УДК 681.322

Ткаченко В.Г.
Tkachenco V.G.

ОТКАЗЫ ЦИФРОВЫХ СХЕМ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОТОНННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

DIGITAL CIRCUIT REFUSALS AND MONOTONOUS BOOLEAN FUNCTION REPRESENTATIONS

Аннотация. На основе проведенных исследований показано, что в случае использования при синтезе цифровых устройств монотонных булевых функций вместо произвольных булевых функций достигается уменьшение количества возможных отказов, т.е. повышение надежности работы синтезируемого устройства. В работе на основе алгебраического и комбинаторного подходов достаточно полно исследованы основные свойства монотонных булевых функций (доказано 10 лемм), показана их связь с различными областями математики, указано девять представлений этих функций, введены понятия покрывающих и покрываемых множеств, минимальных и максимальных входных наборов.

Summary. Based on conducted researches we can make a conclusion, that in case the synthesis of digital devices of monotonous Boolean functions is used instead of any Boolean functions, the number of possible refusals decreses, i.e. raise of a reliability of work of a synthesized device is achieved. In work that is based on algebraic and combinatorial approaches, basic properties of monotonous Boolean functions are investigated completely enough (10 lemmas are proved), their connection with various areas of mathematics is presented, nine representations of these functions are indicated, the concepts of covering and covered sets, minimum and maximum input data gatherings are entered.

В настоящее время значительно расширилась сфера применения цифровых схем. В области телекоммуникаций эти схемы широко используются при сжатии и кодировании передаваемой информации, при цифровой коммутации, в маршрутизаторах и шлюзах. В связи с этим возникает проблем повышения надежности работы цифровых схем.

Традиционным подходом к повышению надежности является усложнение схем контроля, применение различных диагностических тестов [1]. Это приводит к удорожанию электронных изделий и, как следствие, ограничению их применения. В работах [2 … 5] предложен алгебраический подход, на основе которого разработан новый элементный базис для устройств обработки и преобразования информации повышенной надежности. При этом были исследованы и продвинуты на новый уровень такие области математики, как комплементарная алгебра, предикатная алгебра выбора, аддитивно-мультипликативная алгебра. Для практического применения нового базиса требуются большие затраты, разработка новых стандартов и новых технологий. В [6] предложен комбинаторный подход для синтеза специальных классов булевых функций, в частности функций, удовлетворяющих критерию строгого лавинного эффекта. Комбинаторный подход позволяет производить синтез функций в традиционном элементном базисе.

Однако одного комбинаторного подхода недостаточно для класса монотонных булевых функций [7], так как теория этих функций слабо представлена в литературе, а многие вопросы, касающиеся классификации этих функций, вычисления числа функций заданного класса, алгоритмов перехода к соседним функциям, связи этих функций с другими областями математики, вообще не рассматриваются.

Целью настоящей работы является показать, что повышения надежности цифровых электронных схем можно достигнуть в традиционно используемом элементном базисе за счет более широкого использования при их синтезе класса монотонных булевых функций.

1. Минимальные входные наборы монотонных булевых функций. Булева решетка [8, 9] ранга n определяется как дистрибутивная решетка всех подмножеств некоторого множества $X=\{s_1, \ldots, s_n\}$ из n элементов. Так как существует однозначное соответствие (показано ниже) между входными наборами булевой функции от n переменных и подмножествами множества X из n элементов, то элементы булевой решетки можно пометить соответствующими наборами. На рис. 1 изображены такие решетки для n = 2, 3, 4 и 5.

Каждый входной набор представляет собой слово, на каждой из n позиций которого находится 0 или 1. Позиции входных наборов будем нумеровать от 0 до n-1, начиная справа. На рис. 1 каждый входной набор a соответствует некоторому подмножеству $S(a)$ множества X из n элементов.

Каждая позиция в наборе соответствует элементу множества или переменной булевой функции (i позиция t_i соответствует $i + 1$ элементу s_{i+1} или $i + 1$ переменной x_{i+1}). Если на i позиции стоит 1, то $i + 1$ элемент присутствует в соответствующем подмножестве (значение $i + 1$ переменной равно 1), а если 0, то отсутствует (значение $i + 1$ переменной равно 0). Каждой булевой функции от n переменных соответствует некоторое подмножество элементов соответствующей решетки, т.е. множество входных наборов, на которых булева функция равна единице. Верно и обратное, каждому подмножесту элементов решетки отвечает некоторая булева функция. Назовем такое представление первым представлением булевой функции.

Так как множество из n элементов содержит 2^n подмножеств, то булева решетка ранга n состоит из 2^n элементов. На верхнем уровне такой решетки находится подмножество из всех элементов множества (т.е. само множество из n элементов), а на нижнем подмножество без элементов (пустое подмножество). Если пронумеровать уровни решетки от 0 до n, начиная сверху, то на i-м уровне находятся C_n^i подмножеств (здесь и далее C_n^i – число сочетаний из n элементов по i) из $n - i$ элементов или C_n^i входных наборов, содержащих $n - i$ единиц и i нулей. Всего булева решетка из 2^n элементов содержит $n + 1$ уровень.

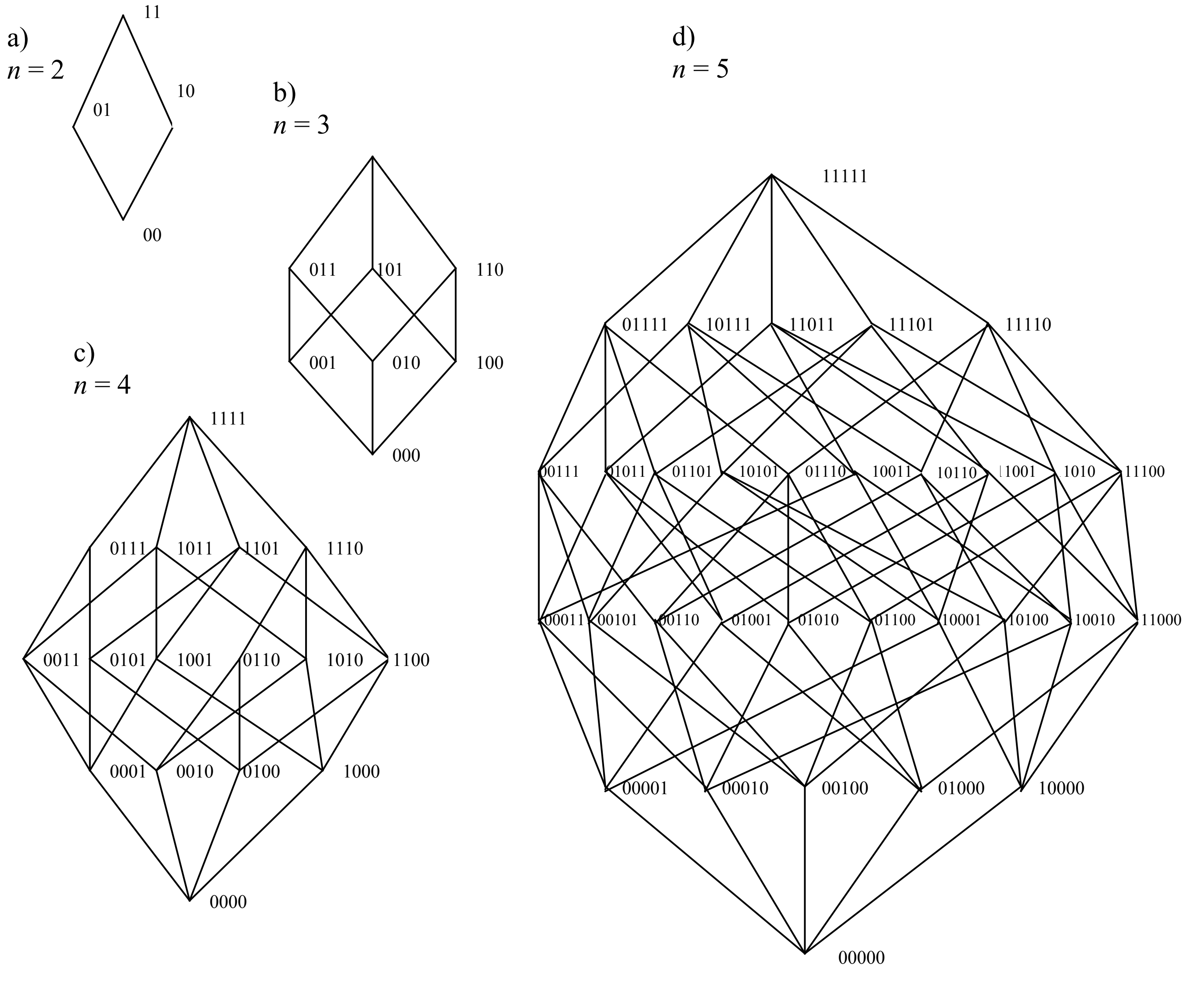

Рисунок 1 – Решетки подмножеств множества из n элементов

Будем говорить, что входной набор a (на i уровне) покрывает входной набор b (на j уровне) [7], если подмножество, соответствующее входному набору a, содержит в себе подмножество, соответствующее входному набору b. В этом случае $i < j$ и элемент a связан в решетке с элементом b ломаной линией из $i - j$ отрезков. Из описания представления ясно, что на всех тех позициях, на которых в наборе b располагаются $n - j$ единиц, в наборе a также располагаются единицы. Аналогично, на всех тех позициях, на которых в наборе a располагаются i нулей, в наборе b также располагаются нули. Сокращенно отношение a покрывает b или b покрывается a будем записывать $a > b$ или $b < a$. Из определения следует, что рассматриваемое отношение является рефлексивным (всегда верно $a > a$ и $a < a$) и транзитивным (если $c < b$ и $b < a$, то $c < a$).

