УДК 624.391.1(075)

Горбачев М.Н.
Gorbachev M.N.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УПРАВЛЯЕМЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ

INTRODUCTION IN THEORY OF GEOMETRIC SIMULATIONS OF PERIODIC NONHARMONIC PROCESSES IN CONTROLLED RADIOTECHNIC AND ELECTRIC CIRCUITS AND SYSTEMS

Аннотация. Изложены элементы теории геометрического моделирования квазиустановившихся периодических энергетических процессов в управляемых радиотехнических и электрических цепях и системах.

Summary. The elements of theory of geometric simulations is proposed and formulated for quasisteady periodic power processes in dirigible radiotechnic and electric circuits and systems with controlled semiconductor devices.

Изучение и исследование негармонических периодических энергетических процессов в радиотехнических и электрических цепях и устройствах (например, во вторичных системах электропитания, усиления, преобразования и передачи сигналов, линиях электросвязи и др.) является важной современной научной проблемой, тесно связанной с решением ряда теоретических и прикладных задач на основе математического моделирования указанных процессов.

Интерес к изучению этой актуальной проблемы весьма велик, поскольку полная мощность, ее составляющие и взаимосвязи между ними являются важными характеристиками энергетических процессов, определяющими распределение электрической энергии в различных режимах работы указанных цепей и устройств.

Известный традиционный подход, основанный на применении одномерных математических моделей для решения задач указанного типа, изложенный, например, в работах [1-4], имеет ряд недостатков. Основной недостаток этого подхода заключается в том, что он не позволяет создать (построить) математическую модель указанного энергетического процесса как единого целого, поскольку одномерные модели отображают не весь электрофизический процесс, а лишь отдельные его стороны. Это затрудняет решение ряда актуальных и важных для теории и практики задач, главной из которых является создание обобщенной математической модели, адекватной электрофизическому (энергетическому) процессу как единому целому, а также затрудняет сравнительный анализ различных энергетических процессов в исследуемых указанных выше объектах с целью более точной оценки их энергетической эффективности и оптимизации режимов работы.

Для создания обобщенных математических моделей целесообразно использовать нетрадиционный подход, в основе которого лежит идея многомерного и, в частности, трехмерного пространственного моделирования указанных процессов, реализуемая на основе геометрических представлений и изложенная в работе [5].

В этой работе показана в общем виде возможность нахождения (построения) пространственных геометрических моделей этих объектов в трехмерном Евклидовом пространстве. Однако в работе [5] не рассмотрены расчеты и построения трехмерных геометрических моделей конкретных объектов.

Целью настоящей статьи является нахождение решения конкретной задачи геометрического моделирования, а именно: математическое обоснование, расчет и построение трехмерных геометрических моделей негармонических периодических (квазиустановившихся) энергетических процессов во входных цепях управляемых выпрямителей переменного тока при активной нагрузке (на примерах симметричной трехфазной и однофазной мостовых схем ([1-3]).

Указанные выше выпрямители широко применяются на практике в источниках вторичного электропитания различных радиотехнических и электронных устройств, систем электросвязи [1-3].

Трехмерные математические модели, позволяющие исследовать негармонические электрофизические процессы в этих выпрямителях как единое целое (как один объект), могут быть созданы на основе теории геометрического моделирования. Это относится к тем случаям, когда исследуемый стационарный электрофизический процесс можно описать системой трех уравнений с двумя переменными параметрами ν и φ:

$$\begin{cases} x = f_1(\nu, \quad \varphi), \\ y = f_2(\nu, \quad \varphi), \\ z = f_3(\nu, \quad \varphi), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1(\nu, \ \varphi)$, $f_2(\nu, \ \varphi)$ и $f_3(\nu, \ \varphi)$ – непрерывные дифференцируемые функции по обоим аргументам в области определения D: $\nu_{\min} \le \nu \le \nu_{\max}$; $\varphi_{\min} \le \varphi \le \varphi_{\max}$.

В общем случае параметрическая система уравнений (1) задает некоторую поверхность $F(x,y,z)$ в трехмерном Евклидовом пространстве, соответствующая виду функций f_1, f_2 и f_3 и области определения D.

Таким образом, каждой паре значений параметров ν и φ соответствует определенная точка $M(x,y,z)$ на указанной поверхности $F(x,y,z)$.

