

**МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
НАДЕЖНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ КОММУТАЦИОННО-  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР**

**TECHNIQUE OF DEFINITION OF THE STRUCTURAL – TOPOLOGICAL CHARACTERISTICS  
OF OPERATIONAL RELIABILITY OF HOMOGENEOUS SWITCHING-COMPUTING FRAMES**

**Аннотация.** В статье рассмотрены вопросы разработки методики определения вероятностей отказа, безотказной работы однородных коммутационно-вычислительных структур и образования связанной подструктуры из высоконадежных модулей.

**Summary.** In the article the problems of mining of a technique of definition of rejection probabilities, failure-free operation of homogeneous switching -computing frames and formation of a bound sublattice from high-reliable modules are reviewed.

Современный этап развития средств коммутационной и вычислительной техники характеризуется интенсивным использованием принципа параллельной обработки информации, концепция развития которой неразрывно связана с концепцией модели коллектива вычислителей, которая строится на принципах параллельного выполнения большого числа операций, переменной логической структуры и конструктивной однородности элементов и связей и не имеет теоретического предела производительности благодаря допущению неограниченного увеличения производительности путем подключения дополнительных модулей. Переменная логическая структура и конструктивная однородность позволяют достичь высоких показателей надежности и экономичности модели коллектива вычислителей [1].

Переход от использования однородных вычислительных систем к более интенсивному внедрению однородных коммутационно-вычислительных структур и сред (ОКВС) выдвигает на первый план задачу разработки их системного и прикладного программного обеспечения.

Проблема организации функционирования ОКВС в условиях заданных ограничений на их ресурсы многопланова, сложна и требует решения целого комплекса задач, начиная от разработки параллельного алгоритма и метода реализации коммутационно-вычислительных процессов и кончая обеспечением их оптимального планирования и управления.

Для оценки качества функционирования ОКВС известен метод расчета набора показателей надежности и живучести. Достаточно полную систему показателей надежности для переходного режима функционирования ОКВС образуют вектор-функция потенциальной живучести, вектор-функция занятости восстанавливающей системы, вектор-функция готовности, надежности и восстановимости ОКВС [2].

Метод основывается на допущении, что в любой момент времени производительность как ОКВС, так и восстанавливающей системы (ВС) пропорциональна соответственно не случайному числу исправных модулей и не случайному числу занятых восстанавливающих устройств (ВУ), а математическому ожиданию соответствующих чисел. Допущение естественно для ОКВС высокой производительности, в которых случайности, связанные с выходом из строя модулей или освобождением ВУ, мало сказываются на значениях суммарной производительности ОКВС или ВС, которые для каждого момента времени оказываются близкими к своим средним значениям. Эти случайности сказываются, если число исправных модулей в ОКВС приближается к минимуму, или если число занятых ВУ становится близким к предельному значению.

Наряду с положительными сторонами такой метод расчета набора показателей надежности и живучести ОКВС имеет следующие основные недостатки:

-при расчете показателей надежности ОКВС, состоящие из высоконадежных модулей, требуется высокая точность, потому что при первом же отказе или сбое нормальное функционирование системы прекращается, которая не обеспечивается описанным выше методом.

-при расчете показателей надежности ОКВС не учитывается структурно-топологические характеристики построения ОКВС и не оценивается взаимосвязь между структурой алгоритмов и топологией ОКВС в процессе отображения этих алгоритмов реализации коммутационно-вычислительных задач в ОКВС.

В работе [2] и в других работах были сделаны первые попытки осмыслить понятие структурной надежности. В этих работах при расчете показателей надежности функционирования ОКВС отсутствует учет топологических характеристик.

С целью устранения перечисленных выше недостатков необходимо разработать такой метод расчета показателей надежности отказоустойчивых ОКВС, который позволил бы обеспечить требуемую точность расчетов и учесть структурно-топологические характеристики ОКВС.

**1. Постановка задачи в аналитической форме.** Процесс решения сложных коммутационно-вычислительных задач укрупненно можно разбить на два этапа: этап планирования и этап реализации. На этапе планирования устанавливается взаимосвязь между структурой алгоритмов и топологией ОКВС с последующим отображением алгоритма и настройки подструктур на реализацию данного алгоритма. На этапе планирования отображения алгоритма в ОКВС необходимо производить с учетом отказов модулей. На этапе реализации существенную роль играет режим отказоустойчивости функционирования ОКВС, который предполагает завершение процесса реализации задачи при отказах одного или части модулей, настроенных на реализацию алгоритма. В связи с этим возникает проблема организации оптимального отображения алгоритма в ОКВС с учетом ненадежности функционирования модулей на этапах планирования и реализации заданных коммутационно-вычислительных алгоритмов.

