УДК 621.391.24

Ніколаєв М.О.
Nikolaiev M.O.

АНАЛІЗ МОДЕЛІ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛУ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПОМИЛКАМИ

ANALYZE OF MODEL OF DISCRETE CHANNEL WITH INDEPENDENT ERRORS

Анотація. Отримано аналітичний вираз, що описує коефіцієнт групування помилок через середню кратність помилки в спотворених кодових комбінаціях. Показано, що в каналах з незалежними помилками коефіцієнт групування не дорівнює нулю. Визначено умови за яких його величина може вважатися близькою до нуля.

Summary. In article introduced analytical expression for relationship between grouping parameter of errors and average amount of errors in distorted code combinations. Defined that grouping parameter does not equal zero in channels with independent errors. Determined conditions when its value tends to zero.

У процесі дослідження та проектування систем передачі досить часто виникає проблема математичного моделювання каналів зв’язку. Моделювання цифрових систем передачі потребує використання моделей дискретних каналів. Однією з моделей, яка застосовується при сучасних дослідженнях [1,2], є модель каналу з логарифмічно-лінійною густиною помилок, яка запропонована в [3]. Ця модель описує ймовірність появи в n-значній кодовій комбінації хоча б однієї помилки через імовірність помилкового прийому одного елемента p_e та коефіцієнт групування помилок α. Завдяки тому, що дискретний канал зв'язку описується лише двома параметрами модель є дуже зручною у використанні. В [4] наведені результати використання моделі для моделювання каналу зв’язку за допомогою ЕОМ, що дозволяє значно спростити дослідження в яких потрібне застосування моделей дискретного каналу. Згідно з моделлю коефіцієнт α характеризує ступінь зміни ймовірності появи помилкового кодового слова залежно від обраної довжини кодової комбінації n. Виходячи з [3], α суттєво впливає на ефективну швидкість передавання інформації при заданій якості прийому. Однак наведене в [3] описання цієї моделі для випадку каналу з незалежними помилками потребує більш детального аналізу, тому метою статті є проведення цього аналізу.

Наведемо математичний вираз, яким описується модель [3]:

$$P(\geq 1; n) = n^{1-\alpha} p_e, \tag{1}$$

де $P(\geq 1; n)$ − імовірність появи в n-значній кодовій комбінації хоча б однієї помилки.
Значення коефіцієнта групування знаходиться в межах $\alpha \in [0;1]$.

Уведемо параметр $\overline{t_u}$, що визначає середню кратність помилки в спотворених кодових комбінаціях. Виходячи з визначення, $\overline{t_u}$ можна описати наступним виразом:

$$\overline{t_u} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\text{пом}}}{M_{\text{пом}}}, \tag{2}$$

де $N_{\text{пом}}$ − кількість помилкових елементів у спотворених кодових комбінаціях;
$M_{\text{пом}}$ − кількість спотворених кодових комбінацій;
N − кількість переданих елементів.

Імовірність появи хоча б однієї помилки в n-значній кодовій комбінації описується виразом [3]:

$$P(\geq 1; n) = \lim_{M\to\infty} \frac{M_{\text{пом}}}{M} = \lim_{N\to\infty} \frac{M_{\text{пом}}}{N} n, \tag{3}$$

де M − кількість переданих кодових комбінацій.
Проведемо наступне перетворення:

$$\overline{t_u} \cdot P(\geq 1; n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\text{пом}}}{M_{\text{пом}}} \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{M_{\text{пом}}}{N} n = n \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\text{пом}}}{N} = n \cdot p_e,$$

звідси випливає:

$$p_{е} = \frac{\overline{t_{и}} \cdot P(\geq 1; n)}{n}. \tag{4}$$

Підставимо отриманий вираз для $p_{е}$ в (1):

$$\overline{t_{и}} = n^{\alpha}. \tag{5}$$

З виразу (5) випливає, що коефіцієнт групування помилок визначає значення середньої кратності помилки в спотворених кодових комбінаціях. При $\alpha = 0$, кожна спотворена кодова комбінація містить не більше однієї помилки ($\overline{t_{и}} = 1$), тобто помилки не зосереджені. При $\alpha = 1$ в кожній помилковій кодовій комбінації буде n помилок ($\overline{t_{и}} = n$).

