УДК 621.395

Ложковский А.Г., Салманов Н.С., Чумак Н.А.
Lozkovsky A.G., Salmanov N.S., Chumak M.O.

РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ПАКЕТНОЙ СЕТИ ДОСТУПА

THE RECURRENT CALCULATION METHOD FOR THE PACKET ACCESS NETWORK TRAFFIC CAPACITY

Аннотация. В статье предлагается рекуррентный метод расчета пропускной способности пакетной сети доступа, позволяющий получить точные результаты в частном случае симметричной сети, и дающий, таким образом, основу для оценки погрешности инженерных методов расчета.

Summary. The recurrent method of packet access network traffic capacity calculation is proposed in the article, which makes it possible to obtain the exact results in the particular case of symmetric network, that provides the basis for evaluation of engineering calculation methods inaccuracy.

При создании пакетных сетей нового поколения возникает проблема расчета пропускной способности сетей широкополосного мультисервисного доступа. На практике при этом используют математическое моделирование, либо, без должного обоснования, традиционные формулы теории распределения информации [1 … 4]. Аналитическое решение для технологии ATM, предложенное в [5], чрезвычайно громоздко и практически неприменимо. Общепринятого аналитического или инженерного метода решения проблемы на сегодня нет.

Цель данной статьи – изложить рекуррентный метод расчета числа условных каналов, дающий точные результаты в частном случае симметричности сети доступа, и позволяющий оценить погрешности приближенных методов расчета. Тут под условным каналом понимается часть общей полосы пропускания, эквивалентная по пропускной способности входному (абонентскому) порту.

Типовая структура автономного кластера сети доступа (рис. 1) предусматривает каскадное подключение узлов доступа (УД) и, в ряде случаев, возможность взаимной связи абонентов кластера. Она содержит транзитный узел доступа УД1 и каскадно подключенные через него УД2…УДm. Узлами доступа, в зависимости от конкретной технологии, могут быть мультиплексоры линий xDSL (DSLAM), базовые станции WiMAX и/или WiFi и другое оборудование.

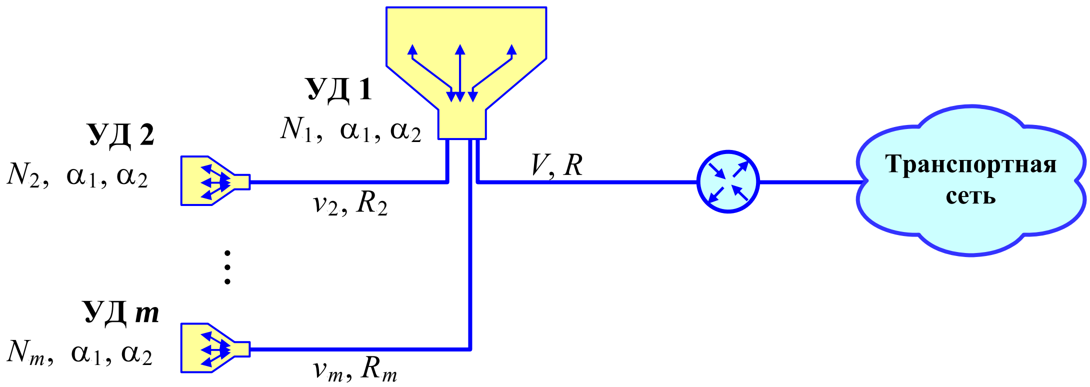

Рисунок 1 – Автономный сегмент сети доступа с каскадным включением узлов доступа

При расчете пропускной способности такой сети доступа обычно полагают, что на каждый УД поступает простейший поток вызовов, а состояния последовательных УД независимы [1, 2]. На практике такой подход может быть оправдан вследствие простоты и обычно приемлемой, хотя и неизвестной, погрешности. Однако обе эти предпосылки неверны: потоки вызовов вследствие конечного числа источников надо описывать моделью примитивного потока, а состояния последовательно соединенных УД зависимы, так как каждый вызов занимает в них определенную пропускную способность, и к тому же из-за потерь меняется характер нагрузки, поступающей на транзитный УД (как бы срезаются пики нагрузки и, соответственно, уменьшается ее дисперсия). Таким образом, указанные предпосылки приводят к занижению пропускной способности. Для получения точных результатов надо рассчитывать каждый автономный сегмент сети доступа с каскадным включением УД (кластер) в целом, не расчленяя его на отдельные УД, что связано с определенными вычислительными трудностями. Обозначим:

$N_1, N_2 \dots N_m$ – ёмкости соответствующих узлов доступа;

$R_1 \dots R_m$ – скорости передачи, которые необходимо обеспечить для УД1…УДm;

R – общая скорость передачи, требуемая в направлении к транспортной сети от всех узлов доступа рассматриваемого кластера;

$v_1 \dots v_m$ – расчетное количество условных каналов для УД1…УДm соответственно;

V – расчетное общее число условных каналов для направления к транспортной сети;

α_1, α_2 – интенсивность одного источника нагрузки (абонента) в свободном состоянии соответственно внутри кластера и к транспортной сети.

Если найти число условных каналов так, чтобы не превышались нормативные потери вызовов, а затем определить для каждого такого канала скорость передачи так, чтобы не превышались нормы потерь пакетов, то легко определяется требуемая полоса пропускания в Мбит/с каждого направления связи.

Пусть вызовы обслуживаются с явными потерями, время обслуживания каждого вызова подчинено показательному закону, а поток вызовов от каждой группы абоненов является примитивным, т.е. обладает ординарностью, стационарностью и простым последействием.

Обозначим $P(k_1, l_1; \dots ; k_m, l_m)$ – вероятность наличия на УД1…УДm соответственно $k_1 \dots k_m$ соединений внутри кластера и $l_1 \dots l_m$ соединений к транспортной сети. Исходя из формулы Энгсета [1] для конкретного i-го УД вероятность наличия $k_i + l_i$ соединений равна:

$$C_{N_i}^{l_i} \alpha_2^{l_i} C_{N_i - l_i}^{k_i} \alpha_1^{k_i} p_0, \qquad (1)$$

где p_0 – вероятность отсутствия соединений. Тогда для установившегося режима имеем:

$$P(k_1, l_1; \dots; k_m, l_m) = \frac{1}{C} \prod_{i=1}^{m} C_{N_i}^{l_i} \alpha_2^{l_i} C_{N_i - l_i}^{k_i} \alpha_1^{k_i}, \qquad (2)$$

где постоянная С определяется из нормирующего условия: $\sum P(k_1, l_1; \dots k_m; l_m) = 1,$ где сумма включает все состояния, для которых выполняется: $0 \le k_i + l_i \le v_i$, $\sum_{i=1}^{m} l_i \le V$.

Расчеты с использованием формулы (2) чрезвычайно громоздки и выполнимы лишь на компьютере. Поэтому на практике целесообразно использовать приближенные методы, однако они имеют неопределенную погрешность, оценить которую можно сравнением с точными результатами, поэтому роль последних достаточно важна. Их получение можно заметно упростить, если предположить симметричность кластера сети доступа, т.е. задать $N_i = N$, $v_i = v$ для всех значений i ($0 \le i \le m$). Упрощение достигается за счет появления множеств состояний кластера, в каждом из которых все состояния равновероятны.

Рассмотрим кластер доступа с учетом сделанных допущений относительно его симметричности. Обозначим i_{kl} – количество УД, имеющих по k соединений внутри кластера и по l соединений к транспортной сети. Для отдельно взятого УД вероятность наличия $k + l$ соединений определяется формулой (1) с учетом того, что $N_i = N$. Тогда вероятность того, что из всех УД i_{00} имеют по $k = 0$ и $l = 0$ соединений, i_{01} – по $k = 0$ и $l = 1$ соединений и так далее:

$$\begin{aligned} P(i_{00}, i_{01}, \dots, i_{v0}) &= C_m^{i_{00}} (C_N^0 \alpha_2^0 C_{N-0}^0 \alpha_1^0)^{i_{00}} \times C_{m-i_{00}}^{i_{01}} (C_N^1 \alpha_2^1 C_{N-1}^0 \alpha_1^0)^{i_{01}} \times \dots \\ &\dots \times C^{i_{v0}}_{m - \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{l=0}^{v-k} i_{kl}} (C_N^0 \alpha_2^0 C_{N-0}^v \alpha_1^v)^{i_{v0}} \times P(m, 0, \dots, 0). \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $P(m, 0 \dots 0) = P_0$ – вероятность того, что в кластере нет ни одного соединения, т.е. $i_{00} = m$. Можно показать, что $C_m^{i_{00}} C_{m-i_{00}}^{i_{01}} \dots C^{i_{v0}}_{m - \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{l=0}^{v-k} i_{kl}} = \frac{m!}{i_{00}! i_{01}! \dots i_{v0}!}$. Тогда уравнение (3) запишется в виде:

