УДК 621.39

Григорьева Т.И.
Grygoryeva T.I.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОМЕХ ОТ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЙ В ОБЛАСТИ ТЕНИ С ПОМОЩЬЮ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

THE RESEARCH OF ELECTROMAGNETIC HINDRANCES FROM SOURCES OF RADIATIONS IN THE FIELD OF A SHADOW WITH THE HELP OF ALMOST GEODESIC MAPPING

Аннотация. Показана возможность исследования электромагнитных помех от источников излучений в области тени с помощью почти геодезических отображений.

Summary. The opportunity of research of electromagnetic hindrances from sources of radiations in the field of a shadow is shown with the help of almost geodesic mapping.

Проблема электромагнитной совместимости в сотовых системах связи играет большую роль в обеспечении надёжности связи, особенно с учётом всё возрастающего количества источников радиоизлучения. Расчёт электромагнитных полей от этих источников включает в себя как анализ прямого воздействия при распространении в свободном пространстве, так и, что не менее важно, анализ этих полей в области тени.

Для сотовых систем характерно обеспечение связи не только в пределах прямой видимости, но и в помещениях, за пределами строений и в других ситуациях, где нет прямого луча. Вместе с тем, расчёт полей в области тени связан с решением сложных электродинамических дифракционных задач, где суммарное поле представляется компонентами плохо сходящегося ряда [1].

Для решения дифракционных задач можно использовать результаты теории геодезических отображений [2-4]. Как известно [2], два римановых пространства, допускающие геодезическое отображение друг на друга, описывают процессы, протекающие при эквивалентных внешних нагрузках, но при различных энергетических режимах. Следовательно, один из этих процессов можно моделировать другим. Почти геодезические отображения позволяют моделировать процессы, протекающие при одних энергетических режимах (описываемые одними пространствами) при отсутствии внешних сил, процессами, протекающими при других энергетических режимах (описываемые другими пространствами) под воздействием внешних сил определенного типа [2,3].

При моделировании дифракции, когда условия отражения и параметры среды в области освещённости и области тени одинаковы, можно воспользоваться геодезическим отображением [4].В случае, когда параметры среды в области освещённости и области тени различны, например, при переходе с освещённой стороны Земли на ночную, что можно рассматривать как внешнее воздействие на вторую среду (область тени), возникает необходимость в использовании обобщений геодезического отображения. В этом случае можно применить почти геодезические отображения [2].

Однако в литературе не встречается применение в теории дифракций почти геодезических отображений. Цель настоящей работы – показать возможность исследования электромагнитных помех от источников излучений в области тени с помощью почти геодезических отображений.

1. Почти геодезическое отображение второго типа π_2 параболически келеровых пространств. Основные уравнения почти геодезических отображений имеют нелинейный тензорный характер [2], а потому сложны в применении. Автор изучает почти геодезическое отображение второго типа π_2 с вырожденной аффинорной структурой и предлагает, применяя регулярные методы, разработанные Н.С. Синюковым в теории геодезических отображений [2], найти новую форму основных уравнений почти геодезического отображения второго типа π_2 параболически келеровых пространств, что позволит для любого параболически келерового пространства выяснить вопрос о том, допускает оно почти геодезическое отображение π_2 или нет.

Определение. Риманово пространство V_{2n} будем называть параболически келеровым, если в нём наряду с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ существует аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0\,,\ F_{i,j}^h = 0\,,\ F_i^\alpha g_{\alpha j} = \varepsilon F_j^\alpha g_{\alpha i}\ (\varepsilon = \pm 1)\,, \qquad (1)$$

где запятой обозначено ковариантное дифференцирование в пространстве V_{2n}; α – індекс суммирования; $2n$ – размерность пространства; h, i, j – основные индексы. Здесь и далее все индексы принимают значения от 1 до $2n$.

