УДК 621.371:621.372

Иваницкий А.М., Дмитриева И.Ю., Рожновский М.В.
Ivanitckiy A.M., Dmitrieva I.Yu., Rozhnovskiy M.V.

СВЕДЕНИЕ КЛАСИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА К СКАЛЯРНЫМ УРАВНЕНИЯМ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПОНЕНТ ВЕКТОРОВ $\vec{E}$ И $\vec{H}$

THE REDUCTION OF THE CLASSICAL MAXWELL EQUATIONS' SYSTEM TO THE SCALAR EQUATIONS FROM THE $\vec{E}$ AND $\vec{H}$ VECTORS' COMPONENTS

Аннотация. Рассматривается сведение классической системы уравнений Максвелла для линейных однородных изотропных покоящихся сред к равносильной системе скалярных уравнений относительно компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Summary. We consider the reduction of the classical Maxwell equations' system for the linear homogeneous isotropic undisturbed media to the equivalent system of scalar equations from the $\vec{E}$ and $\vec{H}$ vectors' components.

В классической электродинамике всегда существовала проблема определения минимального числа постулатов. Еще в 1890 г. в своей работе «Об основных уравнениях электродинамики покоящихся сред» Р.Г. Герц показал [1], что в покоящихся средах первые два векторных уравнения Максвелла являются основными постулатами. С учетом трех материальных уравнений они представляют собой совместную систему шести дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1]. Неизвестные в этой системе – скалярные функции над пространством R^4 [2] – координаты векторов напряженности электрического и магнитного полей.

К настоящему моменту вышеуказанная проблема, а также вопрос разрешимости соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных не потеряли своей актуальности для электродинамики сред различной характеристики, что и является основной изучаемой здесь задачей.

Так, в работе [3] исследовался вопрос зависимости третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух уравнений. Этот результат позволил утверждать, что при аксиоматическом построении классической электродинамики линейных однородных изотропных покоящихся сред при наличии сторонних токов достаточно в качестве двух основных постулатов принять первые два векторных уравнения. Приведенное в [3] доказательство было получено благодаря обоснованному свойству консервативности многомерных экспофункций [4], [5].

На современном этапе изучения поставленной выше задачи стал почти классическим результат В.С. Владимирова [6] о существовании решения уравнений Максвелла в частном случае – для пассивных систем.

Кроме того, в известной работе А.М. Иваницкого [7] была доказана разрешимость классической максвелловской системы в дифференциальной форме при наличии схемы замещения цепи. При этом была задействована теория многомерных цепей без применения аналитических методов.

Подобная задача в классической электродинамике решена для случая установившихся электромагнитных процессов [8], применяя тождество векторного анализа [2].

Однако, насколько известно, математическое обоснование конструктивного решения классической системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для произвольных электромагнитных процессов пока не приведено. В связи с этим целью данной работы является чисто аналитическое доказательство существования вышеуказанного решения, и именно для такой системы, но без потери исходной физической постановки задачи.

Рассматриваемая в данной работе задача решается с помощью последовательного применения соответствующих дифференциальных операторов к шести основным дифференциальным уравнениям в частных производных относительно компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в пространстве R^4 [2].

При этом под «скалярными» всюду в данной работе подразумеваются те уравнения, что содержат в качестве неизвестной лишь одну компоненту векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е. неизвестной является уже не векторная, а скалярная функция над пространством R^4. Таким образом, исходная система сводится к равносильной ей системе шести уравнений, каждое из которых содержит только одну искомую компоненту указанных векторов.

1. Сведение классической системы дифференциальных уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент вектора $\vec{E}$. Рассмотрим алгоритм преобразования классической максвелловской системы уравнений в дифференциальной форме для однородных изотропных покоящихся сред к эквивалентной системе, одно из уравнений которой является уже не векторным, а скалярным, т.е. содержит лишь одну неизвестную компоненту вектора $\vec{E}$. Не нарушая общности рассуждений, проведем необходимые выкладки для координаты E_1.