Пусть в ОКВС, состоящей из  $N = n^2$  взаимосвязанных модулей с топологией  $S$ , необходимо решить сложную задачу, состоящую из  $M = m^2$  набора связанных задач (вершин) со структурой  $S'$ .

При такой постановке решение сложной задачи, состоящей из набора связанных задач в ОКВС из взаимосвязанных модулей требует выполнения двух условий:

а) число задач (вершин)  $M$  должно быть равно числу исправных модулей  $N_1 = N - j$ , т.е.  $M = N_1$ ;

б) структура информационной и логической связи между задачами  $S'$  должна соответствовать топологию связей между исправными модулями  $S''$ , т.е.  $S' = S''$ .

Для решения поставленной задачи введен показатель, т.е. вектор-функция структурно-топологической живучести ОКВС и разработана методика ее расчета, включающая в себя методов определения вероятностей отказа, безотказной работы однородных ОКВС и образования связанной подструктуры из высоконадежных модулей.

Вектор-функция структурно-топологической живучести  $\vec{G}(t)$  определяется следующим образом:

$$\vec{G}(t) = \{G_j(N, S, t)\}, \quad (1)$$

где каждая компонента вектор-функции  $G_j(N, S, t) = P_j(r, S'', t)$ ;  $r = \overline{2, N}$ ;  $j = \overline{0, N}$  представляет вероятность того, что в любой момент времени  $t \geq 0$  в ОКВС из  $N$  модулей, объединенных в топологию  $S$  и находящихся в начальном состоянии  $j$  (число отказавших модулей) может быть образована связанная подструктура из  $r$  модулей, объединенных в топологию  $S''$ .

Процедура расчета вектор-функции структурно-топологической живучести ОКВС сводится по существу к расчету вероятности  $P(r, S'', t)$ , которая может быть представлена в виде произведения двух независимых вероятностей:

$$P(r, S'', t) = P_{N, N-j}(t) \cdot P_r(S''), \quad (2)$$

где  $P_{N, N-j}(t)$  – вероятность того, что в любой момент времени  $t \geq 0$  в ОКВС из  $N$  модулей, находящейся в начальном состоянии  $j$  исправных  $n$  модулей;  $P_r(S'')$  – вероятность того, что из  $n$  исправных модулей может быть образована связанная подструктура  $r$  модулей с заданной топологией  $S''$ . Отказоустойчивый характер функционирования ОКВС учитывается на этапе расчета вероятности  $P_{N, N-j}(t)$ , причем топология на данном этапе не принимается во внимание, т.е. рассматривается определенное множество несвязанных модулей. Учет топологических характеристик проводится при расчете вероятности  $P_r(S'')$ .

Пусть ОКВС состоит из  $N$  высоконадежных модулей и в процессе расчета вероятности  $P_{N, N-j}(t)$  требуется высокая точность для учета возникновения редких событий-отказов ОКВС в целом. Получение аналитических выражений расчета вероятности  $P_{N, N-j}(t)$  базируется на методе малого параметра и методе экспресс-анализа [2, 5, 6, 7].

**2. Метод малого параметра.** В данном случае метод малого параметра сводится к тому, что в рамках математической модели, описывающей действие ОКВС, выявляется определенный малый параметр, малость которого и позволяет обеспечить высокую точность оценки значений показателей качества отказоустойчивого функционирования ОКВС [3].

