УДК 681.5.037:521.391

Жабко А.П., Дмитришин Д.В., Чашников М.В.
Zhabko A.P., Dmitrishin D.V., Chashnikov M.V.

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

SYNTHESIS OF STABILIZING CONTROL IN SELF-OSCILLATING SYSTEM IN CASE OF DEFICIENT FEEDBACK WITH TIME DELAY

Аннотация. В статье показана возможность стабилизации положения равновесия автоколебательной системы управлениями, которые не содержат диссипативные силы. Приведен явный алгоритм построения множества таких управлений.

Summary. In the article was shown the possibility of stabilizing the equilibrium position of self-oscillating system by control which do not contain the dissipative forces. It was substantiated the straight algorithm of such controls set making.

Дифференциальные уравнения осцилляторного типа часто возникают при моделировании регулярных колебаний в радиотехнических, радиофизических и электронных системах, таких как генераторы, усилители, джозефсоновские контакты, бистабильные оптические приборы и многие другие. В простейших случаях систем с одной степенью свободы – это уравнения Рэлея, Ван-дер-Поля и т.п. [1, 2].

Для этих уравнений характерны неустойчивость положения равновесия и возникновение автоколебательных режимов при возмущениях начальных данных. Уравнения линейного приближения в этом случае относятся к классу уравнений осцилляторного типа с отрицательным трением. Подобными математическими моделями описываются многие нелинейные динамические системы в различных областях техники, теории управления, экономике, социологии, экологии и т.д. [3].

Возникающие в радиотехнических или электронных системах колебания нередко носят негативный характер, нарушающий нормальную работу системы вплоть до ее разрушения. Если эти колебания имеют резонансный характер, то основным методом их устранения является изменение рабочего режима системы или ее параметров для ухода от резонансной частоты. Для устранения самовозбуждающихся колебаний используются диссипативные силы, так как за счет только потенциальных сил такие колебания погасить не удается.

Однако из-за конструктивных особенностей динамической системы не всегда возможно реализовать управления, содержащие диссипативные силы, либо соответствующая координата системы недоступна изменению, либо построение измерителей этой координаты затруднительно. Кроме того, реализация таких управлений может привести к негативным последствиям для системы.

Возникает проблема устранения нежелательных колебаний без использования диссипативных сил. Математически, эта проблема сводится к задаче стабилизации системы с неполной обратной связью. Существуют несколько способов решения этой задачи: метод Калмана, метод стабилизации динамическими регуляторами, метод основанный на построении асимптотических наблюдателей и т.д. [4], и все они, примененные к осцилляторной системе, приводят в конечном итоге к необходимости использовать диссипативные силы. Поэтому целью настоящей статьи является поиск и обоснование принципиально новых возможностей конструирования стабилизирующих управлений в активных осцилляторных системах. Оказалось, что такие управления можно построить, используя только потенциальные силы, но измеренные в некоторые предыдущие моменты времени. Положительная роль запаздывания в задачах стабилизации для некоторых классов динамических систем отмечалась в ряде работ, например, в [5]. Для осцилляторных систем новые возможности в решении задачи стабилизации следуют из результатов работы [6], где установлены свойства величины запаса устойчивости линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.

1. Математическая модель. Пусть динамика регулярных колебаний некоторой радиофизической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}(t) + f(q, \dot{q}) = 0\,,$$

для которого уравнение линейного приближения в окрестности положения равновесия $q(t) = q_0,\ \dot{q}(t) = 0$ имеет вид

$$\ddot{x}(t) - 2a_1\dot{x}(t) + a_2x(t) = 0\,,$$

где обязательно считается выполненным условие самовозбуждения $a_1 > 0$. Условие колебательности $a_1^2 - a_2 < 0$ может и не выполняться, что оказывается не принципиальным для процедуры конструирования стабилизирующих управлений.

Требуется на основе сигнала $\eta(t) = x(t)$ (выход системы) сформировать управляющее воздействие вида $u(t) = \int_0^1 \eta(t - \theta\tau)dg(\theta)$, где функция усиления $g(\theta)$ имеет ограниченную на [0, 1] вариацию и вместе с запаздыванием τ подлежит определению так, чтобы положение равновесия замкнутой этим управлением системы

$$\ddot{x}(t) - 2a_1\dot{x}(t) + a_2 x(t) = \int_0^1 x(t - \theta\tau)dg(\theta)$$

было асимптотически устойчиво.

В дальнейшем будет показано, что достаточно искать функцию $g(\theta)$ в классе кусочно-постоянных функций, таких, что

$$\int_0^1 x(t - \theta\tau)dg(\theta) = -k_1 x(t) + k_2 x(t - \tau),$$

т.е. определению подлежат параметры k_1, k_2, τ.