Предварительно введем следующие обозначения:
$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ – искомые вектор-функции, описывающие напряженность электрического и магнитного полей соответственно со скалярными компонентами $E_i = E_i(x, y, z, t)$ и $H_i = H_i(x, y, z, t)$ $(i = \overline{1,3})$ в традиционном координатном пространстве R^4; дифференциальные операторы по неизвестным действительным переменным x, y, z, t обозначим через

$$\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

Положительные постоянные:
σ – удельная проводимость среды; μ_a, ε_a – абсолютная магнитная и диэлектрическая проницаемость среды соответственно.

Вектор-функции $\vec{j}^{\,cm} = \vec{j}^{\,cm}(x, y, z, t)$ предполагается известной и описывает сторонние источники тока, а $j_i^{cm} = j_i^{cm}(x, y, z, t)$ $(i = \overline{1,3})$ – ее скалярные компоненты также над пространством R^4.

Тогда основные два уравнения классической максвелловской системы покоординатно запишутся так

$$\begin{cases} -(\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_1 + 0 + 0 + 0 - \partial_3 H_2 + \partial_2 H_3 = j_1^{\text{ст}}, \\ 0 - (\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_2 + 0 + \partial_3 H_1 + 0 - \partial_1 H_3 = j_2^{\text{ст}}, \\ 0 + 0 - (\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_3 - \partial_2 H_1 + \partial_1 H_2 + 0 = j_3^{\text{ст}}, \\ 0 + \partial_3 E_2 - \partial_2 E_3 - \mu_a\partial_0 H_1 + 0 + 0 = 0, \\ -\partial_3 E_1 + 0 + \partial_1 E_3 + 0 - \mu_a\partial_0 H_2 + 0 = 0, \\ \partial_2 E_1 - \partial_1 E_2 + 0 + 0 + 0 - \mu_a\partial_0 H_3 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

либо в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} -(\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_1 - \partial_3 H_2 + \partial_2 H_3 = j_1^{\text{ст}} \;\big|\mu_a\partial_0, \\ -(\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_2 + \partial_3 H_1 - \partial_1 H_3 = j_2^{\text{ст}} \;\big|\mu_a\partial_0, \\ -(\sigma + \varepsilon_a\partial_0)E_3 - \partial_2 H_1 + \partial_1 H_2 = j_3^{\text{ст}} \;\big|\mu_a\partial_0, \\ \partial_3 E_2 - \partial_2 E_3 - \mu_a\partial_0 H_1 = 0 \;\big|\partial_3, \\ -\partial_3 E_1 + \partial_1 E_3 - \mu_a\partial_0 H_2 = 0 \;\big|\partial_1, \\ \partial_2 E_1 - \partial_1 E_2 - \mu_a\partial_0 H_3 = 0 \;\big|\partial_2. \end{cases} \tag{2}$$

Применим к первым трем уравнениям системы (2) оператор $\mu_a\partial_0$, а к последним трем – операторы $\partial_3, \partial_1, \partial_2$ соответственно и сложим почленно, – первое и шестое, третье и пятое, вторе и четвертое уравнения системы. В итоге придем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \partial_3 E_2 - \partial_2 E_3 - \mu_a \partial_0 H_1 = 0, \\ -\partial_3 E_1 + \partial_1 E_3 - \mu_a \partial_0 H_2 = 0, \\ \partial_2 E_1 - \partial_1 E_2 - \mu_a \partial_0 H_3 = 0, \\ \partial_2{}^2 E_1 - \partial_2 \partial_1 E_2 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_1 - \mu_a \partial_0 \partial_3 H_2 = \mu_a \partial_0 j_1{}^{\text{ст}}, \\ \partial_3{}^2 E_2 - \partial_3 \partial_2 E_3 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_2 - \mu_a \partial_0 \partial_1 H_3 = \mu_a \partial_0 j_2{}^{\text{ст}}, \\ \partial_1{}^2 E_3 - \partial_3 \partial_1 E_1 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_3 - \mu_a \partial_0 \partial_2 H_1 = \mu_a \partial_0 j_3{}^{\text{ст}}. \end{cases} \tag{3}$$

При этом естественно предполагается, что вектор-функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а значит, и их компоненты, непрерывно-дифференцируемы в заданной области из R^4 необходимое число раз, т.е. для «смешанных» дифференциальных операторов выполняется очевидное тождество

$$\partial_i \partial_k = \partial_k \partial_i \quad (k, i = \overline{0,3}). \tag{4}$$