Розглянемо, яким буде значення α при $n \to \infty$, щоб виконувалася рівність (5):

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \overline{t}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln \frac{\overline{t}}{n}}{\ln n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\overline{t}}{n}}{\ln n}. \tag{6}$$

Виходячи з того, що при $n \to \infty$ кількість помилкових комбінацій $M_{пом}$ = 1, то $n \to N$, завдяки цьому можна показати, що чисельник дробу у виразі (6) величина обмежена:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\overline{t}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_{пом}}{n \cdot M_{пом}} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_{пом}}{n} = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{пом}}{N} = \ln p_{е},$$

отже

$$\lim_{n\to\infty} \alpha = 1. \tag{7}$$

З виразу (7) випливає, що для виконання рівності (5) α повинна залежати від n.

В [3] висувається припущення, що в каналі з незалежними помилками коефіцієнт групування повинен мати значення $\alpha = 0$. Розглянемо справедливість цієї гіпотези.

Беручи до уваги, що для каналу з незалежними помилками ймовірність відсутності помилки в будь-якому одиничному елементі рівноймовірна, запишемо ймовірність появи в кодовій комбінації, хоча б однієї помилки у вигляді

$$P(\geq 1; n) = 1 - (1 - p_{е})^{n}. \tag{8}$$

Розв'язуючи (4) відносно $\bar{t}_{и}$ з використанням (8), дістанемо:

$$\bar{t}_{и} = \frac{n p_{е}}{1 - (1 - p_{е})^{n}}. \tag{9}$$

Подамо (8) за допомогою біноміального ряду [5]:

$$(1 - p_{е})^{n} = 1 - n p_{е} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} p_{е}^{k},$$

тобто

$$P(\geq 1; n) = n p_{е} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} C_{n}^{k} p_{е}^{k}. \tag{10}$$

Для цього ряду відношення наступного й попереднього членів дорівнює

$$\frac{n - k + 1}{k} p_{е}.$$

Відомо, що ряд (10) є абсолютно збіжний, тому що $p_{е} < 1$ [5]. Якщо при цьому

$$p_{е} < \frac{k}{n - k + 1},$$

то знакопереміжний ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца.

Для такого ряду

$$C_n^2 p_e^2 > \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k p_e^k \,, \tag{11}$$

отже

$$n\, p_e > p(\geq 1; n), \bar{t}_u > 1 \text{ та } \alpha > 0.$$

Припустимо, що, починаючи з k і до k^1,

$$p_e = \frac{k}{n-k+1}, \tag{12}$$

де k^1 дорівнює цілій частині рівності

$$k^1 = \left[\frac{(n+1)\, p_e}{1+p_e} \right].$$

Подамо суму ряду

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k p_e^k$$

у вигляді

$$1 - n\, p_e - (1-p_e)^n \,.$$

У добуток np_e підставимо найменше значення p_e, визначене нерівністю (12).

$$\frac{nk}{n-k+1} \,.$$

Починаючи з $k = 2$, це відношення більше одиниці. Беручи до уваги нерівність (11), можна стверджувати, що $1 - n\, p_e < 0$, при $k = 2$, отже й вся сума

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k p_e < 0 \,. \tag{13}$$

З (13) випливає, що при

$$p_e \geq \frac{k}{n-k+1}$$

добуток np_e більше значення $P(\geq 1; n)$ то:

$$\bar{t}_u > 1 \text{ і } \alpha > 0 \,.$$

Таким чином, для каналу з незалежними помилками за будь-якої ймовірності p_e й $n > 1$ умовна кратність помилки $\bar{t}_u$ більше 1, внаслідок чого коефіцієнт групування більше нуля. Отже, гіпотеза, що $\alpha = 0$ при незалежних помилках є невірною.