Два набора a и b называются соседними [7], если один из них покрывает другой, например $a > b$, и они расположены на двух последовательных уровнях, например, если набор a расположен на i уровне, то набор b расположен на $i + 1$ уровне. Соседние наборы различаются только в одной позиции. В том наборе, который находится на верхнем уровне, в этой позиции находится 1, а в том, что находится на нижнем, в этой же позиции находится 0.

Входной набор a назовем минимальным для булевой функции f, если $f(a) = 1$ и $f(x) = 0$ для любого $x < a$.

Назовем покрывающим множеством элемента решетки a, расположенного на i уровне, множество всех элементов x решетки таких, что $a < x$. Обозначим покрывающее множество элемента a через $P(a)$. Любой элемент c, расположенный на j уровне и принадлежащий $P(a)$, можно рассматривать как подмножество из $n - j$ элементов, которое состоит из двух подмножеств: подмножества из $n - i$ элементов, соответствующего элементу a, и подмножества, содержащего остальные $(n - j) - (n - i) = i - j$ элементов. Когда x пробегает все элементы покрывающего множества $P(a)$, второе подмножество пробегает все подмножества множества, состоящего из $n - (n - i) = i$ элементов и являющегося дополнением $X \backslash S(a)$ к подмножеству $S(a)$, соответствующему элементу a. Таким образом, покрывающее множество $P(a)$ элемента a, расположенного на i уровне, содержит 2^i элементов, из которых на j уровне расположено C_i^j элементов. В теории решеток покрывающее множество называют еще главным дуальным идеалом [8], главным коидеалом, главным фильтром [9].

Для любых двух элементов булевой решетки c и d определены элементы $c \vee d$ и $c \wedge d$ (дизъюнкция и конъюнкция элементов c и d) как объединение и пересечение соответствующих этим элементам подмножеств. Для входных наборов этим операциям отвечают побитное логическое сложение (логическое ИЛИ) и логическое умножение (логическое И) наборов c и d . Если набор c покрывает набор d , то $c \vee d = c$ и $c \wedge d = d$. В противном случае наборы $c \vee d$ и $c \wedge d$ отличны от наборов c и d .

Лемма 1. Пересечение покрывающих множеств $P(a)$ и $P(b)$, элементов a и b соответственно, является покрывающим множеством элемента $a \vee b$, т.е.:

$$P(a) \cap P(b) = P(a \vee b). \tag{1}$$

Доказательство. Элементу $a \vee b$ соответствует подмножество, являющееся объединением подмножеств, соответствующих элементам a и b. Поэтому $a \vee b > a$ и $a \vee b > b$. Отсюда $a \vee b$ принадлежит покрывающим множествам $P(a)$ и $P(b)$, а значит и их пересечению $P(a) \cap P(b)$. Из транзитивности отношения покрытия следует, что множество $P(a \vee b)$ содержится в $P(a) \cap P(b)$. Обратно, пусть некоторый элемент c принадлежит $P(a) \cap P(b)$. Тогда подмножество, соответствующее элементу c содержит подмножества, соответствующие элементам a и b, а значит содержит и их объединение, соответствующее элементу $a \vee b$. Отсюда $c > a \vee b$ и значит c принадлежит $P(a \vee b)$. Следовательно, множество $P(a) \cap P(b)$ содержится во множестве $P(a \vee b)$ и доказываемое равенство верно.

Функция f называется монотонной булевой функцией [7], если для любых двух входных наборов, таких что $a > b$, имеем $f(a) \geq f(b)$.

Лемма 2. Функция f является монотонной булевой функцией, тогда и только тогда, когда из $f(a) = 1$ для некоторого входного набора a следует, что $f(x) = 1$ для любого элемента x, принадлежащего покрывающему множеству $P(a)$ элемента a.

Доказательство. Если функция f является монотонной булевой функцией и $f(a) = 1$ для некоторого входного набора a, то по определению покрывающего множества $P(a)$ для любого элемента $x \in P(a)$ имеем $x > a$, а значит $f(x) \geq f(a) = 1$, т.е. $f(x) = 1$. Обратно, пусть выполняется условие леммы для любого входного набора b такого, что $f(b) = 1$. Тогда для любого элемента $x > b$ имеем $x \in P(b)$ и $f(x) = 1$. Но это и означает, что из $a > b$ следует $f(a) \geq f(b)$, так как, если $f(b) = 0$, то значение $f(a)$ несущественно.

Следствие. Монотонная булева функция f в первом представлении является объединением покрывающих множеств своих минимальных входных наборов или пустым множеством (для нулевой функции, равной 0 на всех входных наборах).

Семейством подмножеств Шпернера [10] $A=\{A_1, A_2, \dots , A_m\}$ множества X из n элементов называется m таких подмножеств, что для любой пары этих подмножеств одно подмножество не содержится в другом (при этом одно из подмножеств может содержаться в объединении нескольких других). Допускается, что семейство подмножеств может состоять из одного подмножества и даже из пустого числа подмножеств.

Лемма 3. Каждому семейству подмножеств Шпернера множества X из n элементов соответствует одна монотонная булева функция от n переменных и, обратно, каждой монотонной булевой функции от n переменных соответствует семейство подмножеств Шпернера множества X из n элементов.

Доказательство. Пусть А = {A_1, A_2, … , A_m} семейство подмножеств Шпернера множества X из n элементов, а a_1, a_2, … , a_m соответствующие входные наборы в решетке подмножеств множества из n элементов (рис. 1). Возьмем объединение f, покрывающих множеств этих наборов $P(a_1)$, $P(a_2)$, … … $P(a_m)$. По определению f первое представление некоторой булевой функции от n переменных. Так как ни одно из подмножеств Шпернера не содержится в другом, то ни один из наборов a_1, a_2, … , a_m не покрывает другой и поэтому они будут минимальными наборами функции f . По следствию из леммы 2 функция f является монотонной. Обратно, согласно следствию из леммы 2 возьмем минимальные наборы a_1, a_2, … , a_m монотонной булевой функции от n переменных (для нулевой функции таких наборов не будет). Образуем семейство из соответствующих этим наборам подмножествам $S(a_1)$, $S(a_2)$, … , $S(a_m)$. Так как ни один из наборов не покрывает другой, то ни одно из соответствующих подмножеств не содержится в другом и их семейство является семейством Шпернера.

Назовем представление монотонной булевой функции семейством подмножеств Шпернера (или множеством минимальных наборов) вторым представлением этой функции. В отличие от первого, это представление подходит только для монотонных функций.

Пример 1. Выберем на рис. 1,d монотонную булеву функцию f, равную единице на входных наборах 00011, 00111, 01011, 10011, 01111, 10111, 11011, 11111, 11100, 11101 и 11110. Этой функции соответствует семейство подмножеств Шпернера $\{\{s_2,\ s_1\}\{s_5,\ s_4,\ \ s_3\}\}$ из двух подмножеств или соответствующие этим подмножествам два минимальных набора 00011 и 11100.

Шпернер доказал неравенство [10] (здесь $[n/2]$ целая часть от деления n на 2),

$$m \leq C_n^{[n/2]}, \tag{2}$$

которое связывает число подмножеств m в семействе Шпернера и число элементов n в исходном множестве. Из свойств бинома Ньютона следует, что максимальное значение m достигается, если взять в качестве семейства Шпернера все подмножества, соответствующие элементам уровня $n/2$ булевой решетки для четного n либо уровня $(n – 1)/2$ или $(n + 1)/2$ для нечетного n.