$$P(i_{00}, i_{01}, \dots, i_{v0}) = \frac{m!}{\prod_{k=0}^{v-l} \prod_{l=0}^{v} i_{kl}!} \prod_{l=0}^{v} \prod_{k=0}^{v-l} (C_N^l \alpha_2^l C_{N-l}^k \alpha_1^k)^{i_{kl}} \times P_0. \qquad (4)$$

Таким образом, вероятности макросостояний кластера доступа описываются мультиномиальным распределением. Очевидны следующие ограничения:

$$0 \le i_{kl} \le m, \quad 0 \le k + l \le v, \ \sum_{l=0}^{v}\sum_{k=0}^{v-l} i_{kl} = m, \quad 0 \le \sum_{l=0}^{v}\sum_{k=0}^{v-l} l i_{kl} \le V.$$

Вероятность наличия j соединений ($0 \le j \le V$) от всех m УД в общем направлении

$$P_j = \sum_j P(i_{00}, i_{01}, ..., i_{v0}) = B_j(m) P_0, \tag{5}$$

где суммирование производится по k и l, удовлетворяющим равенство $\sum_{l=0}^{v}\sum_{k=0}^{v-l} l i_{kl} = j.$

Преобразуем выражение для $B_j(m)$ в вид, удобный для расчетов. Поскольку вероятность наличия j соединений в общем направлении можно представить произведением вероятности наличия l соединений от определенного УД на вероятность наличия $j - l$ соединений от остальных $m - 1$ УД, то имеет место рекуррентное соотношение:

$$B_j(m) = \sum_{l=0}^{v}\sum_{k=0}^{v-l} C_N^l \alpha_2^l C_{N-l}^k \alpha_1^k B_{j-l}(m-1). \tag{6}$$

С учетом равенства $j \dfrac{m!}{\prod\limits_{k=0}^{v-l}\prod\limits_{l=0}^{v} i_{kl}!} = m \sum\limits_{s=0}^{v}\sum\limits_{r=0}^{v-s} s \dfrac{i_{rs}(m-1)!}{\prod\limits_{l=0}^{v}\prod\limits_{k=0}^{v-l} i_{kl}!}$ получим второе рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} jB_j(m) &= \sum_j m \sum_{s=0}^{v}\sum_{r=0}^{v-s} s \frac{i_{rs}(m-1)!}{\prod\limits_{k=0}^{v-l}\prod\limits_{l=0}^{v} i_{kl}!} \prod_{l=0}^{v}\prod_{k=0}^{v-l} (C_N^l \alpha_2^l C_{N-l}^k \alpha_1^k)^{i_{kl}} = \\ &= m \sum_{s=1}^{v}\sum_{r=0}^{v-s} sC_N^s \alpha_2^s C_{N-s}^r \alpha_1^r B_{j-s}(m-1). \end{aligned} \tag{7}$$

После некоторых преобразований получим:

$$jB_j(m) = mN\alpha_2 \sum_{s=1}^{v} C_{N-1}^{s-1}\alpha_2^{s-1} B_{j-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s}^r \alpha_1^r. \tag{8}$$

С учетом равенства $C_N^l = C_{N-1}^l + C_{N-1}^{l-1}$ из (8) следует

$$\begin{aligned} mNB_j(m) &= mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s}^r \alpha_1^r + \\ &+ mN\alpha_2 \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^{s-1}\alpha_2^{s-1} B_{j-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s}^r \alpha_1^r. \end{aligned} \tag{9}$$