Для прикладу побудуємо залежність коефіцієнта групування помилок α і середньої кратності помилки $\bar{t}_u$ від n для каналу з незалежними помилками. При цьому розглянемо декілька каналів із різною ймовірністю p_e. Дані наведені в табл. 1.

Графіки отриманих залежностей наведені нижче на рис. 1.

Таблиця 1 − Залежність значення коефіцієнта групування помилок від n

	n	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**
$p_{e=5\cdot10^{-2}}$	$P(\geq 1; n)$	0,3366	0,5599	0,8063	0,9625	0,9986	0,999998	0,999999
	$\bar{t}_u$	1,1884	1,4289	1,9844	3,3248	6,4090	12,8000	25,6000
	α	0,0830	0,1287	0,1977	0,2889	0,3829	0,4598	0,5198
$p_{e=10^{-3}}$	$P(\geq 1; n)$	0,0080	0,0159	0,0315	0,0620	0,1202	0,2260	0,4009
	$\bar{t}_u$	1,0035	1,0075	1,0156	1,0318	1,0649	1,1330	1,2773
	α	0,0017	0,0027	0,0045	0,0075	0,0130	0,0225	0,0392
$p_{e=10^{-5}}$	$P(\geq 1; n)$	$7{,}999\cdot10^{-5}$	$1{,}599\cdot10^{-4}$	$3{,}199\cdot10^{-4}$	$6{,}398\cdot10^{-4}$	0,0013	0,0026	0,0051
	$\bar{t}_u$	1,0001	1,0001	1,0002	1,0003	1,0006	1,0013	1,0026
	α	$1{,}683\cdot10^{-5}$	$2{,}705\cdot10^{-5}$	$4{,}472\cdot10^{-5}$	$7{,}574\cdot10^{-5}$	$1{,}309\cdot10^{-4}$	$2{,}299\cdot10^{-4}$	$4{,}094\cdot10^{-4}$

