

СОЛИТОННЫЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕЙВЛЕТ – ФУНКЦИЙ

SOLITON MODELS OF CONTINUOUS WAVELET – FUNCTIONS

Аннотация. Анализируются известные системы моделей происхождения солитонов. Проводится соответствующее решение систем известных дифференциальных уравнений при граничных условиях, задаваемых необходимой локальностью частотно-временного разложения сигнала. Показано, что, во-первых, известные непрерывные вейвлет-функции имеют «солитонное» происхождение, а, во-вторых, предлагаются функции, которым обоснованно можно придать статус «вейвлет - атома».

Summary. Well-known systems of soliton models genesis are analyzed. Corresponding solution of known differential equations systems under the limited conditions, defined by necessary locality of time and frequency signal decomposition is carried out. It is shown that firstly: well known continuous wavelet-functions have "soliton" origin, and secondly: functions, that can be reasonably assigned to the status of "wavelet-atom" are suggested.

В настоящее время, рассматривая общую проблему локализации частотно-временных разложений сигналов для выявления их особенностей на интересующем интервале времени посредством вейвлет-функций, по нашему мнению, нельзя оставить в стороне и такие волновые явления природы как солитоны, также имеющие свое «происхождение» и нашедшие последующее исследование на стыке таких фундаментальных наук как: теоретическая физика, математическая физика, нелинейная оптика, теория поля и мн. др.

Принцип неопределенности Гейзенберга устанавливает, что «энергетическая протяженность» функции и ее преобразования Фурье не могут быть одновременно произвольно малыми. Побуждаемый задачами квантовой механики, в 1946 году физик Габор [1] определил элементарные частотно-временные «атомы» как волновые образования, имеющие минимальную протяженность на частотно-временной плоскости. Чтобы измерять содержание частотно-временной «информации», он предложил раскладывать сигналы по этим элементарным атомным волновым образованиям. Унифицированная интерпретация локальных частотно-временных разложений следует также и из подхода Вилля, основанного на рассмотрении частотно-временной плотности энергии. Параллельно трудам Габора Вилль, который был инженером-электриком, предложил в 1948 году [2] анализировать частотно-временные свойства сигналов с помощью энергетической плотности. Еще раз физики-теоретики оказались впереди, так как такое распределение уже было рассмотрено в 1932 году Вигнером [3] в контексте задач квантовой механики.

Занимаясь сейсмологией, Морле обратил внимание на то, что промодулированные импульсы, посланные вглубь Земли, должны иметь при высоких частотах слишком большую длительность для того, чтобы различать импульсы, отраженные от тонких, прилегающих друг к другу слоев. Поэтому вместо того, чтобы посылать импульсы одинаковой длины, он предложил посылать на высоких частотах короткие волновые образования. Такие волновые образования были получены просто масштабированием одной функции, которую назвали *вейвлетом* (маленькой волной). Гроссман занимался теоретической физикой, но увидел в подходе Морле идеи, которые были тесно связаны с его собственной работой по когерентным квантовым состояниям. Почти через сорок лет после Габора Морле и Гроссман возобновили фундаментальное сотрудничество на стыке областей наук между теоретической физикой и обработкой сигнала, которое привело к формализации непрерывного вейвлет-преобразования [4]. В современных работах, например [5], поясняются пути, связывающие распределения Вигнера - Вилля с преобразованием Фурье с окном и вейвлет-преобразованием, а также с любым другим линейным частотно-временным преобразованием.

За последние тридцать лет был достигнут огромный успех в развитии методов математической физики, позволивших понять природу солитонов. Сейчас солитоны стали одним из основных объектов во многих проблемах динамики нелинейных волн. Важную часть современных исследований в этой области физики составляют исследования распространения нелинейных волн в нерезонансных средах. Здесь из-за модуляционной неустойчивости из непрерывной волны может образовываться цепочка отдельных импульсов, которые при определенных условиях могут эволюционировать в солитоны, однако взаимосвязь солитонов и вейвлет-функций не установлена и это определяет цель исследований.

Целью настоящей работы является проанализировать известные системы моделей происхождения солитонов, т.е. решить соответственно системы известных дифференциальных уравнений при граничных условиях, задаваемых необходимой локальностью частотно-временного разложения сигнала, и показать, что, во-первых, известные непрерывные вейвлет-функции имеют «солитонное» происхождение, а, во-вторых, предложить функции, которым обоснованно можно придать статус «вейвлета».