Из сравнения (8) и (9) вытекает:

$$(mN - j)B_j(m) = mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s}^r \alpha_1^r.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_2[(mN-(j-1)]B_{j-1}(m) &= \alpha_2 mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-1-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s-1}^r \alpha_1^r + \\ &+ \alpha_1\alpha_2 mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-1-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s-1}^{r-1} \alpha_1^{r-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части выражения (10):

$$\begin{aligned} &\alpha_2 mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-1-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s-1}^r \alpha_1^r = \\ &= \alpha_2 mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-1-s}(m-1) \sum_{r=0}^{v-s-1} C_{N-s-1}^r \alpha_1^r + \\ &+ \alpha_2 mN \sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^s \alpha_2^s B_{j-1-s}(m-1) C_{N-s-1}^{v-s} \alpha_1^{v-s}. \end{aligned} \tag{11}$$

Обозначим $s + 1 = s'$. Тогда в формуле (11)

$$\begin{gathered}\alpha_2 mN\sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^{s}\alpha_2^{s}B_{j-1-s}(m-1)\sum_{r=0}^{v-s-1} C_{N-s-1}^{r}\alpha_1^{r} = \\ = \alpha_2 mN\sum_{s'=1}^{v+1} C_{N-1}^{s'-1}\alpha_2^{s'-1}B_{j-s'}(m-1)\sum_{r=0}^{v-s'} C_{N-s'}^{r}\alpha_1^{r} = \\ jB_j(m)+\alpha_2 mNC_{N-1}^{v}\alpha_2^{v}B_{j-v-1}(m-1)C_{N-v-1}^{-1}\alpha_1^{-1} = jB_j(m).\end{gathered} \tag{12}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части выражения (10), обозначив $r-1=r'$. Тогда

$$\begin{gathered}\alpha_1\alpha_2 mN\sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^{s}\alpha_2^{s}B_{j-1-s}(m-1)\sum_{r=0}^{v-s} C_{N-s-1}^{r-1}\alpha_1^{r-1} = \\ \alpha_1\alpha_2 mN\sum_{s'=1}^{v+1} C_{N-1}^{s'-1}\alpha_2^{s'-1}B_{j-s'}(m-1)\sum_{r'=0}^{v-s'} C_{N-s'}^{r'}\alpha_1^{r'} = \alpha_1 jB_j(m).\end{gathered} \tag{13}$$

Подставив (11), (12) и (13) в (10), получим:

$$\begin{gathered}\alpha_2[(mN-(j-1)]B_{j-1}(m) = \\ jB_j(m)+\alpha_2 mN\sum_{s=0}^{v} C_{N-1}^{s}\alpha_2^{s}B_{j-1-s}(m-1)C_{N-s-1}^{v-s}\alpha_1^{v-s}+\alpha_1 jB_j(m).\end{gathered}$$

Учитывая, что $C_{N-1}^{s}C_{N-s-1}^{v-s}=C_{N-1}^{v}C_{v}^{s}$ и заменив индекс суммирования прежним обозначением, получим третье, наиболее удобное для расчетов рекуррентное соотношение:

$$\begin{gathered}jB_j(m)=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}[(mN+j+1)B_{j-1}(m)-mNC_{N-1}^{v}\sum_{l=0}^{v} C_v^{l}\alpha_2^{l}\alpha_1^{v-l}B_{j-1-l}(m-1)], \\ B_{-j}\equiv 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Для $j=0$ из (9) следует, что $B_0(m)=B_0(m-1)\sum_{k=0}^{v} C_N^{k}\alpha_1^{k}$. Очевидно также, что $B_0(1)=\sum_{k=0}^{v} C_N^{k}\alpha_1^{k}$. Эту сумму можно выразить через табулированную функцию Энгсета [6]: $\varepsilon(N,v,\alpha_1)=\dfrac{C_N^{v}\alpha_1^{v}}{\sum_{k=0}^{v} C_N^{k}\alpha_1^{k}}$. Тогда для $1\le i\le m$ получим:

$$B_0(1)=\frac{C_N^{v}\alpha_1^{v}}{\varepsilon(N,v,\alpha_1)},\qquad B_0(i)=[B_0(1)]^{i}. \tag{15}$$

С учетом (15) из выражения (14) последовательно определяются все значения $B_j(m)$, по которым достаточно просто рассчитываются характеристики качества обслуживания абонентов в схеме рис. 1.Обозначим:

P_i – вероятность занятости i условных каналов для рассматриваемого УД при внутрикластерной связи;

$П_j$ – вероятность занятости j условных каналов в направлении к транспортной сети;

P_{ij} – вероятность одновременной занятости i условных каналов для рассматриваемого УД при внутрикластерной связи и j условных каналов в направлении к транспортной сети.