Далее перепишем первые три уравнения (3), как показано ниже, и подставим первое выражение в шестое уравнение полученной системы, второе – в четвертое, а третье – в пятое

$$\begin{cases} -\mu_a \partial_0 H_1 = \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2, \\ -\mu_a \partial_0 H_2 = \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3, \\ -\mu_a \partial_0 H_3 = \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1, \\ \partial_2{}^2 E_1 - \partial_2 \partial_1 E_2 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_1 - \mu_a \partial_0 \partial_3 H_2 = \mu_a \partial_0 j_1{}^{\text{ст}}, \\ \partial_3{}^2 E_2 - \partial_3 \partial_2 E_3 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_2 - \mu_a \partial_0 \partial_1 H_3 = \mu_a \partial_0 j_2{}^{\text{ст}}, \\ \partial_1{}^2 E_3 - \partial_3 \partial_1 E_1 - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_3 - \mu_a \partial_0 \partial_2 H_1 = \mu_a \partial_0 j_3{}^{\text{ст}}. \end{cases}$$

Получим равносильную систему

$$\begin{cases} \mu_a \partial_0 H_1 = \partial_3 E_2 - \partial_2 E_3, \\ \mu_a \partial_0 H_2 = \partial_1 E_3 - \partial_3 E_1, \\ \mu_a \partial_0 H_3 = \partial_2 E_1 - \partial_1 E_2, \\ \left(\partial_2{}^2 + \partial_3{}^2\right) E_1 - \partial_1 (\partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_1 = \mu_a \partial_0 j_1{}^{\text{ст}}, \\ \left(\partial_1{}^2 + \partial_3{}^2\right) E_2 - \partial_2 (\partial_1 E_1 + \partial_3 E_3) - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_2 = \mu_a \partial_0 j_2{}^{\text{ст}}, \\ \left(\partial_1{}^2 + \partial_2{}^2\right) E_3 - \partial_3 (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2) - \mu_a \partial_0 (\sigma + \varepsilon_a \partial_0) E_3 = \mu_a \partial_0 j_3{}^{\text{ст}}. \end{cases} \tag{5}$$

При этом здесь и всюду в дальнейшем используется очевидное свойство линейности всех рассматриваемых дифференциальных операторов, а также их последовательное применение, которое понимается в обычном смысле – «справа налево», и

$$\partial_i{}^2 = \partial_i (\partial_i) \quad \left(i = \overline{0,3}\right). \tag{6}$$

Вводя в (5) стандартные обозначения для операторов Лапласа в $R^3 - \Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2$ перепишем (5) в новых обозначениях

$$\begin{cases}\left(\Delta-\partial_1^2\right)E_1-\partial_1\left(\partial_2E_2+\partial_3E_3\right)-\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)E_1=\mu_a\partial_0 j_1^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_2^2\right)E_2-\partial_2\left(\partial_1E_1+\partial_3E_3\right)-\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)E_2=\mu_a\partial_0 j_2^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^2\right)E_3-\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)-\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)E_3=\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}},\\ \mu_a\partial_0H_1=\partial_3E_2-\partial_2E_3,\\ \mu_a\partial_0H_2=\partial_1E_3-\partial_3E_1,\\ \mu_a\partial_0H_3=\partial_1E_2-\partial_2E_1.\end{cases} \qquad (7)$$

Положив далее оператор

$$\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)=\tilde{\partial}_0^2, \qquad (8)$$

запишем только первые три уравнения системы (7)

$$\begin{cases}\left(\Delta-\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_1-\partial_1\left(\partial_2E_2+\partial_3E_3\right)=\mu_a\partial_0 j_1^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_2-\partial_2\left(\partial_1E_1+\partial_3E_3\right)_2=\mu_a\partial_0 j_2^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_3-\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)=\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}\end{cases} \qquad (9)$$

и сведем дальнейшими эквивалентными преобразованиями матрицу системы (9) к диагональному виду, т.е. получим три скалярных уравнения относительно каждой из компонент $E_i\,(i=\overline{1{,}3})$.