Известно, что преобразование Фурье управляет линейной инвариантной во времени обработкой сигнала, потому что синусоидальные волны $e^{i\omega t}$ – это собственные функции инвариантных во времени операторов. До тех пор, пока мы удовлетворены использованием инвариантных во времени операторов, преобразование Фурье дает простые ответы на большинство вопросов. Их обилие делает это преобразование пригодным для широкого круга реализаций, таких как передача сигнала или стационарная обработка сигнала. Однако если мы заинтересованы в изучении прерывистых непериодических явлений - преобразование Фурье становится неподходящим инструментом.

Коэффициент Фурье в $\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ получается корреляцией f с синусоидальной волной $e^{i\omega t}$. Так как носитель $e^{i\omega t}$ покрывает всю вещественную прямую (\mathbb{R}), $\mathcal{F}(\omega)$ зависит от значений $f(t)$ в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это глобальное «перемешивание» информации делает трудным анализ любых локальных свойств f по \mathcal{F} .

«Атомы» Габора построены с помощью сдвига во времени (u) и частоте (ξ) функции временного окна – g

$$g_{u,\xi}(t) = g(t-u)e^{i\xi t}.$$

Энергия $g_{u,\xi}$ сосредоточена в окрестности u на интервале «размера» σ_t , измеряемого как $|g|^2$. Ее преобразование Фурье есть сдвиг на ξ преобразования Фурье – \mathcal{G} функции g

$$\mathcal{G}_{u,\xi}(\omega) = \mathcal{G}(\omega - \xi)e^{-iu(\omega - \xi)}.$$

Поэтому энергия $\mathcal{G}_{u,\xi}$ локализована около частоты ξ на интервале размера σ_ω в области, где $\mathcal{G}(\omega)$ не является пренебрежимо малой. В частотно-временной плоскости (t, ω) протяженность энергии «атома» $g_{u,\xi}$ символически представляется прямоугольником Гейзенберга. Этот прямоугольник с центром в точке (u, ξ) имеет временную «ширину» – σ_t и частотную «ширину» – σ_ω . Принцип неопределенности утверждает, что его площадь удовлетворяет неравенству $\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$. Известно, что эта площадь минимальна, когда g – функция Гаусса, в этом случае атомы $\mathcal{G}_{u,\xi}$ называются *функциями Габора*.

Габор определяет такие образования как «кванты информации» в частотно-временном прямоугольнике.

Вейвлет ψ – это функция с нулевым средним значением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0,$$

с параметром растяжения (масштабирования) s и параметром сдвига u

$$\Psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Вейвлет-преобразование f с масштабом s и сдвигом u вычисляется корреляцией f с «вейвлет-атомом»

$$Wf(u,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt.$$

Как и преобразование Фурье с окном, вейвлет-преобразование может измерять частотно-временные изменения спектральных компонент, но оно имеет другое частотно-временное разрешение. Применяя формулу Парсеваля, это преобразование можем записать также в виде интеграла по частоте

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{u,s}^*(\omega) d\omega.$$

Таким образом, вейвлет-коэффициент $Wf(u, s)$ зависит от значений $f(t)$ и $\hat{f}(\omega)$ в частотно-временной области, где сосредоточены энергии $\psi_{u,s}$ и $\hat{\psi}_{u,s}$. Изменение во времени гармонических составляющих можно обнаружить по сдвигу и масштабу вейвлет-коэффициентов наибольшей амплитуды.

Вейвлет-преобразование может также выделять и характеризовать прерывистые неперiodические явления с помощью процедур рассмотрения объектов в различных масштабах («зуминг» процедуры). Предположим, что ψ вещественна. Так как ее среднее значение равно нулю, вейвлет-коэффициент $Wf(u, s)$ измеряет изменение f в окрестности точки u , и размеры этой окрестности пропорциональны s . Резкие изменения сигнала дают большие значения вейвлет-коэффициентов. Гладкость f в точке связывается с асимптотическим убыванием вейвлет-преобразования $Wf(u, s)$ при s , стремящемся к нулю [5]. Особые точки выделяются рассмотрением при разных масштабах локальных максимумов вейвлет-преобразования. В изображениях большие амплитуды вейвлет-коэффициентов указывают на положение перепадов, которые имеют резкие изменения интенсивности изображения. Различные масштабы описывают контуры структуры изображения меняющихся размеров. Такое многомасштабное выделение перепадов особенно эффективно для распознавания образов при компьютерной визуализации.