ОКВС периодического действия в условиях высокой надежности и абсолютной исправности модулей представляет собой систему массового обслуживания, функционирование которой





где  $A_i = \Delta_{N-n+2}(-\alpha_i) / \Delta'_{N-n+2}(-\alpha_i)$ ;

$$\Delta'_{N-n+2}(-\alpha_i) = (-\alpha_i)(\alpha_1 - \alpha_i) \cdots (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \cdots (\alpha_{N-n+1} - \alpha_i).$$

Используя известные формулы преобразования от изображения к оригиналу, т.е. обратное преобразование Лапласа, получим окончательное выражение для  $P_{0,N-n}(t) = P_{N-n+1}(t)$ :

$$P_{0,N-n}(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{N-n+1} A_i e^{-\alpha_i t}. \quad (15)$$

Тогда вероятность безотказной работы ОКВС определяется следующим образом:

$$P_{N,N-j}(t) = [1 - P_{0,N-n}(t)]. \quad (16)$$

Для получения конкретных численных значений вероятности отказа и безотказной работы ОКВС на заданном интервале времени составлена программа расчета с учетом специфику функционирования ОКВС из высоконадежных модулей и построена зависимость  $P_{0,N-n}(t) = f(\tau_B)$ , которая показана на рис. 1.

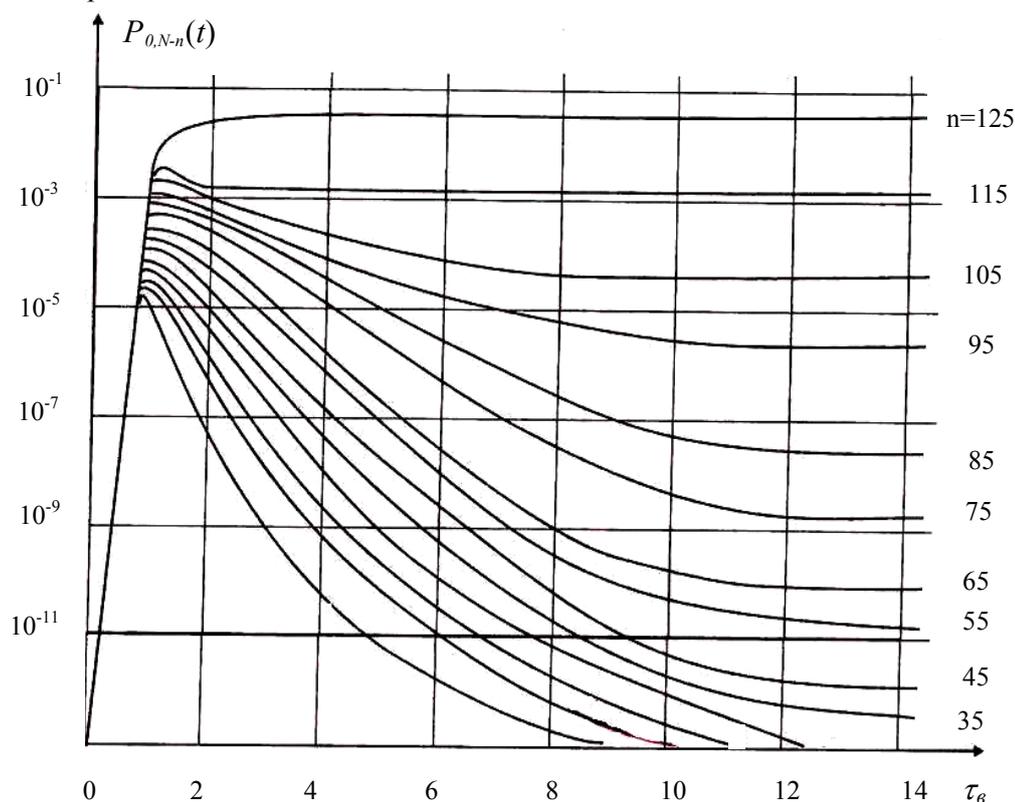


Рисунок 1 – Зависимость вектор-функции вероятности отказа от временного интервала при  $N = 125$ ;  $m = 1$ ;  $\lambda = 0,001$  1/ч

Как видно из построенной зависимости в начальный момент времени ОКВС находится в работоспособном состоянии и вероятность отказа в данном случае равна нулю.

На интервале  $0 < t \leq 1/\mu$  происходит увеличение вероятности отказа  $P_{0,N-n}(t)$ , которая достигает максимума при  $t = 1/\mu$ . Это связано с тем, что пока восстанавливающее устройство не восстановит хотя бы одного элементарного модуля резерва, существует вероятность отказа ОКВС в целом. На интервале  $1/\mu < t \leq \tau_B$  вероятность отказа значительно снижается и ввиду выполнения неравенства  $\mu \gg \varepsilon^x \lambda_{ij}^{(1)}(t)$  однородная коммутационно-вычислительная структура входит в стационарный режим. Время переходного режима зависит от размерности введенной подструктуры резерва и увеличивается при ее увеличении.