Реализуем предлагаемый алгоритм для получения скалярного уравнения относительно E_1, как было отмечено ранее. Для этого применим вначале к первым двум уравнениям выделенной системы (9) оператор $\Delta+\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2$, а к третьему – $\left(-\partial_1\partial_3\right)$, после чего подставим преобразованное выражение для E_3 в первое измененное уравнение из (9)

$$\begin{cases}\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_1-\partial_1\partial_2E_2\right)-\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\partial_1\partial_3E_3=\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\mu_a\partial_0 j_1^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_2-\partial_2\partial_1E_1\right)-\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\partial_2\partial_3E_3=\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\mu_a\partial_0 j_2^{\text{ст}},\\ -\partial_1\partial_3\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_3=-\partial_1\partial_3^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)-\partial_1\partial_3\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}};\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_1^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_1-\partial_1\partial_2E_2\right)-\partial_1\partial_3^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)-\partial_1\partial_3\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}=\\ =\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\mu_a\partial_0 j_1^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_2^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_2-\partial_2\partial_1E_1\right)-\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\partial_2\partial_3E_3=\\ =\left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)\mu_a\partial_0 j_2^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^2-\tilde{\partial}_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}.\end{cases} \qquad (10)$$

(10) равносильна (9), и в третьем уравнении вернулись к его прежнему виду из (9).

Далее, применим к третьему уравнению из (10) оператор $\left(-\partial_2\partial_3\right)$ и подставим преобразованное выражение для E_3 во второе уравнение данной системы

$$
\begin{cases}
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_1-\partial_1\partial_2E_2\right)-\partial_1\partial_3{}^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)= \\
=\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_2{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_2-\partial_2\partial_1E_1\right)-\partial_2\partial_3{}^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)-\mu_a\partial_0\partial_2\partial_3j_3{}^{\text{ст}}= \\
=\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\mu_a\partial_0j_2{}^{\text{ст}}, \\
-\partial_2\partial_3\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_3=-\partial_2\partial_3{}^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)-\mu_a\partial_0\partial_2\partial_3j_3{}^{\text{ст}}.
\end{cases}
$$

После возврата к первоначальному представлению из (10) третьего уравнения последней системы, приходим к системе, эквивалентной (10):

$$
\begin{cases}
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_1-\partial_1\partial_2E_2\right)-\partial_1\partial_3{}^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)= \\
=\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_2{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_2-\partial_2\partial_1E_1\right)-\partial_2\partial_3{}^2\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)= \\
=\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0j_3{}^{\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Затем (11) преобразуется с помощью очевидных операторных тождеств:

$$
\left(\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)-\partial_3{}^2\right)\left(\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)-\partial_1{}^2\right)-\partial_1{}^2\partial_3{}^2=\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_2{}^2-\varkappa_0{}^2\right), \tag{12}
$$

$$
\left(\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)-\partial_3{}^2\right)\left(\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)-\partial_2{}^2\right)-\partial_2{}^2\partial_3{}^2=\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right), \tag{13}
$$

$$
\left(\Delta-\varkappa_0{}^2-\partial_3{}^2\right)\partial_1\partial_2-\partial_1\partial_2\partial_3{}^2=\partial_1\partial_2\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right) \tag{14}
$$

к нижеследующему виду:

$$
\begin{cases}
\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_2{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_1-\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\partial_1\partial_2E_2=\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_2-\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\partial_1\partial_2E_1=\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0j_3{}^{\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{15}
$$

В (15) к первому уравнению применим оператор $\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)$ из (13), а ко второму уравнению – $\partial_1\partial_2$ из (14) и подставим преобразованное выражение для E_2 в первое измененное уравнение, после чего вернемся к исходному виду второго уравнения из (15):