Зуминг-способности вейвлет-преобразований не только локализуют отдельные особые точки объектов, но могут также характеризовать более сложные мультифрактальные сигналы, имеющие неизолированные особенности.

Непрерывное преобразование Фурье с окном $Sf(u, \xi)$ и вейвлет-преобразование $Wf(u, s)$ дают двумерное представление одномерного сигнала f . Это указывает на существование избыточности информации, которая может быть уменьшена или вообще ликвидирована с помощью неполной выборки параметров этих преобразований.

Полное исключение избыточности информации эквивалентно построению базиса в пространстве сигналов. Хотя вейвлет-базисы были первыми на рынке научно-исследовательской продукции, за ними быстро последовали другие семейства базисов, такие как вейвлет-пакеты и локальные косинусные базисы.

В теории вейвлет-преобразований известно множество базисных семейств функций, которые кратко называют «вейвлетами», обладающие различными, в той или иной мере подходящими в каждом конкретном случае целенаправленной реализации обработки сигналов, свойствами [5]. Не вызывает удивления, что классические функции Гаусса, Морле, Шеннона, Мейера и др. легко «вписались» и стали неотъемлемой частью – «пробным камнем» непрерывных вейвлет-преобразований в различных направлениях обработки сигналов информационных сообщений.

Авторы настоящей статьи задались вопросом – каково «вейвлетное происхождение» вышеуказанных функций? Или это прерогатива гениальной интуиции ученых, или все же существуют физические явления природы, описываемые системой дифференциальных уравнений (СДУ), порождающих функции, которым можно обоснованно придать статус вейвлет-функции, исходя из требований теоремы Кальдерона-Морле-Гроссмана [5]. А если это так, то возможно найти новые вейвлеты, может быть обладающие также не менее интересными, перспективными с точки зрения обработки сигналов, свойствами.

Исходя из этих соображений, согласно поставленной в настоящей работе цели, нами были предприняты исследования известных вполне интегрируемых гамильтоновых систем моделей солитонов посредством метода обратной задачи (теории) рассеяния (МОЗР) при граничных условиях частотно-временной локализации функции при различных вариациях начальных условий. В процессе исследований (авторы ни в коем случае не претендуют на приоритет в решении вышеуказанной, математической задачи) нас интересовали двумерные сечения пространственно-временных функциональных поверхностей – решений соответствующих систем дифференциальных уравнений, описывающих явления, связанные с солитонами.

Инструментом таких исследований была использована среда Matlab 7.01 для программного построения математических моделей, соответствующих расчетов и графической визуализации полученных результатов. Все проделанные в настоящей статье построения математических моделей выполнены в виде «*m-files*». Все приведенные в статье рисунки лишь графически отражают в конечном итоге функциональные решения соответствующей СДУ при определенных, варьируемых краевых условиях, связанных с пространственно-временной локализацией исследуемого информационного сигнала.

В первую очередь рассмотрены три хорошо известных явления, теория которых основана на вполне интегрируемых уравнениях. Именно они явились теми воротами, через которые солитоны вошли в нелинейную оптику.

Явление самоиндуцированной прозрачности (СИП) состоит в прохождении достаточно мощного ультракороткого импульса (УКИ) света в резонансной среде без искажения его формы и потерь энергии [6]. Групповая скорость такого стационарного УКИ, называемого 2π -импульсом или солитоном СИП, меньше фазовой скорости света в среде и зависит от длительности импульса: короче импульс – больше скорость распространения. Когда импульсы с различными скоростями распространяются в среде в условиях СИП, один из них догонит второй и, столкнувшись, пройдет его насквозь. Форма и групповая скорость 2π -импульсов, как и положено солитонам, не изменяются. В зависимости от отношения между длительностями t_1 и t_2 сталкивающихся 2π -импульсов, картина их взаимодействия различна. Если это отношение удовлетворяет неравенству $t_1/t_2 < (3 - \sqrt{5}) / 2 \approx 0,382$, траектории импульсов пересекаются, как показано на рис. 1. В противном случае столкновение напоминает отталкивающее взаимодействие одинаково заряженных частиц, которые во время столкновения обмениваются энергией, и амплитуды 2π -импульсов меняются. Само явление СИП и поведение солитонов СИП достаточно подробно описано в [7].