В качестве примера нахождения указанных обобщенных математических моделей рассмотрим геометрические модели, соответствующие электрофизическому процессу выпрямления переменного тока синусоидальной формы с помощью управляемых полупроводниковых вентилей (тиристоров), включенных по трехфазной симметричной мостовой схеме выпрямления с нагрузкой активного характера [2].

Периодические (квазиустановившиеся) энергетические процессы в указанном выпрямителе являются негармоническими, так как при синусоидальной форме напряжения питающей сети потребляемый ток является несинусоидальным. Поэтому указанные процессы характеризуются тремя ортогональными составляющими вектора полной мощности $\overline{S}$ (активной $\overline{P}$, реактивной $\overline{Q}$ и мощностью искажения $\overline{T}$) [5]:

$$\overline{S} = \bar{i}P + \bar{j}O + \bar{k}T\,. \tag{2}$$

При этом указанные составляющие вектора полной мощности удовлетворяют уравнению энергетического баланса [6-12]:

$$P^2 + Q^2 + T^2 = S^2\,, \tag{3}$$

где P, Q, T и S – модули соответствующих векторов.

В рассматриваемой конкретной задаче активная P, реактивная Q и полная S мощности на входе управляемого трехфазного выпрямителя определяются известными выражениями [1-4]:

$$P = 3UI_{1(1)}\cos\varphi_1\,, \tag{4}$$

$$Q = 3UI_{1(1)}\sin\varphi_1\,, \tag{5}$$

$$S = 3UI_1 = 3U\sqrt{I_{1(1)}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} I_{1(k)}^2}\,, \tag{6}$$

где U – действующее значение фазного напряжения питающей сети, которое согласно допущению об идеальности сети является синусоидальным;

$I_{1(1)}$ – действующее значение первой гармоники потребляемого из сети фазного тока;

$I_{1(k)}$ – действующее значение гармоники потребляемого фазного тока, порядок которой равен k;

φ_1 – угол сдвига фаз первой гармоники фазного тока по отношению к фазному напряжению питающей сети.

Коэффициент мощности χ управляемого выпрямителя определяется известным выражением:

$$\chi = \frac{P}{S} = \nu \cdot \cos\varphi_1\,, \tag{7}$$

где ν – коэффициент искажения формы кривой потребляемого из сети тока, который рассчитывается по формуле [2, 3]:

$$\nu = \frac{I_{1(1)}}{\sqrt{I_{1(1)}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} I_{1(k)}^2}}\,. \tag{8}$$

Следовательно, выражения (4) и (5) с учетом соотношения (7) принимают следующий вид:

$$P = S\nu\cos\varphi_1, \tag{9}$$

$$Q = S\nu\sin\varphi_1. \tag{10}$$

Поскольку по условию рассматриваемой задачи $P^2 + Q^2 < S^2$ и, следовательно,

$$S^2 - P^2 - Q^2 > 0,$$

то мощность искажения $T > 0$ и определяется как мощность невязки из уравнения энергетического баланса (3):

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = S\sqrt{1-\nu^2} > 0, \tag{11}$$

где коэффициент $\nu < 1$ согласно соотношению (8).

Таким образом, указанные выражения (9) … (11), определяющие компоненты P, Q и T полной мощности S, можно свести или объединить в одну систему уравнений относительно переменных ν и φ_1, поскольку эти уравнения характеризуют и математически описывают один и тот же негармонический периодический энергетический процесс:

$$\begin{cases} P = S\nu\cos\varphi_1, \\ Q = S\nu\sin\varphi_1, \\ T = S\sqrt{1-\nu^2}, \end{cases} \tag{12}$$

где $S > 0$.

Системе уравнений (12) можно придать геометрический смысл, рассматривая модули ортогональных векторов $\overline{P}, \overline{Q}$ и $\overline{T}$ как проекции вектора полной мощности $\overline{S}$ на оси прямоугольной системы координат в трехмерном Евклидовом пространстве.

Действительно, система трех уравнений от двух переменных (12), как и аналогичная ей параметрическая система уравнений (1), задает некоторую поверхность в трехмерном Евклидовом пространстве, как было показано выше.