**4. Метод определения вероятности образования связанной подструктуры.** Топология связанной подструктуры определяется структурой реализуемых алгоритмов. В процессе функционирования ОКВС возможны отказы отдельных модулей. Выход из строя любого модуля

приводит к разрыву линии связи, соединяющую данный модуль с соседними. Выход из строя определенного количества модулей может привести к возникновению блокировки, т.е. когда некоторое количество исправных модулей не может быть включено в образуемую подструктуру вследствие того, что отсутствуют связи между данными модулями и основной подструктурой. Тогда вектор-функция вероятности образования связанной подструктуры определяется как [8, 9]:

$$\vec{P}_r = \{P_r(S'')\}, \quad (17)$$

где  $P_r(S'') = P(r, S'', k)$  – вероятность образования связанной подструктуры из  $r$  модулей с топологией  $S'$  при  $k$  отказавших модулей в ОКВС с заданной топологией (макроструктурой). Расчет вероятности образования связанной подструктуры необходимо провести в случае, когда  $r \leq N - k$ . В противном случае  $P_r(S'') = 0$ .

Теперь можно перейти к расчету вероятности образования связанной подструктуры для различных макроструктур ОКВС.

*Магистральная макроструктура.* Отказ одного модуля в данной структуре ведет к тому, что отказавший модуль отключается от единой магистрали. Связность всех оставшихся модулей сохраняется неизменной. Поэтому при расчете вероятности образования связанной подструктуры основную роль играет соотношение между количеством модулей  $r$  в подструктуре и количеством исправных модулей  $i$  в структуре и определяется как:

$$P_r(S'') = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leq i, \\ 0, & \text{если } r > i. \end{cases} \quad (18)$$

Минимальное количество отказавших модулей, при котором возникает блокировка, определяется по следующей формуле:

$$K_{\min} = \lceil N / r \rceil, \quad (19)$$

где знак  $\lceil \dots \rceil$  – означает отбрасывание дробной части.

Максимальное количество отказавших модулей, при котором возможно образование связанной подструктуры, определяется как:

$$K_{\max} = N - r. \quad (20)$$

*Одномерная конечная абелева изотропная симметричная структура (КАИС).* Для определения вероятности образования связанной подструктуры из  $r$  модулей с топологией  $S''$  в любом из состояний структуры  $i \in E$  проведем следующие рассуждения. Если в структуре из  $N$  модулей исправны все, то очевидно, что  $P_r(S'') = 1, r \leq N$ . Если отказал один модуль, то  $P_r(S'') = 1$ , так как все модули структуры имеют две связи с соседними и отказ любого модуля не ведет к разбиению структуры на несвязанные подструктуры.

Допустим, что в ОКВС из  $N$  модулей отказали  $k$  модулей, требуется образовать подструктуру из  $r$  связанных модулей с топологией  $S''$  и необходимо определить вероятности образования данной связанной подструктуры при различных значениях  $k$ . После образования подструктуры из  $r$  модулей количество комбинаций размещения  $k$  отказавших модулей по структуре будет как число сочетаний  $C_{N-r}^k$ . Учитывая, что число различных положений образуемой подструктуры с учетом топологии равно числу модулей  $r$  в подструктуре, а число различных комбинаций в различных положениях образуемой подструктуры определится как число сочетаний  $r \cdot C_{N-r-1}^{k-1}$ . В данном случае общее количество комбинаций размещения  $k$  отказавших модулей по структуре из  $N$  модулей будет как число сочетаний  $C_N^k$  и для вероятности образования подструктур из  $r$  модулей с топологией  $S''$  окончательно получим:

$$P_r(S'') = (C_{N-r}^k + r \cdot C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k. \quad (21)$$

Максимальное и минимальное количество отказавших ЭМ определяется аналогично предыдущему случаю.

*Линейная макроструктура.* Линейную макроструктуру – удобно интерпретировать следующим образом. Линейная макроструктура – это частный случай одномерной КАИС – структуры, число модулей в которой на единицу больше числа модулей в линейной структуре, причем дополнительный модуль находится в состоянии отказа в любой момент времени.