2. Определение степени затухания колебательной системы с запаздыванием. Рассмотрим вспомогательный квазиполином

$$f(\lambda) = \lambda^2 + a - be^{-\lambda\tau}. \tag{1}$$

Необходимые и достаточные условия его устойчивости даются неравенствами [7]:

$$a > b > 0, \quad \tau < \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}. \tag{2}$$

Поставим задачу: найти условия, при которых выполняется неравенство $\mathrm{Re}\lambda < -\sigma$, где λ – корень квазиполинома (1). Неотрицательная величина σ называется степенью затухания или запасом устойчивости.

Решение этой задачи можно получить, исходя из следующего утверждения.

Утверждение 1. Пусть

$$\omega_1 = \sqrt{a - \sigma^2 + \sqrt{b^2 e^{2\sigma\tau} - 4a\sigma^2}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{a - \sigma^2 - \sqrt{b^2 e^{2\sigma\tau} - 4a\sigma^2}}.$$

Необходимые и достаточные условия расположения корней квазиполинома (1) левее прямой $\mathrm{Re}\lambda = -\sigma \le 0$ даются неравенствами:

1) $a > b > 0$;

2) $b^2 + a - be^{\sigma\tau} > 0$;

3) $\dfrac{2}{\omega_1}\mathrm{arcctg}\dfrac{2\sigma\omega_1}{\omega_1^2 + be^{\sigma\tau} - \sigma^2 - a} - \tau > 0$;

4) $\dfrac{2}{\omega_2}\mathrm{arcctg}\dfrac{2\sigma\omega_2}{\omega_2^2 + be^{\sigma\tau} - \sigma^2 - a} - \tau < 0$.

Алгоритм определения степени затухания σ квазиполинома (1) следует из утверждения 1:

Шаг 1. Строятся функции

$$F_0(a, b, \sigma, \tau) = \sigma^2 + a - be^{\sigma\tau},$$

$$F_j(a, b, \sigma, \tau) = \frac{2}{\omega_j}\mathrm{arcctg}\frac{2\sigma\omega_j}{\omega_j^2 + be^{\sigma\tau} - \sigma^2 - a} - \tau, \ j = 1, 2.$$

Шаг 2. Определяются положительные корни уравнений

$$F_j(a, b, \sigma, \tau) = 0, \ j = 0, 1, 2,$$

относительно σ (величины a, b, τ – фиксированы). Пусть S_j – множество таких корней, j = 0, 1, 2, причем, очевидно, что $S_0 \ne \varnothing$.

Шаг 3. Вычисляется

$$\sigma_0 = \min\{S_1 \cup S_2 \cup S_3\}.$$

Вместо квазиполинома (1) в дальнейшем удобнее исследовать квазиполином

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 1 - \beta e^{-\lambda\theta}, \qquad (3)$$

$$0 < \beta < 1, \quad \theta < \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}.$$

Пусть для квазиполиномов (1) и (3) определены величины степеней затухания: $\sigma(a, b, \tau)$, $\tilde{\sigma}(1, \beta, \theta)$ соответственно.

Утверждение 2.

$$\tilde{\sigma}(1, \beta, \theta) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sigma(a, a\beta, \frac{\theta}{\sqrt{a}}) \text{ или } \sigma(a, b, \tau) = \sqrt{a}\,\tilde{\sigma}(1, \frac{b}{a}, \sqrt{a}\tau).$$

Таким образом, для определения величины степени затухания произвольных квазиполиномов вида (1) достаточно определить эту величину для вспомогательного квазиполинома вида (3).

3. «Движение» корней характеристического уравнения колебательной системы с запаздыванием. При θ = 0 у квазиполинома $f(\lambda) = \lambda^2 + 1 - \beta e^{-\lambda\theta}$ два корня: $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\sqrt{1-\beta}$. При увеличении параметра θ корни $\lambda_{1,2}(\theta)$ начинают «двигаться» с мнимой оси в левую полуплоскость. При этом справедливы равенства

$$\mathrm{Re}\lambda_1(\theta) = \mathrm{Re}\lambda_2(\theta) = -\tilde{\sigma}(1, \beta, \theta) = -\tilde{\tilde{\sigma}}(\theta),$$

$$\mathrm{Im}\lambda_1(\theta) = -\mathrm{Im}\lambda_2(\theta) = \omega_2(\beta, \tilde{\tilde{\sigma}}(\theta), \theta) = \sqrt{1 - \tilde{\tilde{\sigma}}^2 - \sqrt{\beta^2 e^{2\tilde{\tilde{\sigma}}\theta} - 4\tilde{\tilde{\sigma}}^2}},$$

$$F_2(1, \beta, \tilde{\tilde{\sigma}}(\theta), \theta) = \frac{2}{\omega_2}\operatorname{arcctg}\frac{2\tilde{\tilde{\sigma}}\omega_2}{\omega_2^2 + \beta e^{\tilde{\tilde{\sigma}}\theta} - \tilde{\tilde{\sigma}}^2 - 1} - \theta = 0.$$