Можно показать, что имеют место соотношения:

$$\begin{gathered}P_i=\frac{\sum_{l=0}^{i} C_N^{l}\alpha_2^{l}C_{N-l}^{i-l}\alpha_1^{i-l}\sum_{j=0}^{V-l} B_j(m-1)}{\sum_{x=0}^{V} B_x(m)},\qquad П_j=\frac{B_j(m)}{\sum_{x=0}^{V} B_x(m)}, \\ P_{ij}=\frac{\sum_{l=0}^{i} C_N^{l}\alpha_2^{l}C_{N-l}^{i-l}\alpha_1^{i-l}B_{j-l}(m-1)}{\sum_{x=0}^{V} B_x(m)}.\end{gathered} \tag{16}$$

Отсюда легко определяются потери по времени P_t – вероятности одновременной занятости всех доступных условных каналов. Для внутрикластерной связи $P_t=P_v$. Для связи в направлении транспортной сети величина потерь по времени определяется суммой двух вероятностей – вероятности P_v и вероятности занятости V условных каналов при условии, что для рассматриваемого УД имеется хотя бы один свободный условный канал связи с транзитным УД, т.е. $P_t = P_v + \sum_{i=0}^{v-1} P_{iV} = P_v + \Pi_V - P_{vV}$. Однако реально важны потери не по времени, а по вызовам, определяемые отношением интенсивностей потоков потерянных и поступающих вызовов. Для конкретного УД интенсивность поступающих внутрикластерного $\lambda_к$ и внешнего $\lambda_в$ потоков вызовов соответственно равны:

$$\lambda_к = \sum_{i=0}^{v} \alpha_1 (N - i) P_i, \quad \lambda_в = \sum_{i=0}^{v} \alpha_2 (N - i) P_i, \tag{17}$$

а интенсивности потерянных вызовов составляют: для внутрикластерного потока $\alpha_1(N - v)P_v$ и для внешнего потока $\alpha_2(N - v)P_v$ на участке до транзитного узла и $\sum_{i=0}^{v-1} \alpha_2 (N - i) P_{iV}$ – на участке к транспортной сети. Тогда потери по вызовам P_B для внутрикластерной и для внешней связи составляют соответственно:

$$P_{Вк} = \frac{\alpha_1 (N - v) P_v}{\lambda_к}, \quad P_{Вв} = \frac{\alpha_2 (N - v) P_v + \sum_{i=0}^{v-1} \alpha_2 (N - i) P_{iV}}{\lambda_к}. \tag{18}$$

Для любого УД интенсивности обслуженной нагрузки при внутрикластерной и внешней связи равны соответственно:

$$Y_к = \sum_{i=0}^{v} i P_i, \quad Y_в = \sum_{j=0}^{V} j P j. \tag{19}$$

Таким образом, используя рекуррентные соотношения (14) и (15), можно точно рассчитать потери по вызовам и соответствующую им пропускную способность в Эрлангах сети мультисервисного абонентского доступа.

В заключение отметим, что предположенный рекуррентный метод расчета числа условных каналов позволяет оценить погрешности приближенных методов расчета, поскольку дает точные результаты в частном случае симметричности сети доступа, т.е. при одинаковых емкостях узлов доступа и одинаковых параметрах абонентской нагрузки каждого узла.

Литература

1. *Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л.* Теория распределения информации. – М.: Радио и связь, 1985. – 180 с.
2. *Крылов В.В., Самохвалова С.С.* Теория телетрафика и ее приложения. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.
3. Телекоммуникационные системы и сети / *В.В. Величко, Е.А. Субботин, В.П. Шувалов, А.Ф. Ярославцев.* – Т. 3. Мультисервисные сети. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 592 с.
4. *Шнепс М.А.* Системы распределения информации. Методы расчета: Справочное пособие. – М.: Связь, 1979. – 312 с.
5. *Ершов В.А., Ершова Э.Б., Ковалев В.В.* Метод расчета пропускной способности звена Ш-ЦСИС с технологией АТМ при мультисервисном обслуживании // Электросвязь. – 2000. – № 3. – С. 20-23.
6. *Лившиц Б.С., Фидлин Л.В.* Системы массового обслуживания с конечным числом источников. – М.: Связь, 1968. – 232 с.