В отличие от одномерной КАИС-структуры в линейной структуре возможно появление блокировок уже при одном отказавшем модуле, если  $N/r < 2$ . Если в структуре исправны все

модули, то как и в предыдущем случае,  $P_r(S'') = 1$ . Поскольку линейная структура частный случай одномерной КАИС-структуры вероятность образования подструктуры определяется как:

$$P_r(S'') = (C_{N-r}^k + A \cdot C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k, \quad (22)$$

где  $A$  – число различных положений образуемой подструктуры с учетом ее топологии и равно:

$$A = \begin{cases} r, & \text{при } N/r \geq 2, \\ N-r, & \text{при } N/r < 2. \end{cases} \quad (23)$$

Максимальное и минимальное количество отказавших модулей определяется аналогично предыдущему случаю.

*Матричная макроструктура.* В матричной структуре каждый модуль имеет четыре связи с соседними. Минимальное количество отказавших модулей в структуре из  $N = Q \cdot Q$  модулей, при котором возникает блокировка, определяется как:

$$K_{\min} = \lceil Q/q \rceil^2. \quad (24)$$

Максимальное количество отказавших модулей в структуре, как и во всех предыдущих случаях, при котором возможно образование только одной подструктуры  $r = q \cdot q$  модулей равно:

$$K_{\max} = N - r. \quad (25)$$

Если количество отказавших модулей  $K < K_{\min}$ , то  $P_r(S'') = 1$ . При расчете вероятности образования связанной подструктуры надо рассматривать два случая:

Случай 1. Когда отношение  $Q/q < 2$ .

В этом случае число различных положений образуемой подструктуры по ОКВС  $l = Q - q$  и вероятность образования связанной подструктуры из  $r$  модулей определяется как:

$$P_r(S'') = [C_{N-r}^k + l(\sum_{a=1}^q C_q^a C_{N-r-q}^{k-a} + \sum_{a=1}^{q-l} C_{q-l}^a C_{N-r-q-l}^{k-a})] / C_N^k. \quad (26)$$

Случай 2. Когда отношение  $Q/q \geq 2$ :

а) количество отказавших модулей  $k < q$ .

Число различных положений образуемой подструктуры равно  $q$ , а число различных комбинаций размещения отказавших модулей по структуре при различных положениях образуемой подструктуры определится как число сочетаний  $q \sum_{a=k}^1 C_q^a C_{N-r-q}^{k-a}$ . Тогда для расчета вероятности

$P_r(S'')$  получим:

$$P_r(S'') = (C_{N-r}^k + q \cdot \sum_{a=k}^1 C_q^a C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k; \quad (27)$$

б) количество отказавших модулей  $k \geq q$ .

Тогда аналогично предыдущему случаю для расчета вероятности  $P_r(S')$  получим:

$$P_r(S'') = (C_{N-r}^k + q \cdot \sum_{a=q}^1 C_q^a C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k. \quad (28)$$

*Трехмерная макроструктура.* Трехмерную макроструктуру можно интерпретировать как горизонтальные или вертикальные взаимосвязанные матричные макроструктуры (плоскости). В такой макроструктуре каждый элементарный модуль имеет непосредственную связь с шестью соседними модулями, где из этих шести модулей четыре находится в одной плоскости трехмерной макроструктуры, а остальные из двух каждый модуль находится в соседней плоскости с данной плоскостью. Минимальное количество отказавших модулей в ОКВС из  $N=Q \cdot Q \cdot Q$  модулей, при котором возникает блокировка, определяется как:

$$K_{\min} = \lceil Q/q \rceil^3. \quad (29)$$

Максимальное количество отказавших модулей в ОКВС, как и во всех предыдущих случаях, при котором возможно образование только одной подструктуры  $r = q \cdot q \cdot q$  модулей равно:

$$K_{\max} = N - r. \quad (30)$$

Если количество отказавших модулей  $K < K_{\min}$ , то  $P_r(S'') = 1$ . В процессе расчета вероятности образования связанной подструктуры надо рассматривать два случая:

Случай 1. Когда отношение  $Q/q < 2$ .

В этом случае число различных положений образуемой связанной подструктуры по ОКВС  $l = (Q - q)^2$  и вероятность образования связанной подструктуры из  $r$  модулей определяется как:

$$P_r(S'') = \left\{ \left[ C_{N-r}^k + l \left( \sum_{a=1}^q C_q^a C_{N-r-q}^{k-a} + \sum_{a=1}^{q-l} C_{q-l}^a C_{N-r-q-l}^{k-a} \right) \right] / C_N^k \right\}^2. \quad (31)$$

Случай 2. Когда отношение  $Q/q \geq 2$ :

а) количество отказавших модулей  $k < q$ .