Рассмотрим почти геодезическое отображение второго типа π_2 параболически келеровых пространств $V_{2n}(g_{ij}, F_i^h)$ и $\overline{V}_{2n}(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. Основные уравнения такого отображения имеют вид [2]

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \Psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \ , \tag{2}$$

$$\overline{F}_i^h(x) = F_i^h(x), \quad F_{i,j}^h = F_{i/j}^h = 0 \ , \quad F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \quad F_{ij} = F_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} = \overline{F}_{ji},$$

где δ_j^h – символы Кронекера; $\Gamma_{ij}^h(x)$; $\overline{\Gamma}_{ij}^h(x)$ – компоненты объектов связности пространств V_{2n} и $\overline{V}_{2n}$ соответственно; Ψ_i, φ_i – ковекторы, круглыми скобками (*i, j*) обозначена операция симметрирования без деления; «/» – знак ковариантной производной в пространстве $\overline{V}_{2n}$, $F_{ij} = F_i^\alpha g_{\alpha j}$, $\overline{F}_{ij} = F_i^\alpha \overline{g}_{\alpha j}$.

Если $\psi_i = 0$ и $\varphi_i = 0$, то π_2 является аффинным; если $\psi_i \neq 0$, $\varphi_i = 0$, то π_2 вырождается в геодезическое отображение. Условимся считать эти случаи тривиальными. При $\psi_i = 0$, $\varphi_i \neq 0$ имеем отображение, которое Н.С. Синюков назвал каноническим [2].

Операцию свертывания с аффинором будем обозначать следующим образом: $A_{\overline{\beta}} = A_\alpha F_\beta^\alpha$, $A^{\overline{\beta}} = A^\alpha F_\alpha^\beta$, а также договоримся запись $A_{\overline{i}j\ldots,k}^h$ понимать как $(A_{\alpha j\ldots,k}^h)F_i^\alpha$, т.е. сопряжение производить после дифференцирования.

Покажем, что векторы φ_i и ψ_i сопряжены. Действительно, из связи между ковариантными производными аффинора в пространствах V_{2n} и $\overline{V}_{2n}$, находим

$$F_{i/j}^h = F_{i,j}^h + \psi_{\overline{i}}\delta_j^h + \phi_{\overline{i}}F_j^h - \psi_i F_j^h .$$

Свернув последнее по индексам *h* и *j*, обнаружим, что $\psi_{\overline{i}} = 0$. Подставим это в исходное равенство и увидим, что

$$\varphi_{\overline{i}} = \psi_i . \tag{3}$$

Используя основные уравнения рассматриваемого отображения и условия (3), найдем

$$\psi_i = \frac{1}{2n+2}(\overline{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha),$$

а значит вектор ψ_i по необходимости градиентен, т.е. $\psi_i = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}$. Будем также считать градиентным вектор φ_i, т.е. $\varphi_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$.

Как известно, метрический тензор каждого риманового пространства абсолютно параллелен в нем. Поэтому для тензора $\overline{g}_{ij}$ выполняется следующее

$$\frac{\partial\overline{g}_{ij}}{\partial x^k} - \overline{\Gamma}_{ki}^\alpha \overline{g}_{\alpha j} - \overline{\Gamma}_{kj}^\alpha \overline{g}_{\alpha i} = 0 \ .$$

Используя (1), отсюда получаем

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} + 2\varphi_k \overline{F}_{ij} + \varphi_i \overline{F}_{jk} + \varphi_j \overline{F}_{ik} . \tag{4}$$

Соотношения (4) представляют собой форму основных уравнений рассматриваемого отображения, эквивалентную (1).

2. Новая форма основных уравнений почти геодезического отображения π_2 параболически келеровых пространств. Воспользуемся методом, разработанным Н.С. Синюковым в теории геодезических отображений [2] и приведем систему (1) к новой форме.

Введем в рассмотрение невырожденный тензор:

$$\widetilde{g}_{ij} = e^{-2\psi}\overline{g}_{ij} - 2e^{-2\psi}\varphi\overline{F}_{ij} . \tag{5}$$

После ковариантного дифференцирования (5) в V_{2n}, учитывая (4), получаем:

$$\widetilde{g}_{ij,k} = \psi_i \widetilde{g}_{jk} + \psi_j \widetilde{g}_{ik} + \varphi_i \widetilde{F}_{jk} + \varphi_j \widetilde{F}_{ik} , \tag{6}$$

где $\widetilde{F}_{ik} = F_i^\alpha \widetilde{g}_{\alpha k}$. Обозначим элементы матрицы, обратной к $\|\widetilde{g}_{ij}\|$, через $\widetilde{g}^{ij}$. Тогда $\widetilde{g}_{i\alpha}\widetilde{g}^{\alpha j} = \delta_i^j$. Дифференцируя это тождество ковариантно в V_{2n} и опираясь на него же, находим

$$\widetilde{g}^{ij}{}_{,k} = -\widetilde{g}_{\alpha\beta,k}\widetilde{g}^{\alpha i}\widetilde{g}^{\beta j}.$$

