса (2), для которой система уравнений Максвелла из [8] является частным случаем. Произведена проверка алгоритма для указанной максвелловской системы. Результаты полностью совпадают с выводами [8]. Таким образом цель настоящей работы полностью реализована.

Литература

1. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1988. – Т.30. – 263 с.
2. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1988. – Т.31. – 267 с.
3. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Дифференциальные уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1988. – Т.32. – 218 с.
4. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух при произвольном возбуждении электромагнитного поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С. 2 – 7.
5. *Иваницкий А.М.* Свойства дифференциальных операторов многомерных электрических цепей // Сб. научных трудов УГАС им. А.С. Попова. – Одеса, 1998. – С. 37 – 41.
6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
7. *Комеч А.М.* Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: Наука, 1988. – Т.31. – С. 127 – 261.
8. *Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю., Рожновский М.В.* Сведение классической системы уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2006. – №1. – С. 37 – 47.