Упорядочим входные наборы булевой функции f от n переменных по убыванию (как двоичные числа). Вектор последовательных значений функции на всех входных наборах (каждый из n бит) сам представляет двоичный набор (из 2^n бит). Это означает, что всего существует 2 в степени 2^n функций от n переменных. Для $n = 2$ число функций равно $2^4 = 16$, для $n = 3 \cdot 2^8 = 256$, для $n = 4$ $2^{16} = 65536$ и для $n = 5$ $2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296$. Так же, как и входной набор, функцию f от n переменных можно представить элементом a решетки подмножеств множества из 2^n элементов или соответствующим этому элементу подмножеством $S(a)$ множества из 2^n элементов. Верно и обратное, каждому элементу a решетки подмножеств множества из 2^n элементов или подмножеству множества из 2^n элементов соответствует некоторая булева функция f от n переменных. Назовем такое представление булевой функции третьим представлением этой функции от n переменных. Рассматриваемая решетка имеет $2^n + 1$ уровня, которые нумеруются от 0 до 2^n, начиная сверху. На i уровне этой решетки располагаются булевы функции, равные 0 на i входных наборах и равные 1 на остальных $2^n – i$ наборах. Всего число функций на i уровне равно числу сочетаний из 2^n по i.

Пример 2. Монотонная булева функция из примера 1 имеет в качестве третьего представления набор значений 11111000 10001000 10001000 10001000 или подмножество $\{s_{32}, s_{31}, s_{30}, s_{29}, s_{28}, s_{24}, s_{20}, s_{16}, s_{12}, s_8, s_4\}$ множества из 32 элементов.

Для любых двух булевых функций f_1 и f_2 определены функции $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \wedge f_2$ (дизъюнкция и конъюнкция функций f_1 и f_2) как объединение и пересечение соответствующих этим функциям подмножеств (являющихся первым представлением этих функций). Для наборов значений этим операциям отвечают побитное логическое сложение (логическое ИЛИ) и логическое умножение (логическое И) наборов значений f_1 и f_2. Это определение полностью совпадает с определением дизъюнкции и конъюнкции для входных наборов.

Лемма 4. Дизъюнкция $f_1 \vee f_2$ и конъюнкция $f_1 \wedge f_2$ (или f_1f_2) монотонных булевых функций f_1 и f_2 являются монотонными булевыми функциями.

Доказательство. Пусть $f_1 \vee f_2(a) = 1$ для некоторого входного набора a. Тогда по определению дизъюнкции либо $f_1(a) = 1$ либо $f_2(a) = 1$. Тогда либо $f_1(x) = 1$ либо $f_2(x) = 1$ для любого x, принадлежащего покрывающему множеству входного набора a (по лемме 2). Отсюда следует $f_1 \vee f_2(x) = 1$ и согласно лемме 2 $f_1 \vee f_2$ является монотонной булевой функцией. Точно так же доказывается, что конъюнкция $f_1 \wedge f_2$ монотонных булевых функций f_1 и f_2 является монотонной булевой функцией.

Пост доказал [7] более общее утверждение о том, что монотонные булевы функции образуют замкнутый класс. Это значит, что если в монотонную булевую функцию f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных вместо всех переменных подставить какие-нибудь монотонные булевые функции от m переменных, то получается монотонная булевая функция от m переменных.

Следствие. Монотонные булевы функции от n переменных образуют подрешетку решетки подмножеств (булевой решетки) множества из 2^n элементов.

Булева функция f_2 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ (здесь черта сверху обозначает логическую операцию отрицания) называется двойственной [7] к булевой функции f_1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначим ее $D(f_1)$. Отрицание функции означает, что в наборе значений функции нули преобразуются в единицы, а единицы в нули (операция инвертирования набора). Отрицание значений переменных означает, что в каждом входном наборе нули преобразуются в единицы, а единицы в нули. При этом порядок убывания на входных наборах меняется на порядок возрастания. Таким образом, чтобы перейти от некоторой функции к двойственной нужно инвертировать набор значений функции, а затем записать его в обратном порядке. Отсюда понятно, что взятие двойственной функции от двойственной приводит к исходной функции. Если набор значений исходной функции содержит i нулей и расположен на i уровне, то набор значений функции содержит $2^n - i$ нулей и расположен на $2^n - i$ уровне.

Булева функция, двойственная сама к себе, называется самодвойственной. Самодвойственная булева функция от n переменных равна единице на 2^{n-1} входных наборах и равна нулю тоже на 2^{n-1} входных наборах.

В качестве базовых монотонных булевых функций от n переменных (в дальнейшем будем называть эти функции просто базовыми) выделим функции, первое представление которых является покрывающим множеством одного из элементов $n - 1$ уровня, а второе представление самим элементом $n - 1$ уровня (или подмножеством множества из n элементов, состоящим из одного элемента). Базовые функции являются монотонными согласно лемме 2. Таких функций будет n, так как на $n - 1$ уровне решетки находится n элементов. Каждая такая функция зависит только от одной переменной, она равна единице, когда эта переменная равна единице и нулю в противоположном случае. Так как покрывающее множество входного набора на $n - 1$ уровне состоит из 2^{n-1} входных наборов, то эта функция равна 1 на 2^{n-1} входных наборах и равна 0 тоже на 2^{n-1} входных наборах. Набор, полученный в результате инвертирования одного из наборов покрывающего множества не лежит в этом множестве (он отличается значением одной переменной от всех наборов покрывающего множества), поэтому любая базовая функция является самодвойственной. Обозначим базовую функцию, зависящую от первой переменной x_1 через A, от второй x_2 через B, от третьей x_3 через C, от четвертой x_4 через D и от пятой x_5 через E. Обозначая набор значений функции f через Im(f). Тогда:

для $n = 2$ Im(A) = 1010, Im(B) = 1100;
для $n = 3$ Im(A) = 10101010, Im(B) = 11001100, Im(C) = 11110000;
для $n = 4$ Im(A) = 10101010 10101010, Im(B) = 11001100 11001100,
Im(C) = 11110000 11110000, Im(D) = 11111111 00000000;
для $n = 5$ Im(A) = 10101010 10101010 10101010 10101010,
Im(B) = 11001100 11001100 11001100 11001100,
Im(C) = 11110000 11110000 11110000 11110000,
Im(D) = 11111111 00000000 11111111 00000000,
Im(E) = 11111111 11111111 00000000 00000000.

Пример **3.** На рис. 1,а представлена решетка входных наборов функции от двух переменных. Тогда решетку на рис. 1,с можно рассматривать не только как решетку входных наборов функции от четырех переменных, но и как решетку наборов значений функций от двух переменных. В этом случае каждый элемент решетки соответствует некоторой булевой функции от 2 переменных. Например, базовым функциям A и B в этой решетке соответствуют элементы 1010 и 1100. Кроме этих элементов монотонным булевым функциям соответствуют элементы 0000, 1111, 1000 и 1110. Функции 0000 (нулевая функция) и 1111 (единичная функция) не зависят от входных переменных и являются самодвойственными. Функции 1000 и 1110 двойственны друг к другу. Первая из них равна $A \wedge B$, т.е. конъюнкции базовых функций A и B, а вторая равна $A \vee B$, т.е. дизъюнкции базовых функций A и B.

Таким образом, дизъюнкция и конъюнкция от двух переменных двойственны друг другу. На рис. 2,a изображена подрешетка монототоных булевых функций от двух переменных, а на рис. 2,b подрешетка тех из них, которые выражаются через базовые функции A и B.

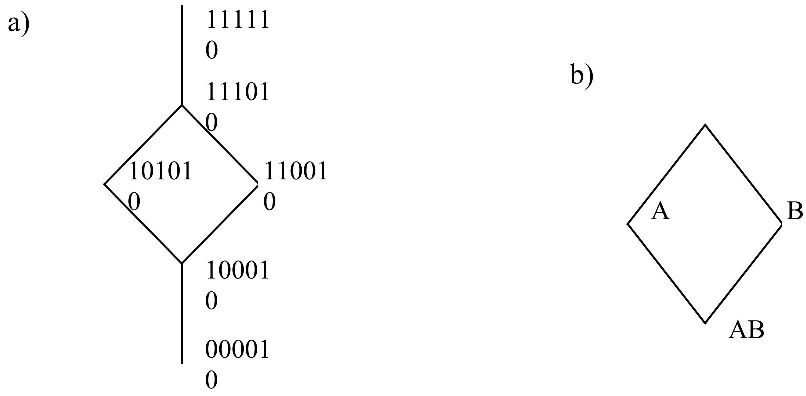

Рисунок 2 – Монотонные булевы функции от двух переменных

Лемма 5. Любая монотонная булева функция от n переменных, за исключением нулевой и единичной, может быть представлена как выражение, содержащее только базовые функции, операции дизъюнкции и конъюнкции, а также скобки.

Доказательство. По определению дизъюнкция и конъюнкция булевых функций соответствуют объединению и пересечению входных наборов, на которых эти функции равны единице. Из следствия к лемме 2 следует, что монотонная булева функция представляется объединением, покрывающих множеств своих минимальных входных наборов, или пустым множеством наборов (нулевая функция). Поэтому достаточно доказать, что указанное в доказываемой лемме представление имеет любая функция с одним минимальным ненулевым набором, т.е. функция, соответствующая покрывающему множеству одного из входных наборов, кроме набора, находящегося на n-м уровне и содержащим только нули (покрывающему множеству этого набора соответствует единичная функция). Выполняя над несколькими функциями с одним минимальным набором операцию дизъюнкции можно получить любую монотонную функцию. Базовые функции $n - 1$ уровня имеют один минимальный набор и являются монотонными. Допустим лемма доказана для функций с одним минимальным набором на $i + 1$ уровне. Докажем ее для функций с одним минимальным набором на i уровне.