$$
\begin{cases}
\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_2{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_1-\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\partial_1\partial_2\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_2= \\
=\mu_a\partial_0\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right), \\
\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\left(\partial_1{}^2-\varkappa_0{}^2\right)\partial_1\partial_2E_2=\left(\Delta-\varkappa_0{}^2\right)\partial_1{}^2\partial_2{}^2E_1+\mu_a\,\partial_0\partial_1\partial_2\left(\left(\Delta+\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3j_3{}^{\text{ст}}\right) \\
\left(\Delta-\partial_3{}^2-\varkappa_0{}^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\,\partial_0j_3{}^{\text{ст}},
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)E_1-\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1^2\partial_2^2E_1-\mu_a\,\partial_0\partial_1\partial_2\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)= \\ =\mu_a\,\partial_0\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)E_2=\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\,\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right) \\ \left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\,\partial_0 j_3^{\text{ст}}, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)-\partial_1^2\partial_2^2\right)E_1= \\ =\mu_a\,\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)\left(\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right)+\partial_1\partial_3\left(\partial_1^2+\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)E_2=\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\,\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\,\partial_0 j_3^{\text{ст}}. \end{cases} \tag{16}$$

Полученная система (16) равносильна (15). Применив легко проверяемые операторные тождества

$$\left(\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)-\partial_1^2\partial_2^2=-\varkappa_0^2\left(\partial_1^2+\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)=-\varkappa_0^2\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right),$$

$$\partial_1\partial_3\left(\partial_1^2+\partial_2^2-\varkappa_0^2\right)=\partial_1\partial_3\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right), \tag{17}$$

где оператор Лапласа $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{3}\partial_i^2$, к первому уравнению из (16), приходим к эквивалентной системе

$$\begin{cases} -\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\varkappa_0^2\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_1= \\ =\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)\left(\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}\right)+\partial_1\partial_3\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)E_2=\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\varkappa_0^2\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_1=\mu_a\partial_0\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)\left(\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)j_1^{\text{ст}}-\partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)E_2=\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}. \end{cases} \tag{18}$$

Применяя обратный оператор $\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)^{-1}$ к первому уравнению (18) и учитывая обозначение (8), на основании которого к преобразованному первому уравнению применяем обратный оператор ∂_0^{-1}, записываем систему:

$$\begin{cases} -\mu_a\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)E_1=\mu_a\left(\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_1\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\left(\partial_1^2-\varkappa_0^2\right)E_2=\left(\Delta-\varkappa_0^2\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right), \\ \left(\Delta-\partial_3^2-\varkappa_0^2\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}, \end{cases} \tag{19}$$

эквивалентную (18).

Сокращая обе части первого уравнения из (19) на постоянную μ_a, приходим к окончательному виду искомой системы, равносильной выделенной исходной – (19); и первое уравнение полученной ниже системы – искомое скалярное относительно компоненты E_1:

$$
\begin{cases}
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_2=\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\partial_1\partial_2E_1+\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{20}
$$

При этом следует отметить, что явный вид вышеуказанных обратных операторов в данном случае вообще не требуется, – главное, что эти операторы существуют.

Применяя затем к первому уравнению из (20) оператор $\partial_1\partial_2$, а ко второму – оператор $\left(-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\right)$ и подставив преобразованное первое уравнение в измененное второе, после простейших преобразований получим второе скалярное уравнение относительно функции E_2:

$$
\begin{cases}
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_2=\partial_1\partial_2\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\,cm}+\partial_1^{\,2}\partial_2\mu_a\partial_0\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)-\\
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}.
\end{cases}
$$

Применяя во втором уравнении последней системы следствие из формулы (18)

$$
\sigma+\varepsilon_a\partial_0=\frac{1}{\mu_a}\partial_0^{-1}\tilde{\partial}_0^{\,2},
\tag{21}
$$

где ∂_0^{-1} – обратный оператор к ∂_0, перепишем упомянутую систему в равносильной форме

$$
\begin{cases}
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_2=\partial_1\partial_2\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\,cm}+\partial_1^{\,2}\partial_2\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)-\dfrac{1}{\mu_a}\partial_0^{-1}\tilde{\partial}_0^{\,2}\times\\
\times\mu_a\partial_0\left(\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}},
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\
-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_2=\partial_1\partial_2\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\left(\partial_1^{\,2}\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\right)j_2^{\text{ст}}+\\
+\left(\partial_1^{\,2}\partial_2\partial_3-\tilde{\partial}_0^{\,2}\partial_2\partial_3\right)j_3^{\text{ст}},\\
\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}.
\end{cases}
$$