Полная мощность в рабочих режимах является всегда величиной положительной и не равной нулю ($S > 0$). Это позволяет пронормировать уравнения системы (12), разделив правые и левые части этих уравнений на общий множитель $S \neq 0$, равный модулю вектора полной мощности:

$$\begin{cases} x = \nu\cdot\cos\varphi_1, \\ y = \nu\cdot\sin\varphi_1, \\ z = \sqrt{1-\nu^2}, \end{cases} \tag{13}$$

где введены следующие обозначения нормированных проекций вектора полной мощности соответственно:

$$x = \frac{P}{S};\ y = \frac{Q}{S};\ z = \frac{T}{S}. \tag{14}$$

В выражениях (9) … (11) и системах уравнений (12) и (13) коэффициент искажения ν в общем случае зависит от угла коммутации γ и является некоторой функцией этого угла [2, 3]. Однако при этом величина коэффициента ν согласно выражению (8) изменяется в ограниченных пределах, а именно:

$$0 < \nu \leq 1.$$

Это позволяет ввести новую переменную $\theta = \arcsin\nu$ и выразить прямоугольные координаты через сферические. В результате параметрическая система уравнений (13) принимает вид:

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi_1, \\ y = \sin\theta\sin\varphi_1, \\ z = \cos\theta, \end{cases} \tag{15}$$

где θ и φ_1 – угловые сферические координаты.

Полученная параметрическая система уравнений (15) задает сферическую поверхность, радиус R, которая равна единице (сфера единичного радиуса) и которой соответствует следующее каноническое уравнение [13 … 15]:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\,. \qquad (16)$$

Это же самое каноническое уравнение сферы единичного радиуса можно получить путем нормировки уравнения энергетического баланса (3) с учетом соотношений (14), поскольку уравнение (11) является следствием уравнения (3).

Таким образом, из параметрической системы уравнений (15) следует, что в рассматриваемой задаче математического моделирования множество (совокупность) реальных электрофизических (энергетических) негармонических периодических процессов во входных цепях управляемого мостового выпрямителя геометрически отображается на часть поверхности сферы радиуса $R = 1$ в виде некоторого шарового пояса. Последний определяется предельными значениями угловых координат θ и φ_1:

$$0 < \theta_{\min} \le \theta \le \theta_{\max} \le \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \varphi_{\min} \le \varphi_1 \le \varphi_{\max} \le \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, указанный шаровой пояс расположен в первом октанте верхней полусферы радиуса $R = 1$.

Особенность рабочих режимов управляемых выпрямителей и, в частности, управляемого мостового выпрямителя, заключается в том, что угол φ_1 как переменный параметр изменяется в основном за счет изменения угла регулирования выпрямителя α, так как согласно известному соотношению [2, 3]

$$\varphi_1 = \alpha + \frac{1}{2}\gamma\,, \qquad (17)$$

а угол коммутации γ для определенного рабочего режима, включая и номинальный режим работы выпрямителя, изменяется в более узких пределах, либо практически остается постоянным.

Это означает, что коэффициент искажения ν тоже изменяется в узких пределах, поскольку для управляемого мостового выпрямителя он определяется по известной формуле [2, 3]:

$$\nu = \frac{3}{\pi}\left(1 + \frac{\gamma}{4\pi} - \frac{\gamma^2}{24}\right) = f_1(\gamma)\,. \qquad (18)$$

Геометрическими моделями определенных рабочих режимов управляемых выпрямителей являются режимные траектории. Они представляют собой пространственные кривые на поверхности сферы единичного радиуса, по которым перемещается изображающая точка $M(x, y, z)$, отражающая перераспределение ортогональных составляющих P, Q, T полной мощности S в процессе регулирования. Иначе говоря, режимная траектория является годографом вектора полной мощности $\overline{S}$ при изменении угловых переменных.

Уравнения режимных траекторий могут быть получены из параметрических систем уравнений (13) или (15), описывающих отображающую поверхность сферы радиуса $R = 1$.

Для этого координаты $x,\ y,\ z$ должны быть функциями от одной переменной. Например, выразив переменные ν и φ_1 в системе уравнений (13) через новую переменную γ с учетом соотношений (17) и (18) и полагая угол α фиксированным ($\alpha = \text{const}$), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = f_1(\gamma)\cos(\gamma), \\ y = f_1(\gamma)\sin(\gamma), \\ z = \sqrt{1 - f_1^2(\gamma)}. \end{cases} \qquad (19)$$

Система (19) является системой трех параметрических уравнений от одной переменной γ и, следовательно, определяет некоторую кривую (режимную траекторию) на сфере радиуса $R = 1$.

При этом очевидно, что семейства координатных линий $\varphi_1 = C_1 = \text{const}$ и $\theta = C_2 = \text{const}$ представляют собой меридианы и параллели этой сферы.