Каждый входной набор c на i уровне является соседним с $n - i$ входными наборами $i + 1$ уровня. Это означает (по определению соседних наборов), что он отличается от любого из них только одной единицей и, следовательно, является дизъюнкцией любых двух из них, например a и b. В лемме 1 доказано, что $P(a) \cap P(b) = P(a \vee b) = P(c)$, т.е. покрывающее множество произвольного элемента i уровня равно пересечению покрывающих множеств двух элементов $i + 1$ уровня. Но это означает, что функция с одним минимальным набором c равна конъюнкции функций с одним минимальным набором a и одним минимальным набором b соответственно.

Следствие. Фактически, из доказательства леммы 5 следует, что любая монотонная булева функция от n переменных, за исключением нулевой и единичной, может быть представлена в виде дизъюнкции функций с одним минимальным входном набором, которые в свою очередь представляются конъюнкцией одной или нескольких базовых функций. Такое представление единственно. Назовем его четвертым представлением или дизъюнктивной формой монотонной булевой функции от n переменных.

Пример 4. Монотонная функция из примеров 1 и 2 имеет дизъюнктивную форму $(A \wedge B) \vee (C \wedge D \wedge E)$ (или $AB \vee CDE$).

2. Максимальные входные наборы монотонных булевых функций. Лемма 6. Подрешетка монотонных булевых функций от n переменных (монотонные функции образуют подрешетку по следствию из леммы 4), за исключением нулевой и единичной, является свободной дистрибутивной решеткой, порожденной n элементами (или ранга n).

Доказательство. По определению базовых функций, любая функция, являющаяся выражением от базовых функций, не изменится, если функции A, B, C, D, E, … заменить в этом выражении на переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, … соответственно. Верно и обратное, если в любом выражении, состоящем из n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, операций дизъюнкции и конъюнкции, а также скобок, заменить все переменные на базовые функции, то функция не изменится. Но любое такое выражение, используя законы булевой алгебры, несложно привести к некоторой дизъюнктивной форме монотонной булевой функции. Следовательно, множество всех монотонных булевых функций от n переменных, за исключением нулевой и единичной, совпадает с множеством всех булевых функций от n переменных, записываемым в виде выражений, состоящим из n переменных $x_1, x_2, \ldots$ …, x_n, операций дизъюнкции и конъюнкции, а также скобок. Но это и означает, что это множество представляет собой свободную дистрибутивную решетку, порожденную n элементами.

Следствие. Свободная дистрибутивная решетка ранга n является подрешеткой решетки подмножеств множества из 2^n элементов.

Уровни в свободной дистрибутивной решетке, порожденной n элементами, будем нумеровать так же, как и в решетке, подрешеткой которой она является, т.е. на 1-м уровне находится дизъюнкция всех базовых функций, а на последнем $2^n - 1$ уровне находится конъюнкция этих же функций. На i уровне находятся монотонные булевы функции, равные нулю на i входных наборах и равные единице на остальных $2^n - i$ наборах. В частности, базовые функции находятся на 2^{n-1} уровне. Обозначим общее число в свободной дистрибутивной решетке, порожденной n элементами, через $K(n)$, а число элементов, расположенных на i уровне этой решетки через $K(n, i)$. При этом выполняется равенство

$$K(n)=\sum_{i=1}^{2^\wedge n-1} K(n, i). \quad (3)$$

Пример 5. На рис. 3,a показана свободная дистрибутивная решетка, порожденная тремя базовыми функциями от 3 переменных. Приведены набор значений и дизъюнктивная форма каждой функции. Здесь $K(3) = 18$, $K(3,1) = 1$, $K(3,2) = 3$, $K(3,3) = 3$, $K(3,4) = 4$, $K(3,5) = 3$, $K(3,6) = 3$, $K(3,7) = 1$. На рис. 3,b показаны семейства подмножеств Шпернера для этих же функций.

Лемма 7. Функция $f_2 = D(f_1)$, двойственная к монотонной булевой функции f_1, сама является монотонной булевой функцией и получается из дизъюнктивной формы f_1 заменой всех дизъюнкций на конъюнкции, а конъюнкций на дизъюнкции.

Доказательство. По определению $D(f_1\,(x_1, \ldots, x_n)) = \overline{f}_1\,(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Докажем по индукции. Лемма верна для базовых функций, так как они являются самодвойственными и их дизъюнктивная форма не содержит операций дизъюнкции и конъюнкции. Пусть функция f_1 в виде дизъюнктивной формы может быть записана в виде $f_1 = f_3 \vee f_4$ и лемма выполняется для функций f_3 и f_4. Тогда $D(f_1(x_1, \ldots, x_n)) = \neg\ (f_3\,(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \vee f_4(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) = \overline{f}_3(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \wedge \overline{f}_4(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)) = D(f_3\,(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)) \wedge D(f_4(x_1, \ldots, x_n))$ (здесь знак $\neg$ обозначает такую же логическую операцию отрицания, как и черта сверху). Предпоследнее равенство выполняется по закону де Моргана. Последнее выражение действительно получается из дизъюнктивной формы f_1 заменой всех дизъюнкций на конъюнкции, а конъюнкций на дизъюнкции. Оно является монотонной булевой функцией, так как при доказательстве леммы 6 было показано, что монотонной булевой функцией является любая булевая функция от n переменных, записываемая в виде выражения, состоящего из n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, операций дизъюнкции и конъюнкции, а также скобок. Аналогично доказывается, если функция f_1 в виде дизъюнктивной формы может быть записана в виде $f_1 = f_3 \wedge f_4$.

Выражение для функции f_2, двойственной к функции f_1, которое получается в результате применения к дизъюнктивной форме f_1 леммы 7, называется *конъюнктивной формой функции f_2*. Представление монотонной булевой функции в виде конъюнктивной формы единственно. Назовем его пятым представлением монотонной булевой функции от n переменных.

Следствие 1. Если в конъюнктивной форме монотонной булевой функции заменить все дизъюнкции на конъюнкции, а все конъюнкции на дизъюнкции, то получим дизъюнктивную форму двойственной функции.

Следствие 2. Число монотонных булевых функций от n переменных, равных единице на $2^n - m$ входных наборах, совпадает с числом монотонных булевых функций, равных единице на m входных наборах. Другими словами, число элементов на m уровне свободной дистрибутивной решетки, порожденной n элементами, равно числу элементов на $2^n - m$ уровне этой решетки, т.е.

$$K(n, m) = K(n, 2^n - m). \quad (4)$$

Конъюнктивную форму монотонной булевой функции можно ввести другим способом, чем тот, который был применен в лемме 7. Для этого введем понятия максимальных входных наборов для данной булевой функции и покрываемого множества $R(a)$ для каждого входного набора a.