Применив во втором уравнении последней системы операторные тождества:

$$
\begin{aligned}
&\partial_1^{\,2}\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)=\partial_1^{\,2}\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\partial_1^{\,2}+\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)=\partial_2^{\,2}\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)=\\
&=\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right),\\
&\partial_1^{\,2}\partial_2\partial_3-\tilde{\partial}_0^{\,2}\partial_2\partial_3=\partial_2\partial_3\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

придем к следующей системе, равносильной всем предыдущим

$$\begin{cases} -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_2=\partial_1\partial_2\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\\ +\partial_2\partial_3\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_3^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}. \end{cases}$$

Применив ко второму уравнению последней системы обратный оператор $\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)^{-1}$, получаем искомое скалярное уравнение относительно компоненты E_2:

$$\begin{cases} -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_2=\partial_1\partial_2 j_1^{\text{ст}}+\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\partial_3 j_3^{\text{ст}},\\ \left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ \underline{-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_2=\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)}\\ \left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\left(\partial_1E_1+\partial_2E_2\right)+\mu_a\partial_0 j_3^{\text{ст}}, \end{cases} \tag{23}$$

и в данном случае явный вид упомянутого обратного оператора также не требуется, поскольку для воздействия достаточно только его существование.

Наконец, применив к третьему уравнению из (23) оператор $\left(-\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)\right)$, а к первым двум уравнениям – операторы $\partial_3\partial_1$ и $\partial_3\partial_2$ соответственно, подставим преобразованные выражения для E_1, E_2 в измененное третье уравнение:

$$\begin{cases} -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_2=\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_3=\partial_3\partial_1\left(\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)\right)+\\ +\partial_3\partial_2\left(\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right)\right)-\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)j_3^{\text{ст}}, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_1=\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_1^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)E_2=\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)j_2^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\text{ст}}\right),\\ -\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)E_3=\left(\partial_3\partial_1\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)+\partial_3\partial_2^{\,2}\partial_1\right)j_1^{\text{ст}}+\\ +\left(\partial_3\partial_1^{\,2}\partial_2+\partial_3\partial_2\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)\right)j_2^{\text{ст}}+\left(\partial_3^{\,2}\partial_1^{\,2}+\partial_3^{\,2}\partial_2^{\,2}-\mu_a\partial_0\left(\sigma+\varepsilon_a\partial_0\right)\left(\Delta-\varkappa_0^{\,2}\right)\right)j_3^{\text{ст}}. \end{cases}$$

Реализуя в третьем уравнении полученной системы следующие операторные тождества и вводя оператор Лапласа $\Delta=\sum_{i=1}^{3}\partial_i^2$

$$\partial_3\partial_1\left(\partial_1^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)+\partial_3\partial_2^{\,2}\partial_1=\partial_3\partial_1\left(\partial_1^{\,2}+\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)=\partial_3\partial_1\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right),$$
$$\partial_3\partial_1^{\,2}\partial_2+\partial_3\partial_2\left(\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)=\partial_3\partial_2\left(\partial_1^{\,2}+\partial_2^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right)=\partial_3\partial_2\left(\Delta-\partial_3^{\,2}-\varkappa_0^{\,2}\right),$$

$$\partial_3{}^2\partial_1{}^2+\partial_3{}^2\partial_2{}^2-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)=\partial_3{}^2\left(\partial_1{}^2+\partial_2{}^2\right)-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)=$$

$$=\partial_3{}^2\left(\Delta-\partial_3{}^2\right)-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)=\Big[\text{по обозначению 18}\Big]= \tag{24}$$

$$=\partial_3{}^2\left(\Delta-\partial_3{}^2\right)-\tilde{\partial}_0{}^2(\Delta c)=\partial_3{}^2\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)+\partial_3{}^2\tilde{\partial}_0{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)=\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)\left(\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right),$$

записываем систему, равносильную (23)

$$\begin{cases}-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_1=\left(\partial_1{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2{}^{\text{ст}}+\partial_3 j_3{}^{\text{ст}}\right)\\ -(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_2=\left(\partial_2{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1{}^{\text{ст}}+\partial_3 j_3{}^{\text{ст}}\right)\\ -(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_3=\partial_3\partial_1\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\\ +\partial_3\partial_2\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\left(\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_3{}^{\text{ст}}.\end{cases}$$