Число различных положений образуемой подструктуры равно  $q^2$ , а число различных комбинаций размещения отказавших модулей по ОКВС при различных положениях образуемой подструктуры определится как число сочетаний  $(q \sum_{a=k}^1 C_q^a C_{N-r-q}^{k-a})^2$ . Тогда для расчета вероятности образования связанной подструктуры  $P_r(S'')$  получим:

$$P_r(S'') = \left[ (C_{N-r}^k + q \cdot \sum_{a=k}^1 C_q^a C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k \right]^2; \quad (32)$$

б) количество отказавших модулей  $k \geq q$ .

Тогда аналогично предыдущему случаю для расчета вероятности  $P_r(S'')$  получим:

$$P_r(S'') = \left[ (C_{N-r}^k + q \cdot \sum_{a=q}^1 C_q^a C_{N-r-1}^{k-1}) / C_N^k \right]^2. \quad (33)$$

На основе полученных аналитических выражений для различных макроструктур составлена программа расчета и построена зависимость  $P_r(S'') = f(k)$  при заданном количестве модулей, топологии ОКВС и ранге образуемой подструктуры, которая показана на рис. 2.

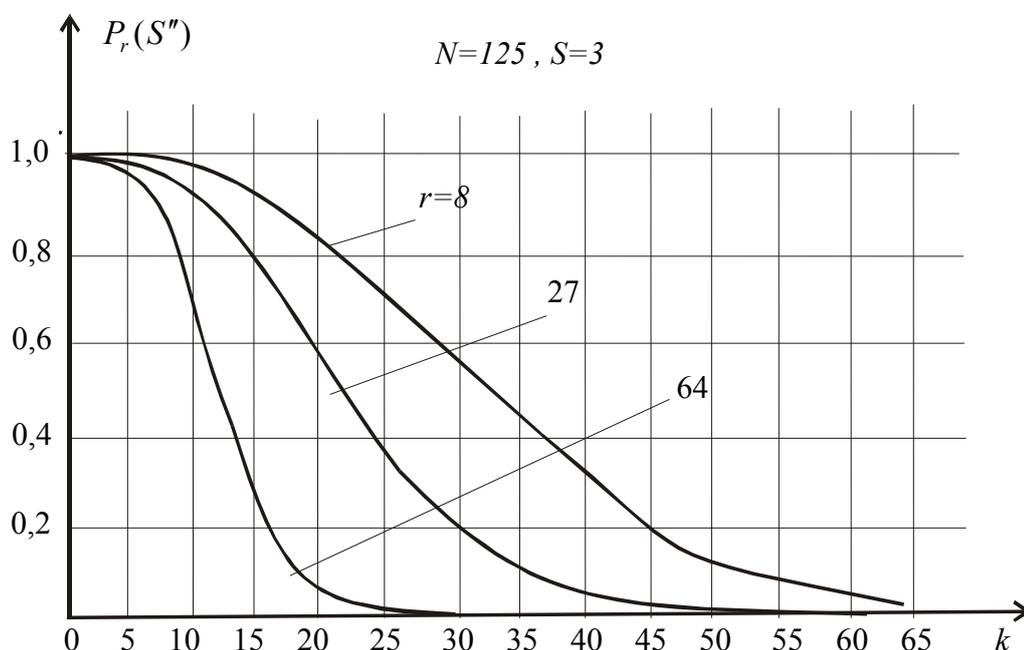


Рисунок 2 – Зависимость вектор-функции образования связанной подструктуры от количества отказавших модулей для трехмерной макроструктуры

Как видно из построенных зависимостей вероятность образования связанной подструктуры равна единице, если нет отказавших модулей и  $r \leq N$ . С увеличением числа отказавших модулей и ранга образуемой подструктуры вероятность образования связанной подструктуры уменьшается и становится равным нулю при  $N - r < k$ .