В соответствии с (6) это дает

$$\widetilde{g}^{ij}{}_{,k} = \mu^i\delta_k^j + \mu^j\delta_k^i + \lambda^i F_k^j + \lambda^j F_k^i, \tag{7}$$

где

$$\mu^i = -\psi_\alpha \widetilde{g}^{\alpha i},\ \lambda^i = -\varphi_\alpha \widetilde{g}^{\alpha i}, \tag{8}$$

причем $\mu^i = \lambda^{\bar{i}}$. Опуская в (7) индексы *i* и *j* в V_{2n} и полагая

$$a_{ij} = \widetilde{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j},\ \mu_i = \mu^\alpha g_{\alpha i},\ \lambda_i = \lambda^\alpha g_{\alpha i}, \tag{9}$$

получаем

$$a_{ij,k} = \lambda_{\bar{i}} g_{jk} + \lambda_{\bar{j}} g_{ik} + \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}. \tag{10}$$

Очевидно, в соответствии с (5) и (9) a_{ij} - некоторый невырожденный симметричный, дважды ковариантный тензор, удовлетворяющий условию

$$a_{\bar{i}\,j} = a_{i\,\bar{j}}. \tag{11}$$

Из (5), (8) и (9) для a_{ij}, λ_i получаем следующие выражения через метрические тензоры пространств V_{2n} и $\overline{V}_{2n}$, находящихся в почти геодезическом отображении π_2

$$a_{ij} = e^{2\psi} g_{\alpha i} g_{\beta j} \overline{g}^{\alpha\gamma}(\delta_\gamma^\beta + 2\varphi F_\gamma^\beta), \tag{12}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi}\varphi_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta}(\delta_\beta^\gamma + 2\varphi F_\beta^\gamma) g_{\gamma i} \tag{13}$$

Итак, (10) – новая форма основных уравнений почти геодезического отображения π_2 параболически келеровых пространств.

Теорема 1. Для того чтобы параболически келерово пространство V_{2n} допускало почти геодезическое отображение π_2, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовал невырожденный симметричный дважды ковариантный тензор a_{ij}, удовлетворяющий условиям (10) и (11) при некотором векторе $\lambda_i \neq 0$ таком, что $\lambda_{\bar{i}}$ градиентный.

Доказательство. Свертывая (10) с g^{ij} по *i* и *j*, находим $(a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = 4\lambda_{\bar{k}}$. Следовательно, $\lambda_{\bar{k}}$ – градиентный вектор, причем из (13) видно, что $\lambda_i \neq 0$ при $\varphi_i \neq 0$ и наоборот. Таким образом, если пространство V_{2n} допускает почти геодезическое отображение π_2, то в нем существует невырожденный симметричный тензор a_{ij}, удовлетворяющий уравнениям (10) при некотором векторе $\lambda_i \neq 0$ таком, что $\lambda_{\bar{i}}$ градиентный вектор. Верно и обратное утверждение. Действительно, поднимая в (10) индексы *i* и *j* в V_{2n}, обнаружим, что для тензора $\widetilde{g}^{ij} = a_{\alpha\beta} g^{\alpha i} g^{\beta j}$ выполняются уравнения (7) при $\lambda^i = \lambda_\alpha g^{\alpha i}$, причем $\widetilde{g}^{ij}$ – невырожденный и симетричный. Но тогда для $\widetilde{g}_{ij}$ будут выполняться условия (6) при векторах $\varphi_i = -\lambda^\alpha \widetilde{g}_{\alpha i}$ и $\psi_i = -\lambda^{\bar{\alpha}} \widetilde{g}_{\alpha i}$. Рассмотрим $\widetilde{g}_{ij}$ как метрический тензор некоторого параболически келерова пространства $\widetilde{V}_{2n}$. Для символов Кристоффеля второго рода $\widetilde{\Gamma}_{ij}^h$ этого пространства будем иметь $\widetilde{\Gamma}_{\alpha k}^\alpha = \frac{1}{2}\partial_k \ell n|\widetilde{g}|$, где $\widetilde{g} = \det\|\widetilde{g}_{ij}\|$. Учитывая (6), получим

$$\widetilde{\Gamma}_{\alpha k}^\alpha = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\beta}(\widetilde{g}_{\alpha\beta,k} + \widetilde{g}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta k}^\gamma + \widetilde{g}_{\gamma\beta}\Gamma_{\alpha k}^\gamma) = \Gamma_{\alpha k}^\alpha + 2\psi_k,$$