Применяя к третьему уравнению последней системы такой же обратный оператор $\left(\Delta-\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)^{-1}$, что и при переходе от (18) к (19), получаем систему, эквивалентную выделенной исходной – (9), и третье уравнение здесь – искомое скалярное относительно функции E_3:

$$\begin{cases}-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_1=\left(\partial_1{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_1{}^{\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2{}^{\text{ст}}+\partial_3 j_3{}^{\text{ст}}\right)\\ -(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_2=\left(\partial_2{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_2{}^{\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1{}^{\text{ст}}+\partial_3 j_3{}^{\text{ст}}\right)\\ \underline{-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_3=\left(\partial_3{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_3{}^{\text{ст}}+\partial_3\left(\partial_1 j_1{}^{\text{ст}}+\partial_2 j_2{}^{\text{ст}}\right)}\,.\end{cases} \tag{25}$$

При этом, как и ранее, явный вид упомянутого обратного оператора не требуется, поскольку и в данном случае для его применимости достаточно лишь условие существования.

Система искомых скалярных уравнений (25) полностью реализует цель, поставленную в начале данного параграфа.

В заключение только остается заметить, что уравнения (25) можно записать единообразно:

$$-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)E_i=\left(\partial_i{}^2-\tilde{\partial}_0{}^2\right)j_i{}^{\text{ст}}+\partial_i\left(\partial_k j_k{}^{\text{ст}}+\partial_l j_l{}^{\text{ст}}\right) \tag{26}$$

$$\left(i=\overline{1,3};\quad k,l=\overline{1,3};\quad k,l\neq i;\quad k\neq l\right).$$

2. Сведение классической системы дифференциальных уравнений Максвелла к скалярным уравнениям относительно компонент вектора $\vec{H}$. Воспользовавшись результатами предыдущего раздела, поставим аналогичную цель – получения скалярных уравнений относительно всех трех компонент вектора $\vec{H}$. Для этого запишем последние три уравнения системы (7)

$$\begin{cases}\mu_a\partial_0 H_1=\partial_3 E_2-\partial_2 E_3\\ \mu_a\partial_0 H_2=\partial_1 E_3-\partial_3 E_1\\ \mu_a\partial_0 H_3=\partial_1 E_2-\partial_2 E_1,\end{cases} \tag{27}$$

к которым применим один и тот же оператор – $\left(-(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0{}^2\right)\right)$ и затем в правые части преобразованных уравнений подставим соответствующие выражения для $E_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ из системы (25):

$$
\begin{cases}
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=\partial_3\left(\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\,\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\,\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\,\text{ст}}\right)\right)-\\
-\partial_2\left(\left(\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_3^{\,\text{ст}}+\partial_3\left(\partial_1 j_1^{\,\text{ст}}+\partial_2 j_2^{\,\text{ст}}\right)\right),\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\partial_1\left(\left(\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_3^{\,\text{ст}}+\partial_3\left(\partial_1 j_1^{\,\text{ст}}+\partial_2 j_2^{\,\text{ст}}\right)\right)-\\
-\partial_3\left(\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\,\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\,\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\,\text{ст}}\right)\right),\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=\partial_1\left(\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_2^{\,\text{ст}}+\partial_2\left(\partial_1 j_1^{\,\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\,\text{ст}}\right)\right)-\\
-\partial_2\left(\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)j_1^{\,\text{ст}}+\partial_1\left(\partial_2 j_2^{\,\text{ст}}+\partial_3 j_3^{\,\text{ст}}\right)\right),
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=\left(\partial_3\partial_2\partial_1-\partial_2\partial_3\partial_1\right)j_1^{\,\text{ст}}+\left(\partial_3\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)-\partial_2^{\,2}\partial_3\right)j_2^{\,\text{ст}}+\\
+\left(\partial_2\partial_3^{\,2}-\partial_2\left(\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\right)j_3^{\,\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\left(\partial_1^{\,2}\partial_3-\partial_3\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\right)j_1^{\,\text{ст}}+\left(\partial_1\partial_3\partial_2-\partial_3\partial_1\partial_2\right)j_2^{\,\text{ст}}+\\
+\left(\partial_1\left(\partial_3^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)-\partial_3^{\,2}\partial_1\right)j_3^{\,\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=\left(\partial_1^{\,2}\partial_2-\partial_2\left(\partial_1^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)\right)j_1^{\,\text{ст}}+\left(\partial_1\left(\partial_2^{\,2}-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)-\partial_1\partial_2^{\,2}\right)j_2^{\,\text{ст}}+\\
+\left(\partial_1\partial_2\partial_3-\partial_2\partial_1\partial_3\right)j_3^{\,\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{28}
$$