Таким образом, квазиустановившиеся энергетические процессы в такого типа объектах можно изучать с помощью соответствующих трехмерных геометрических моделей, установив связи между электрофизическими параметрами объекта и геометрическими параметрами адекватной ему модели, например, длиной, кривизной и кручением [5, 13].

Для указанного управляемого выпрямителя в частном случае, когда $\nu = \text{const}$ и $\alpha = \text{var}$, из системы уравнений (12) и (13) следует, что режимные траектории являются дугами окружностей, расположенных в плоскостях, для которых

$$z = \sqrt{1-\nu^2} = \text{const} > 0,$$
$$0 < \nu < 1.$$

Уравнения этих режимных траекторий имеют простой вид:

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

где ρ – радиус траектории, который легко определяется из системы уравнений (12) при $z = \text{const}$.

Действительно, из первых двух уравнений этой системы находим:

$$x^2 + y^2 = \nu^2 \tag{20}$$

и, следовательно,

$$\rho = \nu < 1. \tag{21}$$

Отсюда следует, что при ступенчатом (дискретном) изменении параметра ν_k в некотором ограниченном диапазоне

$$0 < \nu_{\min} \le \nu_k \le \nu_{\max} < 1$$

и плавных изменениях угла регулирования α и, следовательно, угла φ_1 получаем набор режимных траекторий соответственно значениям параметра $\nu_k = \text{const}$, которые являются дугами окружностей радиуса $\rho_k = \nu_k$ с центрами, лежащими на оси *OZ*, то есть являются плоскими пространственными кривыми, расположенными в плоскостях, параллельных экваториальной плоскости (плоскости *XOY*), для которых

$$z_k = f(\nu_k) = \sqrt{1-\nu_k^2} = \text{const}.$$

Длины L_k этих режимных траекторий легко находятся по формуле

$$L_k = \rho_k(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) = \nu_k(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}). \tag{22}$$

Кривизна ξ_k этих траекторий рассчитывается по формуле [5, 13]:

$$\xi_k = \frac{1}{\rho_k} = \frac{1}{\nu_k}, \tag{23}$$

а кручение равно нулю ($\eta = 0$), так как эти траектории являются плоскими кривыми [13 … 15].

В качестве простого и наглядного примера геометрического моделирования периодических энергетических негармонических процессов в управляемых трехфазных преобразователях переменного тока в постоянный (в управляемом мостовом выпрямителе) были рассчитаны и построены три режимные траектории, расположенные на единичной сфере ($R = 1$) и соответствующие трем фиксированным значениям угла коммутации γ, а именно:

$$\gamma_1 = 0^0;\ \gamma_2 = \frac{\pi}{6};\ \gamma_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Рассчитанные значения основных параметров приведены в табл. 1, а соответствующие режимные траектории построены в аксонометрии на рис. 1. На рис. 2 построены их проекции на плоскость *XOY*. При этом номера режимных траекторий соответствуют одноименным индексам углов коммутации γ_1, γ_2 и γ_3. Как видно из рис. 1 и 2, верхняя режимная траектория под № 1, соответствующая значению $\gamma_1 = 0^0$ и расположенная в плоскости $z_1 = 0{,}29678$, имеет наибольшую длину ($L_1 = 1{,}5$) и наибольшую кривизну ($\xi_1 = 1{,}04717$). Нижняя режимная траектория под № 3, соответствующая значению $\gamma_3 = \frac{\pi}{3}$, расположена в плоскости $z_3 = 0{,}13468$ и имеет наименьшую длину ($L_3 = 1{,}0376$) и наименьшую кривизну ($\xi_3 = 1{,}00920$). Следовательно, для заданного диапазона изменения угла коммутации от 0 до $\frac{\pi}{3}$ все остальные режимные траектории, например, режимная траектория под №2, располагаются между верхней и нижней траекториями в плоскостях, которым соответствуют уравнения $z_k = \text{const}$ и при этом:

$$0{,}13468 < z_k < 0{,}29678,$$

где k – отрезок натурального ряда чисел.

