УДК 517.983.24

Баранов Н. И.
Baranov N. I.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУВЕЩЕСТВЕННЫХ УНИТАРНЫХ УЗЛОВ

CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF PRODACT SEMIREAL UNITARY KNOTS

Аннотация. Доказано, что характеристическая функция произведения полувещественных узлов является полувещественной функцией; произведение полувещественных узлов является полувещественным узлом.

Summary. Proof, that characteristic function of prodact semireal knots is semireal function; prodact semireal knots is semireal knot.

Понятию характеристической функции оперативного узла исторически предшествовало понятие характеристической функции линейного оператора T для случая $k = \dim\left(\mathrm{I} - T^{*}T\right)H < \infty$ [1]. Позднее, ограничения на размерность k были сняты. Выяснилось, что данному оператору T соответствует не одна, а бесконечное множество характеристических функций. Это привело к понятию операторного узла и однозначному соответствию данному узлу его характеристической функции.

Вопрос о существовании и взаимном расположении инвариантных подпространств оператора сводится (в рамках теории операторных узлов) к изучению специальных факторизаций характеристической функции узла. Под факторизацией характеристической функции понимается любое ее представление в виде произведения двух голоморфных оператор-функций.

В настоящей работе рассматривается операторные узлы введенные в работе [2].

1. Совокупность Δ, состоящая из сепарабельных гильбертовых пространств H_0, G_0, F_0, для которых $\dim\left(H_0 \oplus G_0\right) = \dim\left(H_0 \oplus F_0\right)$, и унитарного оператора

$$U \in \left[H_0 \oplus F_0; H_0 \oplus G_0\right] \tag{1}$$

называется унитарным узлом [2] и обозначается символом

$$\begin{pmatrix} H_0 & & H_0 \\ & U & \\ G_0 & & F_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Через $\left[H_1; H_2\right]$ в (1) обозначается совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из пространства H_1 в пространство H_2.

Обозначим через P и Q ортопроекторы из $H_0 \oplus G_0$ соответственно на пространства H_0 и G_0. Введем обозначения

$$T = PU\Big|H_0 \in \left[H_0; H_0\right], \tag{3}$$

$$F = PU\Big|F_0 \in \left[F_0; H_0\right], \tag{4}$$

$$G = QU\Big|H_0 \in \left[H_0; G_0\right], \tag{5}$$

$$S = QU\Big|F_0 \in \left[F_0; G_0\right]. \tag{6}$$

Операторы (3) … (6) называются компонентами узла (2). Оператор (3) называется основным оператором узла.

Отображение I гильбертова пространства H на себя называется инволюцией, если $I^2 = \mathrm{I}$ (I – единичный оператор) и для любых $f \in H$, $g \in H$ справедливо равенство [3]

$$\left(If, Ig\right) = \overline{\left(f, g\right)}.$$

Оператор $A \in [H;H]$ называется (I_1, I_2) – полувещественным, если существуют такие инволюции I_1 и $I_2 \neq I_1$, действующие в H, что $I_1 A = A I_2$.

Унитарный узел называется (I', I'', I_1, I_2) – полувещественным, если существуют инволюции I', I'', определенные на пространстве H_0 и инволюции I_1, I_2, определенные соответственно на G_0 и F_0, такие, что

$$\begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} U = U \begin{pmatrix} I'' & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Этому определению эквивалентно следующее определение.

Унитарный узел называется (I', I'', I_1, I_2) – полувещественным, если существуют инволюции I', I'', I_1, I_2, определенные на тех же пространствах, что и в приведенном выше определении, такие что

$$I'T = TI'', \tag{7}$$

$$I'F = FI_2, \tag{8}$$

$$I_1 G = GI'', \tag{9}$$

$$I_1 S = SI_2. \tag{10}$$

Если в этих определениях положить $I' = I'' = I$, то унитарный узел называется (I, I_1, I_2) – вещественным [4].

Из определения (I', I'', I_1, I_2) – полувещественного узла (2) следует, что основной оператор такого узла является (I', I'') – полувещественным. Справедливо обратное утверждение [5].

Теорема 1. Если основной оператор T унитарного узла (2) является (I', I'') – полувещественным, то существуют инволюции I_1 и I_2, определенные соответственно на пространствах G_0 и F_0, такие, что узел (2) является (I', I'', I_1, I_2) – полувещественным.

2. Пусть

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} H_{01} & & H_{01} \\ & U_1 & \\ G_0 & & R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{01} & T_1 & F_1 & H_{01} \\ G_0 & G_1 & S_1 & R_1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} H_{02} & & H_{02} \\ & U_2 & \\ R_2 & & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{02} & T_2 & F_2 & H_{02} \\ R_2 & G_2 & S_2 & F_0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

два унитарных узла, удовлетворяющих условию $R_1 = R_2$, т.е. правое внешнее пространство [2] узла Δ_1 совпадает с левым внешним пространством узла Δ_2.

Рассмотрим унитарный узел

$$\Delta = \begin{pmatrix} H_{01} \oplus H_{02} & & H_{01} \oplus H_{02} \\ & U & \\ G_0 & & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{01} \oplus H_{02} & T & F & H_{01} \oplus H_{02} \\ G_0 & G & S & F_0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$U = (U_1 \oplus \mathrm{I}_2)(U_2 \oplus \mathrm{I}_1). \tag{14}$$

Узел (13) называется произведением узлов (11) и (12) и обозначается $\Delta_1 \Delta_2$.