Применяя в (28) коммутативное свойство операторов (4), приходим к системе, равносильной (27)

$$
\begin{cases}
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=-\partial_3\tilde{\partial}_0^{\,2}j_2^{\,\text{ст}}+\partial_2\tilde{\partial}_0^{\,2}j_3^{\,\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\partial_3\tilde{\partial}_0^{\,2}j_1^{\,\text{ст}}-\partial_1\tilde{\partial}_0^{\,2}j_3^{\,\text{ст}},\\
-\mu_a\partial_0(\sigma+\varepsilon_a\partial_0)\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=\partial_2\tilde{\partial}_0^{\,2}j_1^{\,\text{ст}}-\partial_1\tilde{\partial}_0^{\,2}j_2^{\,\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{29}
$$

Воспользовавшись обозначением (8), применяем ко всем трем уравнениям нижеследующей системы, эквивалентной (29), обратный оператор $\left(\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)^{-1}$:

$$
\begin{cases}
-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(-\partial_3 j_2^{\,\text{ст}}+\partial_2 j_3^{\,\text{ст}}\right),\\
-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\partial_3 j_1^{\,\text{ст}}-\partial_1 j_3^{\,\text{ст}}\right),\\
-\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=\tilde{\partial}_0^{\,2}\left(\partial_2 j_1^{\,\text{ст}}-\partial_1 j_2^{\,\text{ст}}\right),
\end{cases}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
-\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_1=-\partial_3 j_2^{\,\text{ст}}+\partial_2 j_3^{\,\text{ст}},\\
-\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_2=\partial_3 j_1^{\,\text{ст}}-\partial_1 j_3^{\,\text{ст}},\\
-\left(\Delta-\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)H_3=-\partial_2 j_1^{\,\text{ст}}+\partial_1 j_2^{\,\text{ст}}.
\end{cases}
\tag{30}
$$

Система (30) равносильна исходной – (27), и состоит из искомых скалярных уравнений относительно всех трех компонент вектора $\vec{H}$. Таким образом, задача, поставленная в начале данного параграфа, полностью решена.

Остается отметить, что явный вид обратного оператора $\left(\tilde{\partial}_0^{\,2}\right)^{-1}$ в данном случае также не потребовался, поскольку для воздействия на уравнения (29) было достаточно только его существование.

Следует подчеркнуть, что полученные системы скалярных уравнений (30) и (25), эквивалентные исходной системе (1) ≡ (2), являются разрешимыми в силу результатов монографии [6], а значит, и исходная максвелловская система (1) также разрешима, что и требовалось обосновать.

Таким образом, цель данной работы достигнута и поставленная задача на данном этапе исследований полностью решена.

В заключение отметим, что в работе приведено чисто аналитическое доказательство существования решения классической системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для покоящихся изотропных линейных сред.

Литература

1. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. – М.: ИЛ, 1958. – 501 с.
2. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1964. – 664 с.
3. *Иваницкий А.М.* Зависимость третьего и четвертого уравнений Максвелла от первых двух при произвольном возбуждении электромагнитного поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – №2. – С. 2 – 7.
4. *Иваницкий А.М.* Реактивные элементы при экспофункциональных воздействиях // Информатика и связь. – 1996. – №1. – С. 236 – 240.
5. *Иваницкий А.М.* Экспофункциональные поля // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. – №1. – С. 18 – 21.
6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
7. *Иваницкий А.М.* Свойства дифференциальных операторов многомерных электрических цепей // Сб. научных трудов УГАС им. А.С. Попова. – Одеса, 1998. – с. 37 – 41.
8. *Вольман В.И.*, *Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 488 с.