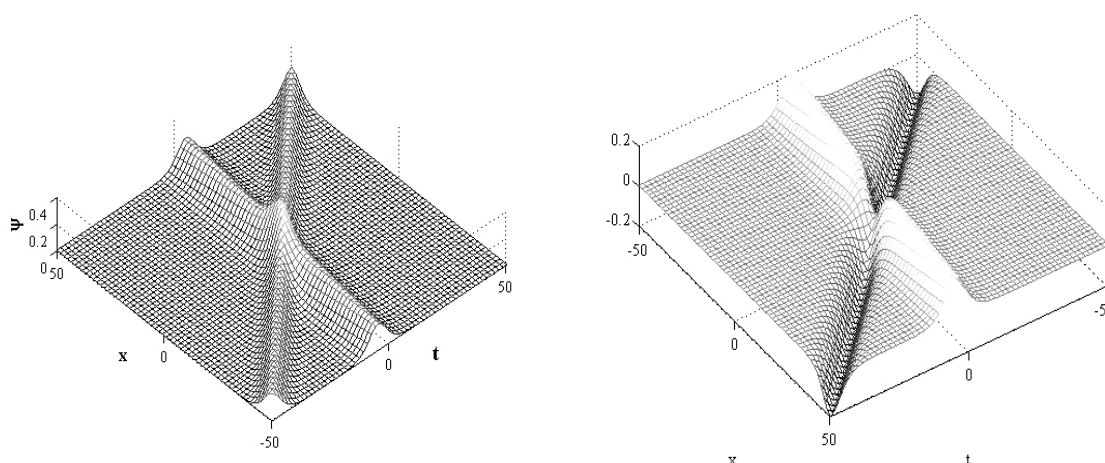


Рисунок 1 - Модели столкновения двух 2π - импульсов с $\frac{t_1}{t_2} = 1/3$

С математической точки зрения свойства 2π -импульсов СИП следуют из полной интегрируемости системы укороченных уравнений Максвелла-Блоха, описывающих СИП на основе модели двухуровневых атомов с невырожденными энергетическими уровнями [8]. 2π -импульсы отвечают односолитонным решениям этих уравнений, а процесс столкновения отражает эволюцию двухсолитонного решения – оно асимптотически трансформируется в пару солитонов.

Простейшая теория явления СИП была развита МакКоллом и Ханом. В общем случае взаимодействие излучения с ансамблем двухуровневых атомов описывается уравнениями Блоха для атомов и уравнениями Максвелла для классического электромагнитного поля. В изотропном диэлектрике система уравнений Максвелла сводится к одному волновому уравнению для электрического поля $\mathbf{E} = E \cdot \mathbf{E}$. Для плоских волн с постоянным вектором поляризации \mathbf{E} можно записать следующую систему *полных уравнений Максвелла-Блоха* (уравнения МБ)

$$E_{zz} - c^{-2} E_{tt} = (4\pi n_a d / c^2) \langle r_{1,u} \rangle, \quad (1)$$

где d – проекция на направление \mathbf{E} матричного элемента оператора дипольного перехода, n_a – концентрация резонансных атомов. Следует заметить, что компоненты вектора Блоха $r_1, r_2,$ и r_3 зависят от частоты перехода ω_a . Угловые скобки в (1) обозначают усреднение по распределению этих частот.

В [7] было показано, что, если плотность атомов столь мала, что параметр $4\pi n_a d^2 / \hbar \omega_a$ меньше единицы, то можно учитывать только волну, распространяющуюся в одном из направлений, и пренебречь волной в противоположном направлении. Было найдено, что для типичных значений параметров резонансной системы $d \sim 1$ Дебай, $\omega_a \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ и $n_a \ll 10^{23} \text{ см}^{-3}$ влиянием обратной волны можно пренебречь. В этом случае уравнения МБ превращаются в более простую систему *редуцированных уравнений Максвелла-Блоха* (уравнения РМБ)

$$r_{1,t} = -\omega_a r_2, \quad r_{2,t} = \omega_a r_1 + (2d/\hbar) E r_3, \quad r_{3,t} = -(2d/\hbar) E r_2, \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что как в уравнениях МБ, так и в уравнениях РМБ символ E обозначает вещественное значение напряженности электрического поля электромагнитной волны. Никаких ограничений на длительность импульсов здесь нет. Часто, однако, используется представление о квазигармонической волне, когда

$$E(z,t) = 2A(z,t) \cos[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z,t)],$$