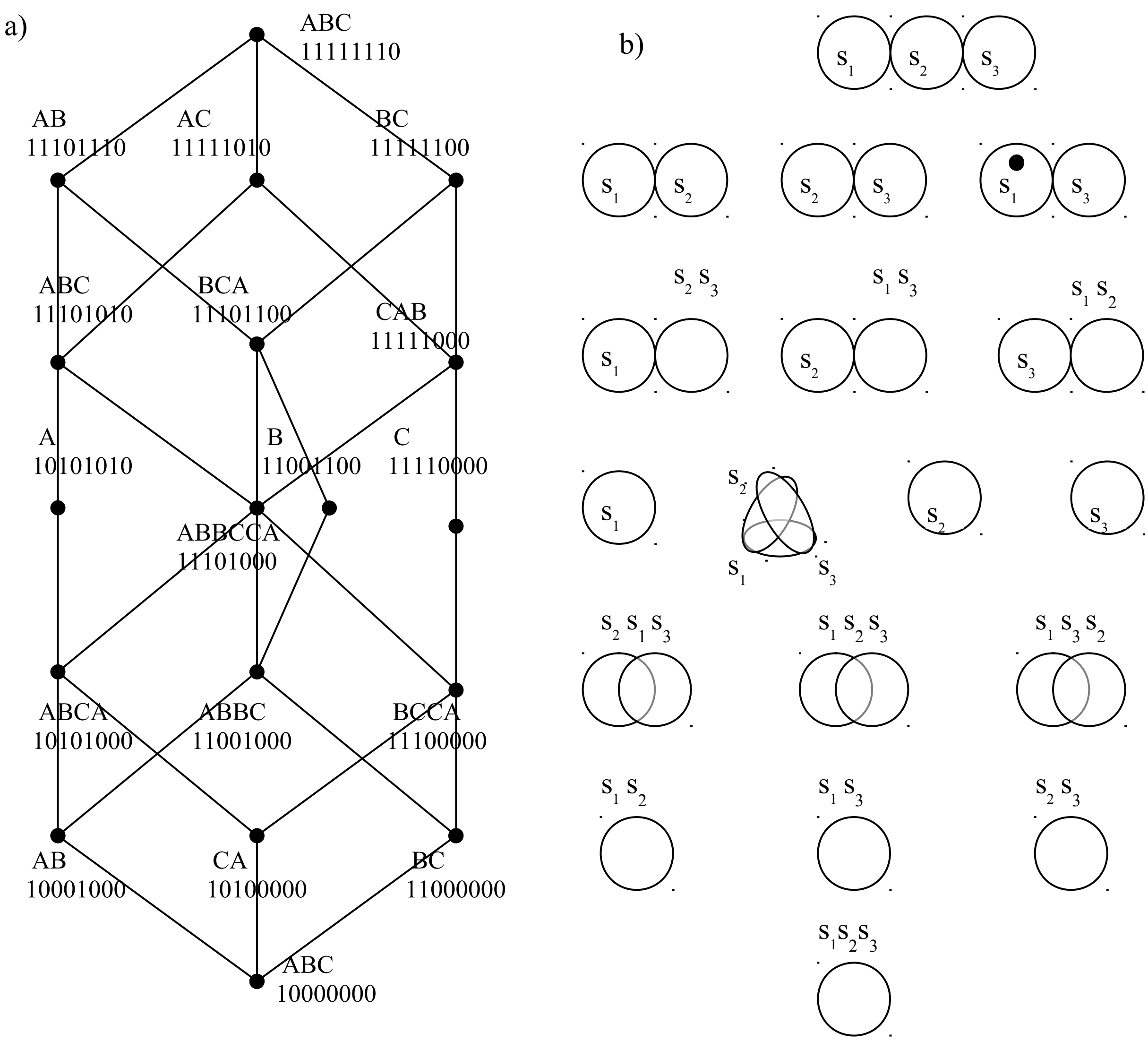

Рисунок 3 – Свободная дистрибутивная решетка и семейства подмножеств Шпернера для монотонных булевых функций от трех переменных

Набор a называется максимальным для булевой функции f, если $f(a) = 0$ и $f(x) = 1$ для любого $x > a$.

Назовем покрываемым множеством элемента решетки a, расположенного на i уровне булевой решетки из 2^n элементов, множество всех элементов x решетки таких, что $x < a$. Обозначим покрываемое множество элемента a через $R(a)$. Любой элемент c, расположенный на j уровне и принадлежащий $R(a)$, можно рассматривать как подмножество из $n - j$ элементов, которое является подмножеством подмножества $S(a)$, соответствующего элементу a и состоящего из $n - i$ элементов. Таким образом, покрываемое множество $R(a)$ элемента a, расположенного на i уровне, содержит 2^{n-i} элементов, из которых на j уровне расположено C_{n-i}^{n-j} элементов. В теории решеток покрываемое множество называют еще *главным идеалом* [8, 9].

Лемма 8. Пересечение покрываемых множеств $R(a)$ и R(b), элементов a и b соответственно, является покрываемым множеством элемента $a \wedge b$, то есть:

$$R(a) \cap R(b) = R(a \wedge b). \tag{5}$$

Доказательство. Элементу $a \wedge b$ соответствует подмножество $S(a \wedge b)$, являющееся пересечением подмножеств $S(a)$ и $S(b)$, соответствующих элементам a и b (по определению подмножеств $S(a)$). Поэтому $a \wedge b < a$ и $a \wedge b < b$. Отсюда $a \wedge b$ принадлежит покрываемым множествам $R(a)$ и $R(b)$, а значит и их пересечению $R(a) \cap R(b)$. Из транзитивности отношения покрытия следует, что множество $R(a \wedge b)$ содержится в $R(a) \cap R(b)$. Обратно, пусть некоторый элемент c принадлежит $R(a) \cap R(b)$. Тогда подмножество $S(c)$, соответствующее элементу c содержится в подмножествах $S(a)$ и $S(b)$, соответствующих элементам a и b, а значит содержится и в их пересечении, соответствующим элементу $a \wedge b$. Отсюда $c < a \wedge b$ и значит c принадлежит $R(a \wedge b)$. Следовательно, множество $R(a) \cap R(b)$ содержится в множестве $R(a \wedge b)$ и доказываемое равенство верно.

Лемма 9. Функция f является монотонной булевой функцией, тогда и только тогда, когда из $f(a) = 0$ для некоторого входного набора a следует, что $f(x) = 0$ для любого элемента x, принадлежащего покрываемому множеству $R(a)$ элемента a.

Доказательство. Если функция f является монотонной булевой функцией и $f(a) = 0$ для некоторого входного набора a, то по определению покрываемого множества $R(a)$ для любого элемента $x \in R(a)$ имеем $a > x$, а значит $0 = f(a) \geq f(x)$, то есть $f(x) = 0$. Обратно, пусть выполняется условие леммы для любого входного набора b такого, что $f(b) = 0$. Тогда для любого элемента x такого, что $b > x$ имеем $x \in R(b)$ и $f(x) = 0$. Но это и означает, что из $b > a$ следует $f(b) \geq f(a)$, так как если $f(b) = 1$, то значение $f(a)$ несущественно.

Следствие 1. Монотонная булева функция f в первом представлении является дополнением к объединению покрываемых множеств своих максимальных входных наборов или дополнением к пустому множеству (для единичной функции, равной 1 на всех входных наборах).

Следствие 2. Так как подмножество $S(a)$, соответствующее некоторому максимальному входному набору a функции f не содержится ни в одном из подмножеств, соответствующим другим максимальным входным наборам этой же функции, то подмножества, соответствующие всем максимальным входным наборам функции f, представляют собой семейство подмножеств Шпернера точно так же, как и подмножества, соответствующие всем максимальным входным наборам функции f (хотя эти два семейства подмножеств Шпернера не совпадают друг с другом).

Лемма 10. Для любой монотонной булевой функции (кроме нулевой и единичной) множеству из m ее максимальных входных наборов взаимно однозначно соответствует конъюнктивная форма этой функции, состоящая из m дизъюнкций.

Доказательство. Пусть функция f имеет один максимальный входной набор a, в котором какие-то k переменных из $x_n, \ldots, x_1$ равны 1, а остальные $n - k$ переменных равны 0. Тогда по определению монотонной булевой функции она будет равна 0 на всех наборах, в которых все из $n - m$ переменных равны 0. С другой стороны, она будет равна 1 на любом входном наборе, в котором одна из $n - k$ переменных равна 1. Таким образом, функция f с одним максимальным входным набором равна дизъюнкции $n - k$ базовых функций, соответствующих переменным, на которых эта функция равна 0. Если же функция f имеет m максимальных входных наборов, то по следствию к лемме 9 она является дополнением к объединению m покрываемых множеств своих максимальных входных наборов. Согласно закону де Моргана это означает, что она в первом представлении является пересечением дополнений к покрываемым множествам своих максимальных входных наборов, т.е. пересечением первых представлений m функций, имеющих единственный максимальный входной набор. Согласно определению конъюнкции функций, функция f является конъюнкцией m функций, имеющих единственный максимальный входной набор, т.е. конъюнкцией m дизъюнкций базовых функций. Но это и есть конъюнктивная форма, так как было доказано, что эта форма единственна с точностью до перестановки базовых функций в дизъюнкциях и дизъюнкций в конъюнкции.

Следствие. Количество максимальных входных наборов у монотонной булевой функции равно числу дизъюнкций в конъюнктивной форме. Ранее было также доказано, что количество минимальных входных наборов у монотонной булевой функции равно числу конъюнкций в дизъюнктивной форме.

Назовем представление монотонной булевой функции в виде множества максимальных наборов шестым представлением этой функции.

Ранее каждому входному набору a от n переменных было сопоставлено подмножество множества из n элементов $S(a)$. Теперь каждому входному набору i, кроме наборов из всех нулей и из всех 1, сопоставим элемент s_i множества M из $2^n - 2$ элементов. Входные наборы из всех нулей и из всех единиц мы отбрасываем потому, что монотонные булевы функции, выражаемые через базовые переменные, на наборе из всех нулей равны нулю, а на наборе из всех единиц равны единице. Каждой монотонной булевой функции f при описанном сопоставлении будет соответствовать некоторое подмножество множества M, элементам которого соответствуют входные наборы, на которых функция f равна 1. Конъюнкции или дизъюнкции двух функций f_1 и f_2 будет при этом сопоставлено подмножество, являющееся пересечением или объединением подмножеств, соответствующим функциям f_1 и f_2 . Обозначим подмножества, соответствующие базовым функциям A, B, … через

A', B', … . Тогда каждое из подмножеств A', B', … будет содержать $2^{n-1} - 1$ элементов, а всевозможные последовательные пересечения и объединения подмножеств A', B', … дадут семейство *O* подмножеств множества M, соответствующих всем монотонным булевым функциям от *n* переменных, кроме единичной и нулевой функции. Для $n = 3$ множество *M* состоит из 6, а каждое из подмножеств A', B',… из 3 элементов. Для $n = 4$ эти числа равны 14 и 7, а для $n = 5$ равны 30 и 15 соответственно.