т.е. $\psi_k = \frac{1}{2}(\widetilde{\Gamma}_{\alpha k}^\alpha - \Gamma_{\alpha k}^\alpha)$. А это значит, что ψ_k – градиентный вектор, т.е. $\psi_k = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^k}$. Тогда для тензора $\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{\alpha i}(\delta_j^\alpha + 2\varphi F_j^\alpha)$ получаем (4). Теорема доказана.

3. Новая форма основных уравнений канонического отображения π_2 параболически келеровых пространств. Для канонического отображения $\psi_i = 0$, следовательно, $\psi = c$, где $c = \text{const}$.

Пусть $e^{-2c} = \mu$, тогда (5) примет вид

$$\tilde{g}_{ij} = \mu(\bar{g}_{ij} - 2\varphi \bar{F}_{ij}).$$

Учитывая, что вектор φ_i градиентный, получаем

$$\tilde{g}_{ij,k} = \mu\varphi_{(i}\tilde{F}_{j)k},$$

а, следовательно,

$$\tilde{g}^{ij}_{,k} = \lambda^{(i}F^{j)}_{k},$$

где λ_i находятся по формулам (8).

Пусть a_{ij} и λ_i определяются по формулам (9), тогда

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}F_{j)k}, \qquad (14)$$

где

$$a_{ij} = \mu g_{\alpha i} g_{\beta j} \bar{g}^{\alpha\gamma}(\delta^{\beta}_{\gamma} + 2\varphi F^{\beta}_{\gamma}), \qquad (15)$$

$$\lambda_i = -\mu\varphi_{\alpha}\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i}. \qquad (16)$$

Очевидно, (14) – новая форма основных уравнений канонического отображения параболически келеровых пространств.

4. Примеры параболически келеровых пространств, допускающих почти геодезическое и каноническое отображения. *Определение*. Параболически келерово пространство $V_{2n}(g_{ij}, F^h_i)$ называется обобщенно-эквидистантным [5], если в нем существует векторное поле $\xi_i \neq 0$, удовлетворяющее условиям

$$\xi_{i,j} = \rho_1 g_{ij} + \rho_2 F_{ij}, \qquad (17)$$

где ρ_1 и ρ_2 - некоторые инварианты, причем, если $\rho_2 = 0$, то имеем эквидистантное пространство [2], если $\rho_1 = 0, \rho_2 \neq 0$, то V_{2n} - почти эквидистантное пространство [5].

Пример 1. Эквидистантное параболически келерово пространство допускает почти геодезическое и каноническое отображения.

Доказательство. Рассмотрим эквидистантное параболически келерово пространство $V_{2n}(g_{ij}, F^h_i)$, в котором выполняются условия (17) при $\rho_1 = \rho \neq 0$ и $\rho_2 = 0$. Тогда для тензора

$$a_{ij} = c_1(\xi_{\bar{i}}\xi_j + \xi_i\xi_{\bar{j}}) + c_2\xi_{\bar{i}}\xi_{\bar{j}} + b_1 g_{ij} + b_2 F_{ij}, \quad (c_1^2 + c_2^2) \neq 0,$$

получаем

$$a_{ij,k} = c_1(\xi_{\bar{i},k}\xi_j + \xi_{\bar{i}}\xi_{j,k} + \xi_{i,k}\xi_{\bar{j}} + \xi_i\xi_{\bar{j},k}) +$$
$$+ c_2(\xi_{\bar{i},k}\xi_{\bar{j}} + \xi_{\bar{i}}\xi_{\bar{j},k}) = \lambda_{(\bar{i}}g_{j)k} + \lambda_{(i}F_{j)k},$$

где $\lambda_i = \rho(c_1\xi_i + c_2\xi_{\bar{i}})$.

Таким образом, уравнения (10) выполняются, причем $\lambda_i \neq 0$, если $\rho \neq 0$. По теореме 1 пространство V_{2n} допускает почти геодезическое отображение.