где ω_0 – частота несущей волны; k_0 – соответствующее ей волновое число, а вещественные огибающая $A(z,t)$ и фаза $\varphi(z,t)$ предполагаются медленно меняющимися в пространстве и времени функциями, такими, что

$$\left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll \omega_0 |A|, \quad \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \ll k_0 |A|, \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll \omega_0 |\varphi|, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| \ll k_0 |\varphi|.$$

В приближении для медленно изменяющейся огибающей импульса и его фазы система (2) заменяется следующей

$$q_z + c^{-1} q_t = -\alpha' \langle P \rangle, \quad q(\varphi_z + c^{-1} \varphi_t) = \alpha' \langle Q \rangle, \\ Q_t = (\Delta\omega + \varphi_t) P, \quad P_t = -(\Delta\omega + \varphi_t) Q + qR, \quad R_t = -qP, \quad (3)$$

где $\Delta\omega = (\omega_a - \omega)$ – отстройка от резонанса; $\alpha' = 2\pi\omega n_a d^2 / \hbar c$; $q = dA/2\hbar$ – нормированная огибающая импульса, а величины P, Q и R связаны с исходными компонентами вектора Блоха соотношениями

$$r_1 = -P(z,t) \sin[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z,t)] + Q(z,t) \cos[k_0 z - \omega_0 t + \varphi(z,t)], \quad r_3 = -R(z,t).$$

Теория СИП МакКолла-Хана основана как раз на уравнениях (3). Но, кроме того, если ограничиться ситуацией, когда исходный импульс не имел фазовой модуляции, и форма неоднородно уширенной линии описывается симметричной функцией $\Delta\omega$, то из уравнений (3) следует, что $\partial\varphi/\partial z = \partial\varphi/\partial t = 0$ для всех z и t . В этом случае уравнения (3) редуцируются к системе *уравнений СИП*

$$q_z + c^{-1} q_t = -\alpha' \langle P \rangle, \quad Q = \Delta\omega P, \quad P_t = -\Delta\omega Q + qR, \quad R = -qP. \quad (4)$$

Когда линия поглощения однородная, уравнения СИП при точном резонансе сводятся к хорошо известному уравнению “Sine”-Gordon

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + \sin(f(x,t)) = 0.$$

Замечательным свойством систем уравнений (2), (3), (4) является то, что все они могут быть представлены как условие интегрируемости пары линейных уравнений, что подсказывает применить для их решения МОЗР. Если предположить, что до прихода УКИ все атомы находились в основном состоянии и после прохождения УКИ они возвращаются в основное состояние, то все упомянутые уравнения дополняются краевыми условиями

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R(\tau, \zeta; \omega_a) = -1, \quad \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{1,2}(\tau, \zeta; \omega_a) = 0, \quad (5)$$

где $\tau = (t - z/c)$, $\zeta = \alpha'z$.

Как уравнения РМБ, так и уравнения СИП с такими краевыми условиями решаются с использованием МОЗР обычным образом [9,10]. В общем случае решение представляет собой N -солитонную волну и слабую расплывающуюся из-за дисперсии волну. Солитонное решение эволюционирует в L_1 изолированных солитонов и в L_2 бризеров (при этом $N = L_1 + 2L_2$). Бризер является чрезвычайно устойчивой уединенной волной, как обычный солитон, но с внутренними осцилляциями амплитуды (рис. 2,а) [9]. Он устойчив относительно столкновений как с обычными солитонами, так и другими бризерами. Уравнение «Sine»-Gordon также имеет в качестве решений солитоны и бризеры (рис. 2,б).