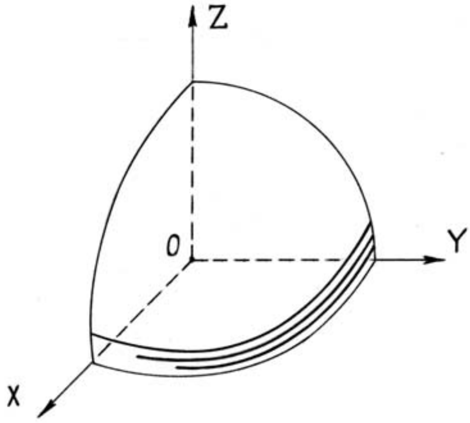

Рисунок 1

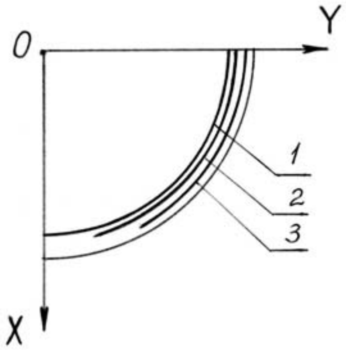

Рисунок 2

Как видно из рассмотренного примера и иллюстраций (рис. 1 и 2), наиболее благоприятному энергетическому режиму соответствует геометрическая модель в виде режимной траектории под № 3, которая имеет наименьшую длину и наименьшую кривизну. При этом длина плоской режимной траектории соответствует диапазону регулирования управляемого выпрямителя, а кривизна – обратно пропорциональна величине ν.

Таблица 1 – Значения основных параметров трехфазных преобразователей

k	γ_k	ν_k	$\rho_k = \nu_k < 1$ $(R = 1{,}0)$	$\Delta\alpha_k = \dfrac{\pi - \gamma_k}{2}$	$L_k = \Delta\alpha_k \cdot \rho_k$	$\xi_k = \dfrac{1}{\rho_k}$	ν_k^2	$z_k = \sqrt{1 - \nu_k^2}$
1	0	0,95495	0,95495	$\dfrac{\pi}{2}$	1,500	1,04717	0,9119	0,29678
2	$\dfrac{\pi}{6}$	0,98383	0,98383	$\dfrac{5\pi}{12}$	1,2878	1,01643	0,9679	0,17912
3	$\dfrac{\pi}{3}$	0,99089	0,99089	$\dfrac{\pi}{3}$	1,0376	1,00920	0,9818	0,13468

В качестве второго примера рассчитаны три режимные траектории для однофазного управляемого мостового выпрямителя с активной нагрузкой, который тоже широко используется во вторичных источниках электропитания радиотехнических устройств и систем электросвязи. Для этого выпрямителя коэффициент искажения ν кривой потребляемого тока, которая имеет трапецеидальную форму, в зависимости от угла коммутации γ определяется по известной формуле [3]:

$$\nu = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\dfrac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{1 - \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\gamma}{\pi}}}, \tag{24}$$

где $\gamma > 0$.

На основании этой формулы для весьма малых значений углов коммутации ($\gamma \approx 0$) можно определить коэффициент ν путем предельного перехода при $\gamma \to 0$, а именно:

$$\nu(0) = \lim_{\gamma\to 0} \nu = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \lim_{\gamma\to 0} \left[\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma}{\pi}}} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad (25)$$

поскольку $\sin\frac{\gamma}{2}$ и $\frac{\gamma}{2}$ являются бесконечно малыми величинами одного порядка при $\gamma \to 0$.

Следовательно, найдено значение $\nu(0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, что совпадает со значением коэффициента искажения при прямоугольной форме кривой потребляемого тока, которая соответствует мгновенной коммутации ($\gamma = 0$).

Таблица 2 – Значения основных параметров однофазного выпрямителя

k	γ_k	ν_R	$\rho_k = \nu_k < 1$ $(R = 1{,}0)$	$\Delta\alpha_k = \frac{\pi - \gamma_k}{2}$	$L_k = \Delta\alpha_k \cdot \rho_k$	$\xi_k = \frac{1}{\rho_k}$	ν_k^2	$z_k = \sqrt{1-\nu_k^2}$
1	0	0,9003	0,9003	$\frac{\pi}{2}$	1,4142	1,1107	0,8105	0,43531
2	$\frac{\pi}{6}$	0,9438	0,9438	$\frac{5\pi}{12}$	1,2354	1,0595	0,8907	0,33060
3	$\frac{\pi}{3}$	0,9748	0,9748	$\frac{\pi}{3}$	1,0208	1,0258	0,9502	0,22316

В табл. 2 приведены результаты аналогичных расчетов трех режимных траекторий и соответствующих им геометрических параметров для однофазного управляемого мостового выпрямителя при тех же значениях угла коммутации:

$$\gamma_1 = 0;\ \gamma_2 = \frac{\pi}{6};\ \gamma_3 = \frac{\pi}{3}.$$

В случае однофазного управляемого мостового выпрямителя, как и в предыдущем примере, рассчитанные режимные траектории являются также плоскими пространственными кривыми, расположенными на сфере радиуса $R = 1{,}0$.