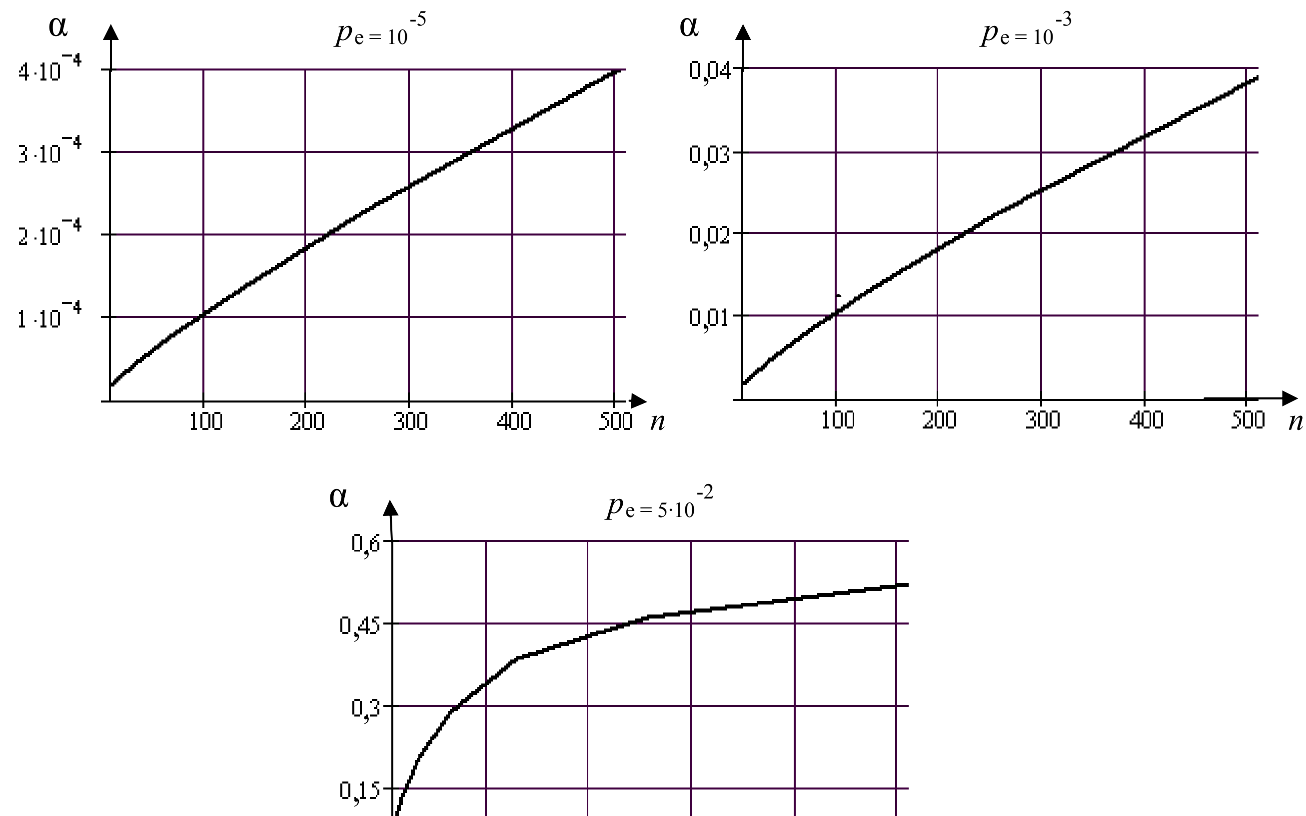

Рисунок 1 − Графіки залежності коефіцієнта групування помилок від n

Отримані залежності підтверджують припущення, що для будь-якого дискретного каналу з незалежними помилками $\bar{t}_u > 1$ й $\alpha > 0$.

У той же час із графіків отриманих залежностей можна побачити, що значний вплив на характер зміни коефіцієнта α має значення добутку np_e. Відзначимо, що залежність α від n близька до логарифмічної. Внаслідок чого при $np_e < 1$, залежність є практично лінійною, а при $np_e > 1$ зміна α буде нелінійною. Так само слід звернути увагу на те, що при $np_e << 1$ можна вважати $\alpha \approx 0$ й $\overline{t_u} \approx 1$ у зв'язку з тим, що значення α занадто мале.

Виходячи з наведеного вище можна зробити такі висновки:

1. Коефіцієнт групування є функцією параметрів каналу зв'язку та параметрів системи передачі (наприклад: ймовірність прийняття помилкового елемента, кількість елементів в одному кодовому слові, швидкість модуляції та інші).
2. Для каналу з незалежними помилками при $np_e << 1$ коефіцієнт групування можна вважати близьким нулю $\alpha \approx 0$.

Литература

1. *Захарченко В.Н.* О возможности уменьшения избыточности блочных кодов для каналов с группированием ошибок // Праці УНДІРТ. – Одеса, 1997. − №3(11)-4(12). – С.73-76.
2. *Захарченко В.М.* Визначення змін у групуванні помилок при використанні кодоперетворювача таймерних сигнальних конструкцій // Праці УНДІРТ. – Одеса, 2003.− №2. – С.71-74
3. Элементы теории передачи дискретной информации/ Под. ред. Л.П. Пуртова. – М.: Связь, 1972. – 232 с.
4. *Захарченко В.Н., Рейнбах П.С.* Моделирование на ЭВМ дискретного канала передачи данных //Эффективность систем передачи информации: Сб. науч. тр. ОЭИС. – Одесса, 1987. – С.30-33.
5. *Овчинников П.Ф.* Вища математика: Підручник. У 2 ч., ч. 2.; Пер. з рос. Є.В. Бондарчука, Ю.Ю. Костриці, П.П. Оніщенка. − К.: Техніка, 2000. −792 с.