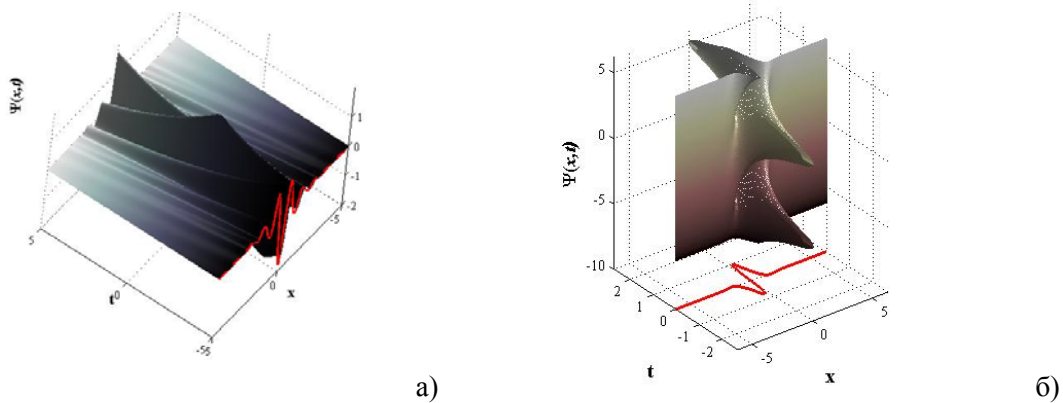


Рисунок 2 - Визуализация солитонов в моделях РМБ (а) и «синус» – Гордон (б) при решении СДУ в среде Matlab 7.01

В [12] было показано, что бризер уравнений РМБ является вещественным локализованным в пространстве и времени импульсом с внутренними осцилляциями, что напоминает 0π – импульс МакКолла и Хана. Если частота внутренних осцилляций растет, то огибающая бризера может быть описана солитонным решением уравнений СИП с большой точностью. Таким образом, 0π – импульс МакКолла и Хана является предельным случаем бризера, описываемого уравнениями РМБ.

В [13] было получено уравнение, описывающее распространение оптических импульсов в одномодовом волокне с учетом дисперсии групповых скоростей второго порядка, исследование которого ранее проводилось в [8]. В теории солитонов это уравнение известно как *нелинейное уравнение Шредингера* (НУШ).

Пусть q обозначает нормированную комплексную медленно меняющуюся огибающую оптического импульса, так что напряженность электрического поля дается выражением

$$E(t, x, y, z) = A_0 q(t, z) \Psi(x, y) \exp\{-i\omega_0 t + i\beta_0 z\},$$

где β_0 – постоянная распространения, зависящая от частоты несущей волны ω_0 ; $\Psi(x, y)$ – модовая функция, определяющая поперечное распределение электрического поля в волокне. Эта нормированная огибающая описывается НУШ в следующей форме

$$iq'_\zeta + sq''_{\tau\tau} + \mu|q|^2 q = 0. \quad (6)$$

Здесь $\zeta = z/L_D$, $\tau = (t - z/v_g)t_{p_0}^{-1}$ – нормированные независимые переменные: координата, отсчитываемая вдоль оси волокна, и время соответственно t_{p_0} – длительность импульса при $z = 0$ и v_g – групповая скорость импульса. Слагаемое в (6) со второй производной по τ описывает дисперсионное уширение импульса ($s = -1$ отвечает нормальной дисперсии, а $s = +1$ – аномальной дисперсии). L_D – дисперсионная длина. Третье слагаемое в (6) учитывает эффект «самовоздействия» или автомодуляцию. Полная интегрируемость НУШ была установлена в [8]. Солитоны НУШ в отличие от солитонов уравнений СИП или уравнения «Sine»-Gordon распространяются со скоростью слабого (линейного) импульса в среде.

Многосолитонные импульсы ведут себя подобно бризерам (рис.3), но при превышении некоторого порога глубины фазовой модуляции исходного импульса такой многосолитонный

импульс трансформируется в ряд отдельных солитонов.

Исходя из вышеизложенного, нами было проведено моделирование солитонов как решение трех основных СДУ (2,4,6) при краевых условиях и ограничениях, вытекающих из проблем частотно-временной локализации (3,4,5) сигнала, с целью выявления математического выражения функции «вейвлет - атома», порождаемой природой солитонообразующих явлений.

В результате проведенного анализа многомерных поверхностей солитонов различного происхождения (рис. 2, 3 и 4) нами было установлено, что практически все известные функции непрерывных «вейвлет-атомов»: Гаусса, Морле, Шеннона, Мейера и др. (вещественные и комплексные) «содержатся» в сечениях солитонообразующих поверхностей при соответствующих начальных условиях и адаптивной параметризации процесса моделирования физических явлений (1, 2, 4, 6).