В терминах топологии [11] можно сказать, что задано топологическое пространство (M, *O*). Все подмножества, принадлежащие семейству *O*, называются *открытыми* и удовлетворяют трем условиям:

1) пустое множество и множество M принадлежат *O* ;

1 2) если какие-то два подмножества принадлежат *O*, то и их пересечение принадлежит *O*;

3) если любое число подмножеств принадлежит *O*, то и их объединение принадлежит *O*.

Семейство множеств A', B', … называется *предбазой топологического пространства* (M, *O*), а всевозможные непустые пересечения множеств A', B', … – его базой. Дополнение каждого открытого множества в множестве M называется *замкнутым множеством*. Для каждого подмножества U множества M определены три оператора: оператор взятия внутренности Int(U), оператор замыкания Zm(U) и граничный оператор Fr(U). Внутренностью Int(U) множества U называется наибольшее открытое множество, содержащееся в U (или объединение всех открытых множеств, содержащихся в U). Замыканием Zm(U) множества U называется наименьшее замкнутое множество, содержащее множество U (или пересечение всех замкнутых множеств, содержащих U). Границей Fr(U) множества U называется замыкание множества U за вычетом внутренности, т.е. множество Zm(U)\Int(U) [11] .

Назовем представление монотонной булевой функции в виде открытого множества топологического пространства (M, *O*) седьмым представлением этой функции.

Пример 6. На рис. 4 изображено топологическое пространство, заданное на множестве $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ с помощью множеств предбазы A', B', C', которые соответствуют базовым функциям от трех переменных A, B и C. В этом топологическом пространстве всего 64 подмножества, из них 18 открытых. Шесть открытых подмножеств образуют базу. Среди одноэлементных подмножеств только три являются открытыми. Они, вместе с тремя подмножествами предбазы A', B', C', и образуют базу топологического пространства (M, *O*). Рассмотрим, например, множество $U = \{a_1, a_3\}$. Оно не является ни открытым, ни замкнутым. Для него внутренность равна множеству $\mathrm{Int(U)} = \{a_3\}$, замыкание равно множеству $\mathrm{Zm(U)} = \{a_1, a_2, a_3\}$, а граница равна множеству $\mathrm{Fr(U)} = \mathrm{Zm(U)} \backslash \mathrm{Int(U)} = \{a_1, a_2\}$. В табл. 1 приведены монотонные булевы функции от трьох переменных (рис. 3) и соответствующие им открытые множества топологического пространства (M, *O*).

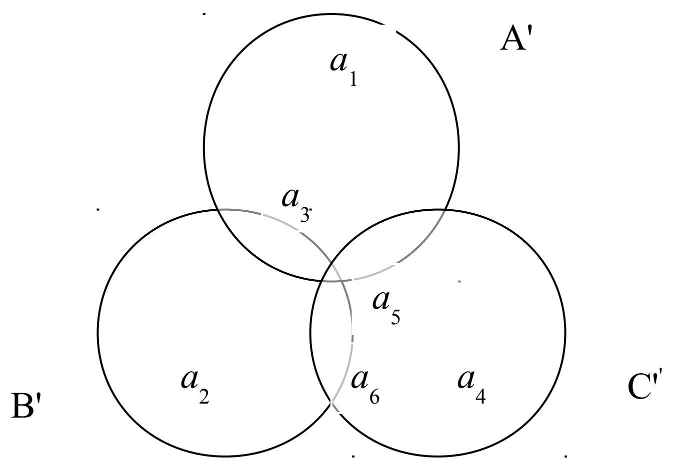

Рисунок 4 – Топологическое пространство на множестве из 6 элементов

Матрица называется (0,1) матрицей [12], если каждый ее элемент является нулем или единицей. Еще одним представлением монотонных булевых функций, удобным для целей классификации и перечисления, является представление булевых функций в виде (0,1)-матриц. Каждой строке матрицы будет соответствовать минимальный входной набор функции. Для обеспечения однозначности представления функций входные наборы в матрице упорядочены по возрастанию уровня, а внутри уровня по возрастанию входных наборов.

Таблица 1 – Функции от 3 переменных и открытые множества

№ п/п	№ ур.	Набор значений	Дизъюнктивная форма	Открытое множество
1	4	1010 1010	A	A'=$\{a_1, a_3, a_5\}$
2	4	1100 1100	B	B'=$\{a_2, a_3, a_6\}$
№ п/п	№ ур.	Набор значений	Дизъюнктивная форма	Открытое множество
3	4	1111 0000	C	C'=$\{a_4, a_5, a_6\}$
4	1	1111 1110	A∨ B∨ C	A'∪ B'∪ C'=$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
5	7	1000 0000	ABC	A'∩ B'∩ C' – пустое множество
6	2	1110 1110	A∨ B	A'∪ B'=$\{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$
7	2	1111 1010	A∨ C	A'∪ C'=$\{a_1, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
8	2	1111 1100	B∨ C	B'∪ C'= $\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
9	6	1000 1000	AB	A'∩ B'=$\{a_3\}$
10	6	1010 0000	AC	A'∩ C' =$\{a_5\}$
11	6	1100 0000	BC	B'∩ C'=$\{a_6\}$
12	3	1110 1010	A∨ BC	A'∪ (B'∩ C')=$\{a_1, a_3, a_5, a_6\}$
13	3	1110 1100	B∨ AC	B'∪ (A'∩ C')=$\{a_2, a_3, a_5, a_6\}$
14	3	1111 1000	C∨ AB	C'∪ (A'∩ B')=$\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$
15	5	1010 1000	AB∨ AC	(A'∩ B')∪ (A'∩ C')=$\{a_3, a_5\}$
16	5	1100 1000	AB∨ BC	(A'∩ B')∪ (B'∩ C')=$\{a_3, a_6\}$
17	5	1110 0000	AC∨ BC	(A'∩ C')∪ (B'∩ C')=$\{a_5, a_6\}$
18	4	1110 1000	AB∨ AC∨ BC	(A'∩ B')∪ (A'∩ C')∪ (B'∩ C')= $\{a_3, a_5, a_6\}$

Назовем представление монотонной булевой функции в виде (0,1)-матрицы восьмым представлением этой функции.

Пример 7. Восьмым представлением функции AB∨ AC∨ BC из табл. 1 будет (0,1)-матрица:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Отказы цифровых схем, синтезированных на базе монотонных булевых функций. Отказы цифровых схем, т.е. неверное значение одной из булевых функций, реализуемых схемой, возникают вследствие ошибочных значений на отдельных контактах схемы. В зависимости от повторяемости отказов они делятся на постоянные отказы и сбои [1]. В зависимости от количества контактов, на которых случаются ошибки, отказы делятся на одиночные и кратные. В большинстве случаев имеют место одиночные отказы и поэтому в дальнейшем будут рассматриваться только они. Так как в цифровых схемах используются двоичные сигналы, то ошибочное значение может быть 0 вместо 1 (ошибка типа 1→ 0) либо 1 вместо 0 (ошибка типа 0→ 1). Соответственно отказ может проявляться в неверном значении булевой функции 0 вместо 1 (отказ типа 1 → 0) либо в неверном значении 1 вместо 0 (отказ типа 0→ 1) [1]. При выделении в цифровой схеме одной из функций под ошибкой типа 0→ 1 (или типа 1→ 0) обычно понимается ошибочное значение на одном из входов этой функции.

Ошибка любого типа не всегда приводит к отказу. Если на правильном входном наборе и входном наборе, возникающем вследствие ошибки, функция имеет одно и то же значение, то отказа не происходит. Каждому возможному отказу в булевой решетке соответствует ребро, соединяющее два соседних входных набора, на одном из которых значение функции равно 1, а на другом 0. Обратно, каждому такому ребру отвечает два отказа: один отказ типа 0→ 1, а другой типа 1→ 0. Таким образом, максимально возможное количество отказов для булевой функции от *n* переменных равно удвоенному количеству ребер в соответствующей булевой решетке, т.е. удвоенному количеству ребер в n-мерном кубе. Подсчитаем это количество. Ранее показано, что количество ребер, отходящих вниз от любого входного набора, равно количеству единиц в этом наборе. Из симметрии нулей и единиц во входных наборах следует, что общее количество единиц во всех наборах равно количеству нулей. Так как у булевой функции от n переменных имеется 2^n входных набора, а в каждом входном наборе имеется n позиций, то количество ребер в n-мерном кубе равно $(n2^n)/2 = n2^{n-1}$. Отсюда максимально возможное количество отказов $p_1(n)$ для функции от n переменных равно:

$$p_1(n) = n2^n \tag{6}$$

Для любого n среди булевых функций от n переменных существует две функции с максимально возможным количеством отказов. Первая из них равна 1 на входных наборах, находящихся на четных уровнях булевой решетки, и равна 0 на остальных входных наборах. Вторая, наоборот, равна 1 на входных наборах, находящихся на нечетных уровнях булевой решетки, и равна 0 на остальных входных наборах.