Пусть P_1 и P_2 – ортопроекторы из $H_{01} \oplus H_{02}$ соответственно на H_{01} и H_{02}. Тогда

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 + F_1G_2P_2, \quad F = F_2 + F_1S_2, \tag{15}$$
$$G = G_1P_1 + S_1G_2P_2, \quad S = S_1S_2.$$

3. Теорема 2. Пусть

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} H_{01} & T_1 & F_1 & H_{01} \\ G_0 & G_1 & S_1 & R \end{pmatrix} \tag{16}$$

(I', I'', I_1, I_2) – полувещественный узел,

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} H_{02} & T_2 & F_2 & H_{02} \\ R & G_2 & S_2 & F_0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

(J', J'', J_1, J_2) – полувещественный узел.

Если $I_2 = J_1$, то $\Delta = \Delta_1\Delta_2$ является $\left(I_0', I_0'', I_1, J_2\right)$ – полувещественным узлом, где $I_0' = I' \oplus J'$, $\quad I_0'' = I'' \oplus J'$.

Доказательство.

Основной оператор T узла Δ задается первым равенством из (15).

Рассмотрим произведение

$$T\,I_0'' = \left(T_1P_1 + T_2P_2 + F_1G_2P_2\right)\left(I'' \oplus J''\right) = T_1I''P_1 + T_2J''P_2 + F_1G_2J''P_2.$$

Поскольку Δ_1 и Δ_2 полувещественные узлы, то из (7) и (9) получаем

$$T_1I'' = I'T_1, \quad T_2J'' = J'T_2, \quad G_2J'' = J_1G_2.$$

Учитывая, что $I_2 = J_1$, из (8) получаем

$$F_1J_1 = F_1I_2 = I'F_1.$$

Следовательно,

$$T\,I_0'' = I'T_1P_1 + J'T_2P_2 + I'F_1G_2P_2 = I_0'T. \tag{18}$$

Этим доказано, в силу теоремы 1, что узел Δ является полувещественным. Аналогично проверяются равенства

$$F\,J_2 = I_0'F, \quad G\left(I'' \oplus J''\right) = I_1G, \quad SJ_2 = I_1S. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что Δ является $\left(I_0', I_0'', I_1, J_2\right)$ – полувещественным узлом.

Теорема доказана.

Для узлов (16) и (17), удовлетворяющих условиям теоремы 2, равенство $I_2 = J_1$ будем называть связыванием инволюций.

4. Характеристической оператор-функцией (ХОФ) унитарного узла

$$\Delta = \begin{pmatrix} H_0 & T & F & H_0 \\ G_0 & G & S & F_0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

называется [2] операторнозначная функция комплексного переменного λ

$$\theta(\lambda) = S + \lambda G\left(\mathrm{I} - \lambda T\right)^{-1} F, \tag{21}$$

определенная в круге $|\lambda| < 1$. Значения ХОФ являются линейными ограниченными операторами, действующими из F_0 в G_0.

ХОФ (20) узла (21) называется (I_1, I_2) – полувещественной, если существуют инволюции I_1 и I_2, определенные соответственно на пространствах G_0 и F_0, такие что

$$I_1\theta(0)I_2 = \theta(0). \tag{22}$$

Если унитарный узел (20) является полувещественным (I', I'', I_1, I_2), то его ХОФ (I_1, I_2) – полувещественная. Действительно, из $\theta(0) = S$ и (10) следует (22).

Рассмотрим связь произведения полувещественных узлов с их ХОФ.

Теорема 3. Пусть Δ_1 и Δ_2 соответственно унитарные узлы (16) и (17). Если выполнено условие связывания инволюций $I_2 = J_1$, то ХОФ узла $\Delta = \Delta_1\Delta_2$ является (I_1, J_2) – полувещественной.

Доказательство.

Обозначим через $\theta_1(\lambda)$, $\theta_2(\lambda)$, $\theta(\lambda)$ $(|\lambda| < 1)$ ХОФ унитарных узлов Δ_1, Δ_2, Δ соответственно. Известно [2], что

$$\theta(\lambda) = \theta_1(\lambda)\theta_2(\lambda). \tag{23}$$

Из полувещественности узлов Δ_1 и Δ_2 следует равенство $\theta_1(0) = I_1\theta_1(0)I_2$, $\theta_2(0) = J_1\theta_2(0)J_2$. Учитывая (23) и $I_2 = J_1$, $I_2^2 = \mathrm{I}$, получаем $\theta(0) = I_1\theta(0)J_2$.

Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 при выполнении условий связывания инволюций легко обобщаются на любое конечное число множителей Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (соответственно $\theta_1(\lambda)$, $\theta_2(\lambda), \ldots, \theta_n(\lambda)$).

Полученные результаты могут найти применения в теории одноклеточных операторов [6], а также при исследовании факторизаций матриц-функций [7].

Литература

1. *Лившиц М. С., Потапов В. П.* Теорема умножения характеристических матриц-функций // ДАН СССР. – 1950. – Т. 62. – № 4. – С. 625-628.
2. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33. – № 4. – С. 141-168.
3. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.
4. *Баранов Н. И.* Мультипликативное представление характеристической функции вещественных унитарных узлов // Наукові праці ОНАЗ. – Одеса, 2004. – № 2. – С. 87-89.
5. *Баранов Н. И., Равданжамц Б.* Полувещественные унитарные узлы и их характеристические функции. – Новосибирск: СО АН СССР, ред. «Сибирского мат. журнала», 1987. – 12 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 5487 – В 87.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
7. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* I – растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей // Успехи мат. наук. – 1973. – Т. 28. – № 1. – С. 65-130.