Кроме корней $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ появляется бесконечное множество асимптотических корней $x_k + iy_k$, для которых

$$y_k = \omega_2(\beta, -x_k, \theta), \quad F_2(1, \beta, -x_k, \theta) = 0, \quad x_k \xrightarrow[\theta\to 0]{} -\infty,$$

также появляется один вещественный отрицательный корень $\lambda_3(\theta) = -\hat{\sigma}(\theta)$, причем $F_0(1, \beta, \hat{\sigma}(\theta), \theta) = \hat{\sigma}^2 + 1 - \beta e^{\hat{\sigma}\theta} = 0$.

Возможно три случая дальнейшего движения корней.

Случай а). Корни $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ в пределе при $\theta \to \theta_0$ становятся вещественными, т.е. $\omega_2(\beta, \tilde{\tilde{\sigma}}(\theta), \theta) \to 0$ при $\theta \to \theta_0$, где θ_0 – некоторая положительная величина (рис. 1,а).

Случай б). Корни $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ переходят в корни $\lambda_4(\theta), \lambda_5(\theta)$, причем $\lambda_{4,5}\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}\right) = \pm i\sqrt{1+\beta}$, и существует величина θ_1:

$$\lambda_1(\theta_1) = \lambda_4(\theta_1), \lambda_2(\theta_1) = \lambda_5(\theta_1) = -\hat{\sigma}(\theta_1) \text{ (рис. 1,б).}$$

Случай в). Корни $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ переходят в корни $\lambda_4(\theta), \lambda_5(\theta)$, причем они не становятся вещественными ни при каком $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}\right)$ (рис. 1,в). При этом справедливы равенства

$$\mathrm{Re}\lambda_4(\theta) = \mathrm{Re}\lambda_5(\theta) = -\bar{\sigma}(\theta),$$

$$\mathrm{Im}\lambda_4(\theta) = -\mathrm{Im}\lambda_5(\theta) = \omega_1(\beta, \bar{\sigma}(\theta), \theta) = \sqrt{1 - \bar{\sigma}^2 + \sqrt{\beta^2 e^{2\bar{\sigma}\theta} - 4\bar{\sigma}^2}},$$

$$F_1(1, \beta, \bar{\sigma}(\theta), \theta) = \frac{2}{\omega_1}\operatorname{arcctg}\frac{2\bar{\sigma}\omega_1}{\omega_1^2 + \beta e^{\bar{\sigma}\theta} - \bar{\sigma}^2 - 1} - \theta = 0.$$