Пример 8. Для трех переменных функциями с максимально возможным количеством отказов являются функция $ABC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$, равная единице на входных наборах 111, 001, 010 и 100, а также функция $AB\overline{C} \vee A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, равная единице на входных наборах 011, 101, 110 и 000. Для четырех переменных функциями с максимально возможным количеством отказов являются функция

$$ABCD \vee AB\overline{C}\,\overline{D} \vee A\overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}BC\overline{D} \vee A\overline{B}\,\overline{C}D \vee \overline{A}B\overline{C}D \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D},$$

равная единице на входных наборах 1111, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100 и 0000, а также функция

$$ABC\overline{D} \vee AB\overline{C}D \vee A\overline{B}CD \vee \overline{A}BCD \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D,$$

равная единице на входных наборах 0111, 1011, 1101, 1110, 0001, 0010, 0100 и 1000.

Пример 9. На рис. 5 приведена схема, реализующая функцию $ABC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$, а в табл. 2 перечислены все возможные отказы для этой функции, являющейся булевой функцией от трех переменных с максимально возможным количеством отказов.

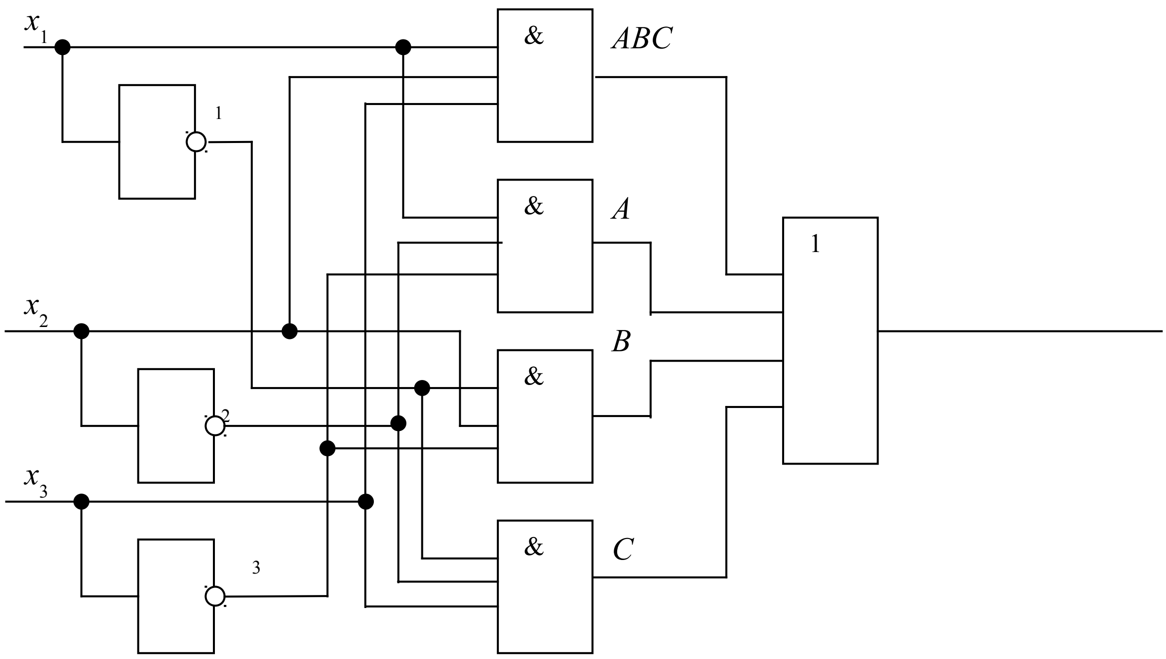

Рисунок 5 – Схема, реализующая булеву функцию $f_1 = ABC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$

Как видно из табл. 2, ошибка типа $1 \to 0$ всегда соответствует направлению вниз от правильного входного набора к ошибочному на булевой решетке, а ошибка типа $0 \to 1$ всегда соответствует направлению вверх. При этом для произвольной булевой функции ошибка типа $1 \to 0$ может приводить как к отказу типа $1 \to 0$, так и к отказу типа $0 \to 1$. Аналогично к обоим типам отказов может приводить и ошибка типа $0 \to 1$.

Таблица 2 – Возможные отказы на схеме, реализующей булеву функцию
$f_1 = ABC \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$

№ отказа	Правильный набор	Ошибочный набор	Тип ошибки	Тип отказа	Направление на решетке
1	111	011	1 → 0	1 → 0	вниз
2	011	111	0 → 1	0 → 1	вверх
3	111	101	1 → 0	1 → 0	вниз
4	101	111	0 → 1	0 → 1	вверх
5	111	110	1 → 0	1 → 0	вниз
6	110	111	0 → 1	0 → 1	вверх
7	011	001	1 → 0	0 → 1	вниз
8	001	011	0 → 1	1 → 0	вверх
9	011	010	1 → 0	0 → 1	вниз
10	010	011	0 → 1	1 → 0	вверх
11	101	001	1 → 0	0 → 1	вниз
12	001	101	0 → 1	1 → 0	вверх
13	101	100	1 → 0	0 → 1	вниз
14	100	101	0 → 1	1 → 0	вверх
15	110	010	1 → 0	0 → 1	вниз
16	010	110	0 → 1	1 → 0	вверх
17	110	100	1 → 0	0 → 1	вниз
18	100	110	0 → 1	1 → 0	вверх
19	001	000	1 → 0	1 → 0	вниз
20	000	001	0 → 1	0 → 1	вверх
21	010	000	1 → 0	1 → 0	вниз
22	000	010	0 → 1	0 → 1	вверх
23	100	000	1 → 0	1 → 0	вниз
24	000	100	0 → 1	0 → 1	вверх

Из определения монотоннной булевой функции следует, что ошибка типа 1 → 0 не может приводить к отказу типа 0 → 1, а из леммы 9 следует, что ошибка типа 0 → 1 не может приводить к отказу типа 1 → 0. Следовательно, для монотонной булевой функции тип отказа всегда соответствует типу ошибки. Это значит, что отказ типа 1 → 0 всегда соответствует направлению вниз от правильного входного набора к ошибочному на булевой решетке, а отказ типа 0 → 1 всегда соответствует направлению вверх.

Из следствия к лемме 2 и следствия 1 к лемме 9 следует, что любая монотонная функция разбивает входные наборы булевой решетки на два подмножества: объединение покрывающих множеств минимальных входных наборов (на всех входных наборах этого подмножества значение функции равно 1) и объединение покрываемых множеств максимальных входных наборов (на всех входных наборах этого подмножества значение функции равно 0). Два подграфа графа булевой решетки, получающиеся в результате такого разбиения, являются *связными*, так как самый верхний элемент булевой решетки, соответствующий входному набору из всех единиц, принадлежит покрывающему множеству любого минимального входного набора, а самый нижний элемент булевой решетки, соответствующий входному набору из всех нулей, принадлежит покрываемому множеству любого максимального входного набора. Из сказанного ранее о ребрах булевой решетки, соответствующих отказам, следует, что в случае монотонной булевой функции возможным отказам соответствуют все ребра разреза, разбивающего граф булевой решетки на два описанных связных подграфа, и только эти ребра.

Верно и обратное, любой разрез графа булевой решетки, разбивающий этот граф на два связных подграфа, таких что один из подграфов содержит самый верхний элемент решетки, а другой самый нижний, соответствует некоторой монотонной булевой функции. Назовем представление монотонной булевой функции в виде разреза графа булевой решетки (или n-мерного куба) девятым представлением этой функции.

Монотонная булева функция от n переменных с максимально возможным количеством отказов должна соответствовать разрезу с максимальным количеством ребер. Если n нечетно, то такой разрез единственен и включает ребра, соединяющие $(n - 1)/2$ и $(n + 1)/2$ уровни булевой решетки. Если n четно, то таких разреза два. Первый из них включает ребра, соединяющие $(n/2) - 1$ и $n/2$ уровни, а второй – ребра, соединяющие $n/2$ и $(n/2) + 1$ уровни булевой решетки.