После расчета вероятности отказа и вероятности образования связанной подструктуры проведены расчеты компонентов вектор-функции структурно-топологической живучести по

формуле:

$$P_j(r, S'', t) = [1 - P_{0, N-n}(t)] P_r(S''), \quad (34)$$

и построены зависимости  $P_j(r, S'', t) = f(\tau_B)$  при заданных значениях  $N, S, r, S''$  и при различных количествах отказавших модулей, которые показаны на рис. 3.

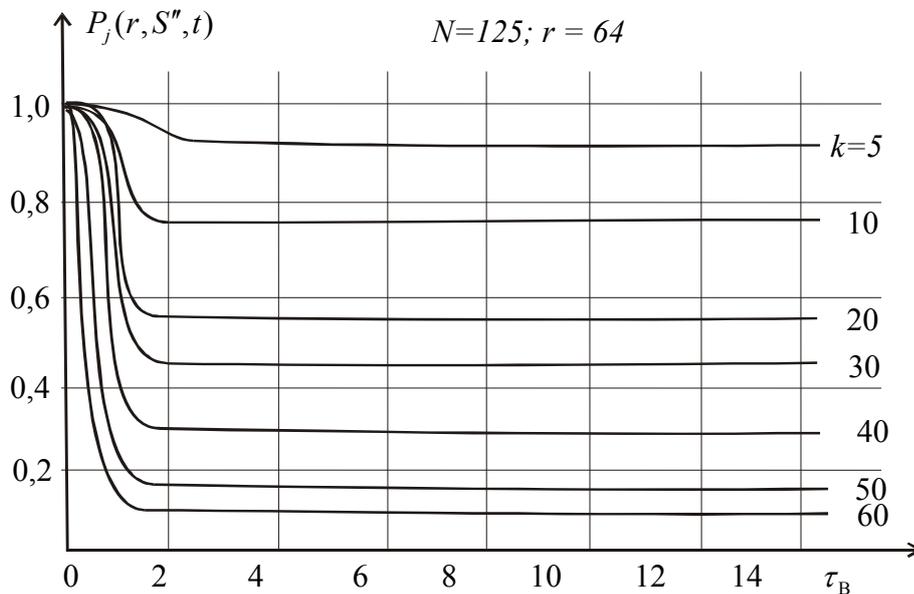


Рисунок 3 – Зависимость компоненты вектор-функции структурно-топологической живучести от временного интервала для трехмерной макроструктуры при различных значениях  $N, r, k$

Как видно из рисунков значения вектор-функции структурно-топологической живучести в начальный момент времени равно единице, т.е. однородная коммутационно-вычислительная структура находится в работоспособном состоянии.

На интервале  $0 < t \leq 1/\mu$  происходит уменьшение вероятности безотказной работы, которая достигает минимума при  $t = 1/\mu$  и, кроме того происходит уменьшение вероятности образования связанной подструктуры с увеличением количества отказавших модулей и ОКВС.

Таким образом, анализ процесса функционирования отказоустойчивых ОКВС зависит от выбора показателей структурной надежности, учитывающих режим отказоустойчивости и адекватно соответствующих постоянно усложняющейся топологии ОКВС, и с этой точки зрения применение разработанной методики позволит повысить точность расчетов вероятностей отказа, безотказной работы и образования связанной подструктуры ОКВС из высоконадежных модулей.

### Литература

1. Евреинов Э.В. Однородные вычислительные системы, структуры и среды. – М.: Радио и связь, 1981. – 208 с.
2. Евреинов Э.В., Хорошевский В.Г. Однородные вычислительные системы. – Новосибирск: Наука, 1978. – 320 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер. с англ. / Под ред. В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. Коваленко И.Н. Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. – М.: Сов. радио, 1980. – 208 с.
5. Корнеев В.В. Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. – Новосибирск: Наука, 1985. – 168 с.
6. Мансуров Т.М. Отказоустойчивое функционирование управляющих устройств цифровых систем коммутации // Электросвязь. – 2000. – М. – №9. – С. 22-24.
7. Мансуров Т.М. Структурная надежность коммутационных полей цифровых систем автоматической коммутации // Электросвязь. – 2001. – М. – №5. – С. 45-46.
8. Мансуров Т.М. Однородная коммутационно-вычислительная структура // Приборы и системы. Управление, Контроль, Диагностика. – 2002. – М. – №7. – С. 31-34.
9. Мансуров Т.М. Методы организации функционирования однородных коммутационно-вычислительных структур // Электросвязь, 2004. – М. – №8. – С. 30-35.