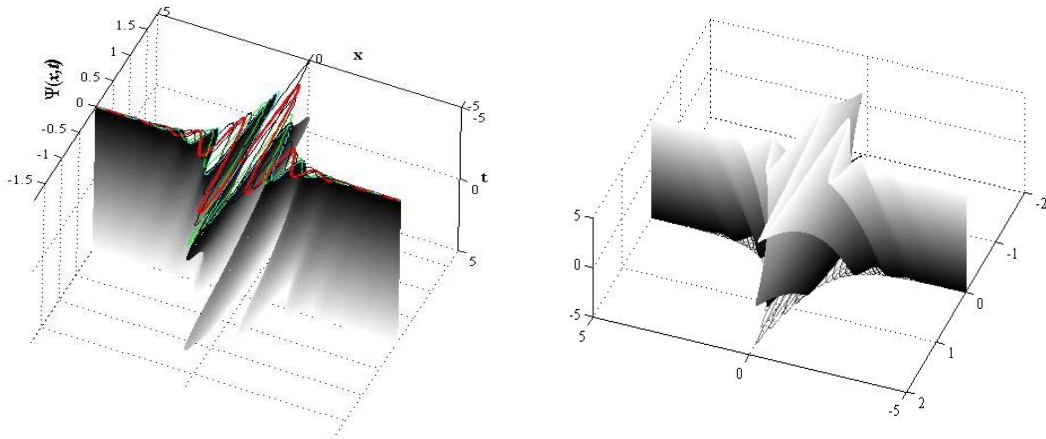


Рисунок 3 - Визуализация моделей солитонов (в двух ракурсах) как решений НУШ в среде Matlab 7.01(слева показаны сечения поверхности, порождающие графики вейвлет-функций).

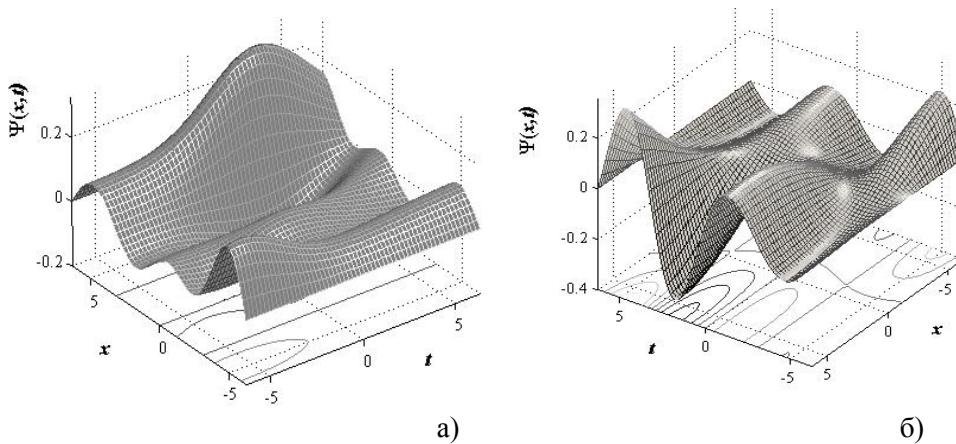


Рисунок 4 - Поверхности как решения СДУ, моделирующих солитонообразующие явления: а) модель РМБ, б) модель НУШ.

Более того, в процессе изысканий нами были обнаружены возможно новые (названы нами “М – wave”, полное математически корректное доказательство новизны которых – цель дальнейших исследований) семейства однопараметрических «вейвлет-атомов» (рис. 5, а - г), вполне пригодных для практической реализации обработки сигналов, так как они имеют все основания удовлетворять основной теореме Кальдерона – Морле – Гроссмана (визуализация этого факта изображена на рис. 5, д, е). По крайней мере, предварительные «испытания» для процессов фильтрации и сглаживания случайных временных рядов “М – wave” показали достаточно большие эффективность обработки и ее скорость по сравнению с «классическими вейвлет-атомами».

В заключение следует отметить, что в процессе изысканий сообразно с поставленной в настоящей работе цели, получены следующие основные результаты:

- установлено, что практически все известные функции непрерывных «вейвлет-атомов»: Гаусса, Морле, Шеннона, Мейера и др. (вещественные и комплексные) «содержатся» в

- сечениях солитонообразующих поверхностей;
- обнаружены возможно новые семейства однопараметрических «вейвлет-атомов», вполне пригодных для практической реализации обработки сигналов.