Как видно из расчетных данных, приведенных в табл. 1 и 2, в случае трехфазного управляемого мостового выпрямителя по сравнению с однофазным, режимные траектории, соответствующие одинаковым значениям углов коммутации γ, имеют большую длину и меньшую кривизну.

В заключении можно сказать: на основе теории геометрического моделирования можно находить (строить) трехмерные математические модели периодических энергетических негармонических процессов в виде пространственных кривых (режимных траекторий), расположенных на сферической поверхности.

Основное преимущество трехмерных геометрических моделей по сравнению с традиционными одномерными состоит в том, что они позволяют в наглядном и компактном виде отобразить исследуемый физический (электроэнергетический) процесс как единое целое с помощью режимных траекторий, расположенных на одной и той же сфере, радиус которой равен единице. Это позволяет упростить решение задач сравнительного анализа и оптимизации различных энергетических процессов и рабочих режимов в радиотехнических и электротехнических устройствах (например, в регулируемых вторичных источниках электропитания) на основе геометрических моделей.

В работе показано, каким путем можно установить соотношения связи (формулы) между физическими (электрическими) параметрами исследуемого энергетического процесса и математическими параметрами адекватной ему геометрической модели (режимной траектории) на основе применения аналитической и дифференциальной геометрии.

Найденные соотношения связи могут быть полезными на этапе расчета и проектирования вторичных источников электропитания различных радиотехнических и электронных устройств.

В целом в настоящей статье развита и использована на практике идея геометрического моделирования негармонических периодических энергетических процессов в трехмерном Евклидовом пространстве применительно к радиотехническим и электрическим цепям и устройствам.

Литература

1. *Китаев В.Е.* Электротехнические устройства радиосистем. – М.: Энергия, 1971. – 344 с.
2. *Руденко В.С., Сенько В.И., Чиженко И.М.* Преобразовательная техника. – Киев: Вища школа, 1978.– 424 с.
3. *Полупроводниковые выпрямители* / Под ред. Ф.И.Ковалева и Г.П.Мостковой. – М.: Энергия, 1967. – 480 с.
4. *Маевский О.А.* Энергетические показатели вентильных преобразователей. – М.: Энергия, 1975. – 320 с.
5. *Горбачев М.Н.* Геометрическое моделирование физических процессов в электрических цепях и системах с управляемыми элементами // Труды IV Международ. науч. конф. «Геометрия и топология». – Черкассы: Черкасский Технологический институт, 2001. – С. 71-73.
6. *Пухов Г.Е.* Теория мощности системы периодических многофазных токов // Электричество. – 1953. – № 2. – С. 56-61.
7. *Воронов Р.А., Пухов Г.Е., Лурье Л.С.* Кажущаяся мощность электрической цепи // Электричество. – 1954.– № 4. – С. 77.
8. *Лурье Л.С.* Кажущаяся мощность трехфазной системы // Электричество. – 1951. – № 1. – С. 47-53.
9. *Новомейски З.* Мощность активная, реактивная и мощность искажения в электрических системах с периодическими несинусоидальными токами // Изв. вузов Электромеханика. – 1964. – № 6. – С. 657-664.
10. *Мосткова Г.П., Родина З.С.* Составляющие полной мощности в цепях с вентилями // Электротехническая промышленность. Сер. Преобразовательная техника. – 1975. – Вып. 4(63). – С. 21-25.
11. *Нейман Л. Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники. – Л.: Энергия, 1967. – Т.1. – Ч. 2. – 522 с.
12. *Горбачев Г.Н., Чаплыгин Е.Е.* Промышленная электроника / Под ред. В. А. Лабунцова. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
13. *Погорелов А.В.* Лекции по аналитической геометрии. – Харьков: Изд-во Харьковского Государственного университета, 1963.–182 с.
14. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. – Харьков: Изд-во Харьковского Государственного университета, 1965. – 185 с.
15. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 420 с.