Вычислим максимально возможное количество отказов $p_2(n)$ для монотонной булевой функции от n переменных. Согласно неравенству Шпернера (2) максимально возможное количество подмножеств в семействе множеств Шпернера равно $C_n^{[n/2]}$. Согласно лемме 3 это число равно максимально возможному количеству минимальных входных наборов, а согласно следствию 2 из леммы 9 оно же равно максимально возможному количеству максимальных входных наборов монотонной булевой функции от n переменных. Для четного n число $[n/2]$ равно $n/2$, а для нечетного n оно равно $(n/2) - 1$. Ранее было доказано, что число элементов на m уровне булевой решетки равно C_n^m. Отсюда следует, что число Шпернера равно количеству элементов на $[n/2]$ уровне решетки. Это значит, что если разрез содержит максимально возможное количество ребер, то для четного n либо множество минимальных входных наборов, либо множество максимальных входных наборов является максимально возможным, а для нечетного n оба эти множества являются максимально возможными. Ранее было доказано, что число ребер, идущих вниз от каждого элемента на m уровня булевой решетки, равно $n - m$. Если $m = [n/2]$, то это число равно $[n/2] + 1$ для нечетного n и $n/2$ для четного n. В общем случае оно равно $[(n + 1)/2]$. Следовательно, максимальное количество ребер в разрезе n-мерного куба равно $[(n + 1)/2]C_n^{[n/2]}$. Отсюда максимально возможное количество отказов $p_2(n)$ для монотонной булевой функции от n переменных равно:

$$p_2(n) = 2[(n + 1)/2]C_n^{[n/2]}. \qquad (7)$$

Для четного n это число равно:

$$p_2(n) = nC_n^{n/2}, \qquad (8)$$

а для нечетного n оно равно:

$$p_2(n) = (n + 1)/C_n^{(n-1)/2}. \qquad (9)$$

Пример 10. Монотонной булевой функцией от трех переменных с максимально возможным количеством отказов является функция $AB \vee AC \vee BC$, равная единице на входных наборах 011, 101 и 110. Монотонными булевыми функциями от четырех переменных с максимально возможным количеством отказов является функция $ABC \vee ABD \vee ACD \vee BCD$, равная единице на входных наборах 0111, 1011, 1101 и 1110, а также функция $AB \vee AC \vee BC \vee AD \vee BD \vee CD$, равная единице на входных наборах 0011, 0101, 0110, 1001, 1010 и 1100.

Пример 11. На рис. 6 приведена схема, реализующая функцию $f_2 = AB \vee AC \vee BC$, а в табл. 3 перечислены все возможные отказы для этой функции, являющейся монотонной булевой функцией от трех переменных с максимально возможным количеством отказов.

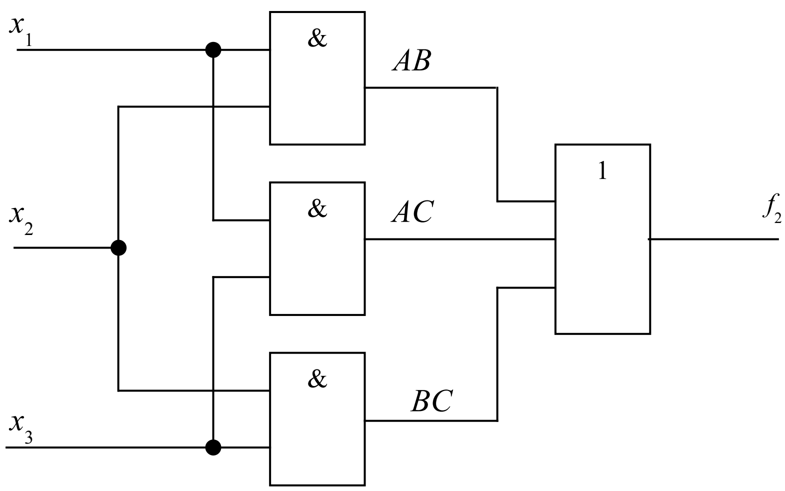

Рисунок 6 – Схема, реализующая монотонную булеву функцию $f_2 = AB \vee AC \vee BC$

Таблица 3 – Возможные отказы на схеме, реализующей монотонную булеву функцию
$f_2 = AB \vee AC \vee BC$

№ отказа	Правильный набор	Ошибочный набор	Тип ошибки	Тип отказа	Направление на решетке
1	011	001	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
2	001	011	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх
3	011	010	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
4	010	011	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх
5	101	001	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
6	001	101	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх
7	101	100	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
8	100	101	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх
9	110	010	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
10	010	110	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх
11	110	100	$1 \to 0$	$1 \to 0$	вниз
12	100	110	$0 \to 1$	$0 \to 1$	вверх

Сравним максимально возможное количество отказов $p_1(n)$ для схем, реализующих произвольные булевы функции и максимально возможное количество отказов $p_2(n)$ для схем, реализующих монотонные булевы функции. Назовем отношение $k(n) = p_1(n)/p_2(n)$ коэффициентом уменьшения отказов. Значения $p_1(n)$, $p_2(n)$ и $k(n)$ при n в пределах от 2 до 10 приведено в табл. 4.

Таблица 4 – Зависимость количества отказов от числа входов

n	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$k(n)$
2	8	4	2
3	24	12	2
4	64	24	2,67
5	160	60	2,67
6	384	120	3,2
7	896	280	3,2
8	2048	560	3,66
n	$p_1(n)$	$p_2(n)$	$k(n)$
9	4608	1260	3,66
10	10240	2520	4,06

Как видно из табл. 4 с ростом числа входов схемы, реализующей булеву функцию растет и коэффициент уменьшения отказов, т.е. уменьшается максимально возможное количество отказов для монотонной булевой функции по сравнению с максимально возможным количеством отказов для произвольной булевой функции.

Найдем $k(n) = p_1(n)/p_2(n)$ в явном виде. Для этого предварительно найдем соотношение $k(n+2)/k(n)$ при четном n:

$$k(n+2)/k(n) = 4C_n^{n/2}/C_{n+2}^{n/2+1} = (4(n/2+1)^2)/((n+2)(n+1)) = (n+2)/(n+1) \quad (10)$$

и при нечетном n:

$$k(n+2)/k(n) = (4(n+2)(n+1)C_n^{(n-1)/2})/((n+3)nC_n^{(n+1)/2}) =$$
$$= (4(n+2)(n+1)(n+3)(n+1))/(4(n+3)n(n+2)(n+1)) = (n+1)/n \quad (11)$$

Отсюда, учитывая, что $k(2) = k(3) = 2$, имеем:

$$k(3+2m) = k(2+2m) = \prod_{i=0}^{m} ((2+2i)/(1+2i)) \quad (12)$$

Сделаем вероятностное предположение, что для булевых функций среднее количество возможных отказов равно половине максимального количества возможных отказов. Для 256 булевых функций от трех переменных имеем: 2, 16, 30, 48, 64, 48, 30, 16 и 2 функции имеют соответственно по

0, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 и 24 возможных отказов. Это значит, что распределение возможных отказов по функциям симметрично и их среднее количество на функцию равно 12, т.е. половине максимального. Так как $k(n)$ при $n > 3$ имеет значение больше 2, то при указанном предположении и $n > 3$ среднее количество возможных отказов для всех булевых функций от n переменных превышает максимальное количество возможных отказов для монотонных булевых функций от n переменных.

В заключение отметим следующее. На основе проведенных исследований показано, что в случае использования при синтезе цифровых устройств монотонных булевых функций вместо произвольных булевых функций достигается уменьшение количества возможных отказов, т.е. повышение надежности работы синтезируемого устройства. Это уменьшение зависит от числа входов схемы, реализующей булеву функцию, и с ростом числа входов схемы повышается. В работе на основе алгебраического и комбинаторного подходов достаточно полно исследованы основные свойства монотонных булевых функций (доказано 10 лемм), показана их связь с различными областями математики, указано девять представлений этих функций, введены понятия покрывающих и покрываемых множеств, минимальных и максимальных входных наборов. За рамками рассмотрения остались вопросы, касающиеся классификации этих функций, вычисления числа функций заданного класса, алгоритмов перехода к соседним функциям, областей, где наиболее перспективно использовать монотонные булевы функции. Эти вопросы нуждаются в отдельном описании.

Литература

1. *Иоффе М.И.* Диагностирование логических схем. – М.: Наука, 1989. – 158 с.
2. *Волгин Л.И.* Синтез устройств для обработки и преобразования информации в элементном базисе реляторов. – Таллинн: Валгус, 1989. – 180 с.
3. *Волгин Л.И.* Комплементарная алгебра и предикатная алгебра выбора. – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 68 с.
4. *Волгин Л.И.* АМ-алгебра и ее применения. – Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 52 с.
5. *Волгин Л.И.* Логические основы математической теории надежности. – Ульяновск: УлГТУ, 1997. – 44 с.
6. *Самофалов А.Г., Марковский А.П.* Комбинаторный подход к синтезу специальных классов булевых функций // Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26. – №3. – С. 27-40.
7. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 120 с.
8. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
9. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
10. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
12. *Тараканов В.Е.* Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. – М.: Наука, 1985. – 192 с.