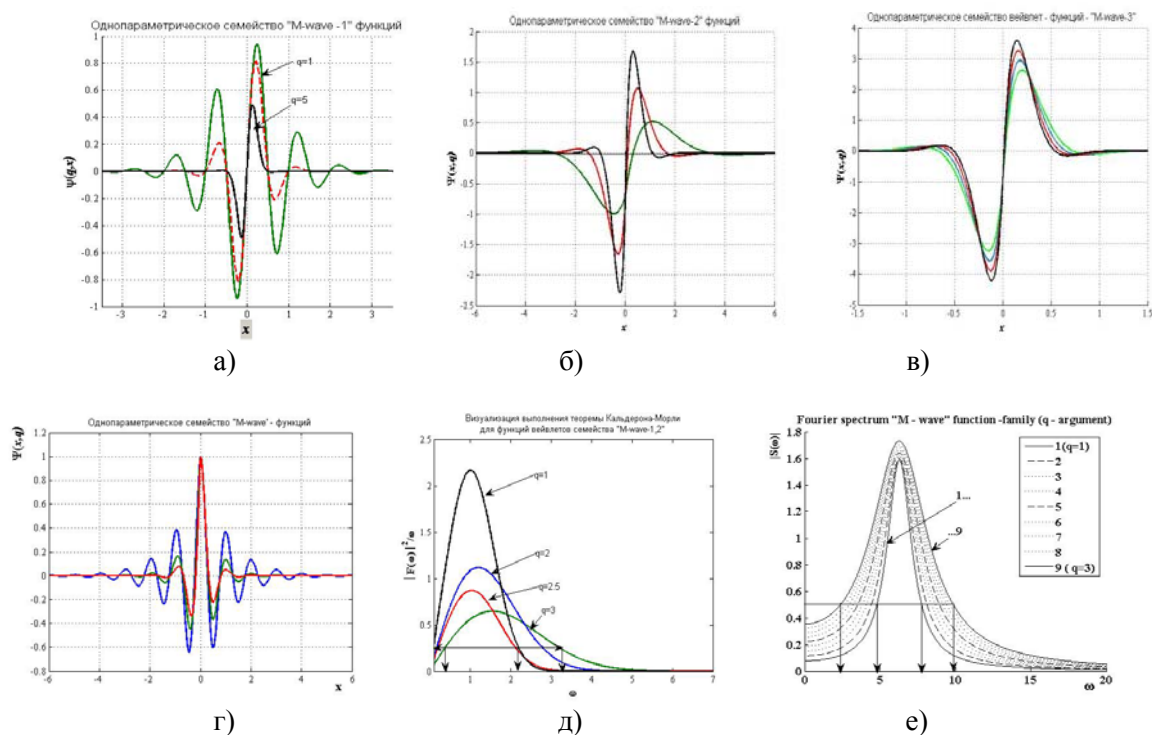


Рисунок 5 - Однопараметрические семейства непрерывных вейвлет-функций “M – wave” (q – параметр): а) – г); графическая визуализация спектральных свойств непрерывных вейвлет-функций, изображенных на рисунках а), б): д), е) соответственно

Литература

- Gabor D. Theory of communication // J. IEE93. – 1946. – P. 429-457.
- Ville J. Theory et applications de la notion de signal analytique // Cables et Transm.-2A(1). – 1948. – P. 61-74.
- Wigner E.P. Perspective in Quantum correction for thermodynamical equilibrium // Phys.Rev. – 40. – 1932. – P. 749-759.
- Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. of Math.Anal.- 15(4). – Juli 1984. – P. 723-736.
- Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005.-671 с.
- McCall S.L. and Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Letts. – V. 18.- 1967. – P. 908-911.
- Solitons in nonlinear optics. I.A more accurate description of the 2π -pulse in self-induced transparency / J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, P.J. Caudrey, R.K. Bullough // J. Phys. A. – V. 6. – 1973. – P. 1337-1347.
- Coherent pulse propagation, a dispersive, irreversible phenomenon / Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A. C. and Segur H. // J.Math.Phys. – V.15. – 1974. – P. 1852-1858.
- Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
- Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, П.П. Питаевский – М.: Наука, 1980. – 320 с.
- Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек., Дж. Гиббон, Х. Моррис – М.: Мир, 1988. – 694 с.
- Exact multisolitons solution of the self-induced transparency and Sine-Gordon equations / P.J. Caudrey, J.D. Gibbon, J.C. Eilbeck and R.K. Bullough // Phys. Rev. Letts. – 1973. – V. 30. – P. 237-238.
- Захаров В.Е., Манаков С.В. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ. – 1974. – Т. 19. – С. 332-343.