Пусть теперь

$$a_{ij} = c\xi_{\bar{i}}\xi_{\bar{j}} + b_1 g_{ij} + b_2 F_{ij}, \quad c \neq 0, \qquad (18)$$

тогда

$$a_{ij,k} = c(\xi_{\bar{i},k}\xi_{\bar{j}} + \xi_{\bar{i}}\xi_{\bar{j},k}) = \lambda_{(i}F_{j)k},$$

при $\lambda_i = c\rho\xi_{\bar{i}}$.

Очевидно, уравнения (14) выполняются, причем $\lambda_i \neq 0$, если $\rho \neq 0$. Следовательно, V_{2n} допускает каноническое отображение. Что и требовалось доказать.

Пример 2. Обобщенно-эквидистантное пространство допускает почти геодезическое и каноническое отображения.

Действительно, пусть $V_{2n}(g_{ij}, F_i^h, \rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0)$ обобщенно-эквидистантное пространство, т.е. в нем существует векторное поле $\xi_i \neq 0$, удовлетворяющее условиям (17). Тогда нетрудно проверить, что для тензора

$$a_{ij} = c(\xi_{\bar{i}}\xi_j + \xi_i\xi_{\bar{j}}) + b_1 g_{ij} + b_2 F_{ij}, \quad c \neq 0 \qquad (19)$$

выполняются уравнения (10) при

$$\lambda_i = c(\rho_1\xi_i + \rho_2\xi_{\bar{i}}).$$

Следовательно, V_{2n} допускает почти геодезическое отображение.

Если a_{ij} взять в виде (18), то в V_{2n} выполняются условия (14) при

$$\lambda_i = c\rho_1\xi_{\bar{i}},$$

т.е. V_{2n} допускает каноническое отображение.

Пример 3. Почти эквидистантное пространство допускает каноническое отображение.

Пусть теперь $V_{2n}(g_{ij}, F_i^h, \rho_2 \neq 0)$ – почти эквидистантное пространство, т.е. в нем имеют место условия (17) при $\rho_1 = 0$. Тогда для тензора a_{ij}, определенного формулами (19), уравнения (14) будут иметь место при

$$\lambda_i = c\rho_2\xi_{\bar{i}}.$$

Значит, V_{2n} допускает каноническое отображение.

5. Применение новой формы основных уравнений почти геодезического отображения для расчёта электромагнитного поля в области тени. Для примера рассмотрим препятствие в виде остроконечного клина. В зоне освещённости векторы электромагнитного поля могут быть записаны в качестве компонент метрического тензора риманова пространства V_{2n}. В зоне полутени и тени векторы электромагнитного поля описываются компонентами метрического тензора риманова пространства $\overline{V}_{2n}$. Если установить почти геодезическое отображение между пространствами V_{2n} и $\overline{V}_{2n}$ (с помощью основных уравнений в новой форме (10)), то решение дифракционной задачи в области тени за клином сводится к исследованию риманова пространства $\overline{V}_{2n}$. В частности, например, построение модели можно осуществить с помощью почти геодезического отображения эквидистантного и обобщенно-эквидистантного пространств или канонического почти геодезического отображения почти эквидистантного и обобщенно-эквидистантного пространств (17). Таким образом, для расчёта электромагнитного поля в области тени целесообразно применить новую форму основных уравнений почти геодезического отображения.

Итак, в настоящей работе рассмотрено почти геодезическое отображение π_2 параболически келеровых пространств, найдена новая форма основных уравнений этого отображения, приведены примеры параболически келеровых пространств, допускающих почти геодезическое и каноническое отображения, показана возможность исследования электромагнитных помех от источников излучений в области тени с помощью почти геодезических отображений.

Литература

1. *Фок В.А.* Проблеми дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970. – 519 с.
2. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
3. *Levi-Civita T.* Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche. - Ann. Di Mat. – 1896. – Vol.2, – №24. – P. 255-300.
4. *Синг Дж.Л.* Классическая динамика. – М.: ИЛ, 1963. – 432 с.
5. *Григорьева Т.И.* Эквидистантные и обобщённо – эквидистантные параболически келеровы пространства // Тези доповідей Міжнародного семінару «Геометрія в Одесі – 2005. Диференціальна геометрія та її застосування». – Одеса, 2005. – С. 32 – 34.