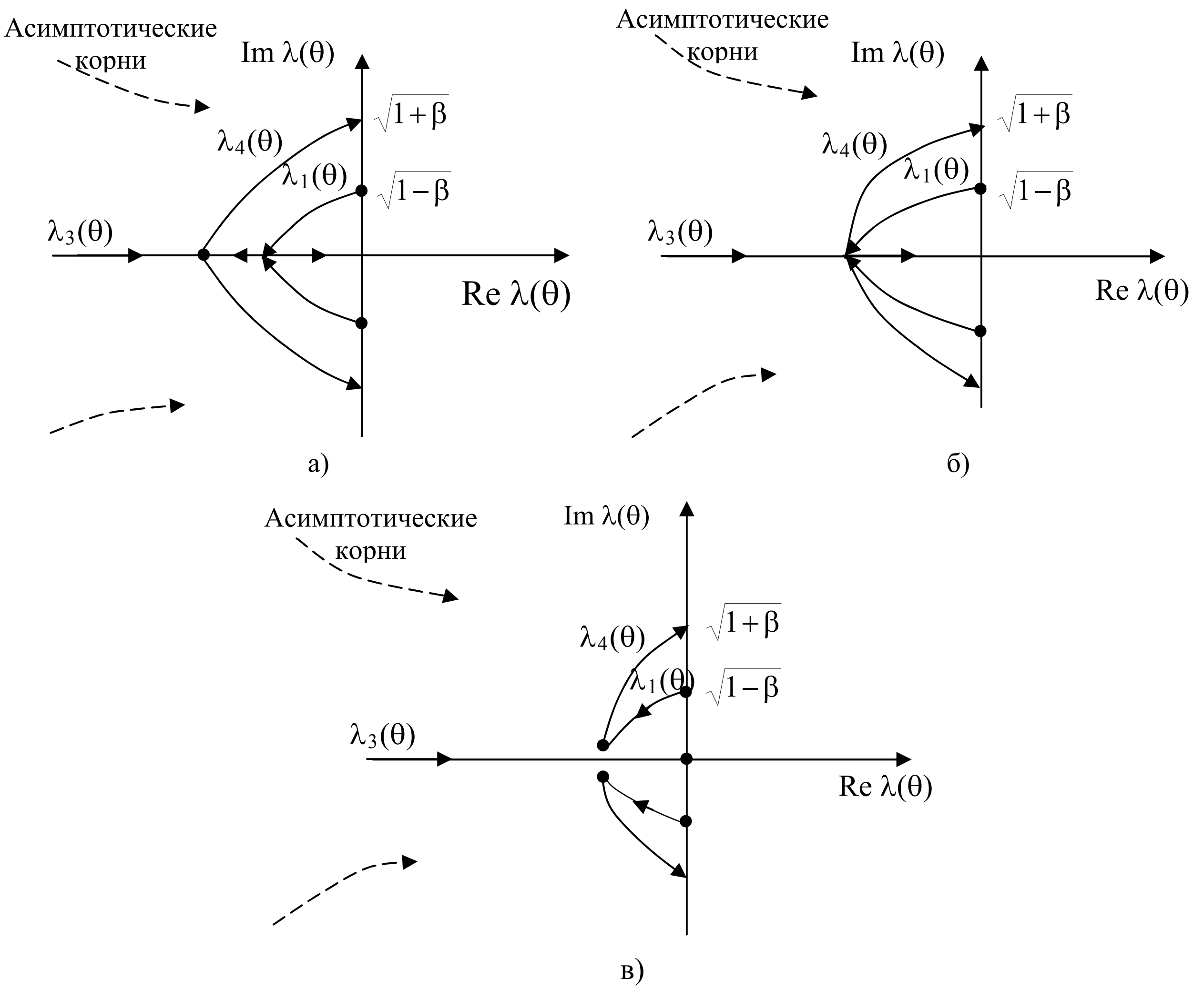

Рисунок 1 – «Движение» корней уравнения (3): а) – случай а; б) – случай б; в) – случай в

Рассмотрим, при каких значениях параметров системы возникает каждый из возможных случаев.

Утверждение 3. Первый случай возможен тогда и только тогда, когда $\beta \geq \frac{2}{e}$, при этом $\theta_0 \leq 1, \left|\mathrm{Re}\lambda\ (\theta_0)\right| \leq 1$.

Второй случай – частное предельное состояние первого при $\beta = \frac{2}{e}$. В этом случае $\theta_0 = 1, \left|\mathrm{Re}\lambda\ (\theta_0)\right| = 1$.

Третий случай получается при $\beta < \frac{2}{e}$.

4. Определение максимальной степени затухания. Максимальная степень затухания определяется как расстояние от мнимой оси до множества корней характеристического уравнения. Нетрудно показать, что при $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}\right)$ асимптотические корни расположены дальше от мнимой оси, чем корни $\lambda_1(\theta)$, $\lambda_4(\theta)$. Поэтому необходимо сравнивать лишь расстояния до мнимой оси между корнями $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_3(\theta)$ или $\lambda_4(\theta)$ и $\lambda_3(\theta)$.

Для определения максимальной степени затухания квазиполинома (3) рассмотрим вспомогательный квазиполином

$$g(\lambda) = f(\lambda - \sigma) = \lambda^2 - 2\lambda\sigma + \sigma^2 + 1 - \beta e^{-\sigma\theta} e^{-\lambda\theta}, \tag{4}$$

$$\beta \in (0, 1),\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}\right).$$

В силу непрерывной зависимости корней квазиполинома запаздывающего типа от параметров квазиполином (4) для каждого $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta}}\right)$ остается устойчивым при $\sigma \in [0, \sigma_0(\theta_0))$, где величину $\sigma_0(\theta_0)$ для каждого $\beta \in (0, 1)$ можно определить согласно алгоритма разд. 2.

Поставим задачу: для каждого $\beta \in (0, 1)$ максимизировать величину $\sigma_0(\theta_0)$ по θ_0.

Для решения этой задачи для каждого фиксированного $\beta \in (0, 1)$ построим линии *D*-разбиения и определим области устойчивости квазиполинома (4) в плоскости (θ, σ).

Как было установлено в разд. 2, линии *D*-разбиения определяются уравнениями

$$F_0(1, \beta, -\sigma, \theta) = 0, \qquad F_j(1, \beta, -\sigma, \theta) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Вид области устойчивости существенно зависит от того, больше β, чем $\frac{2}{e}$ или меньше (рис. 2).

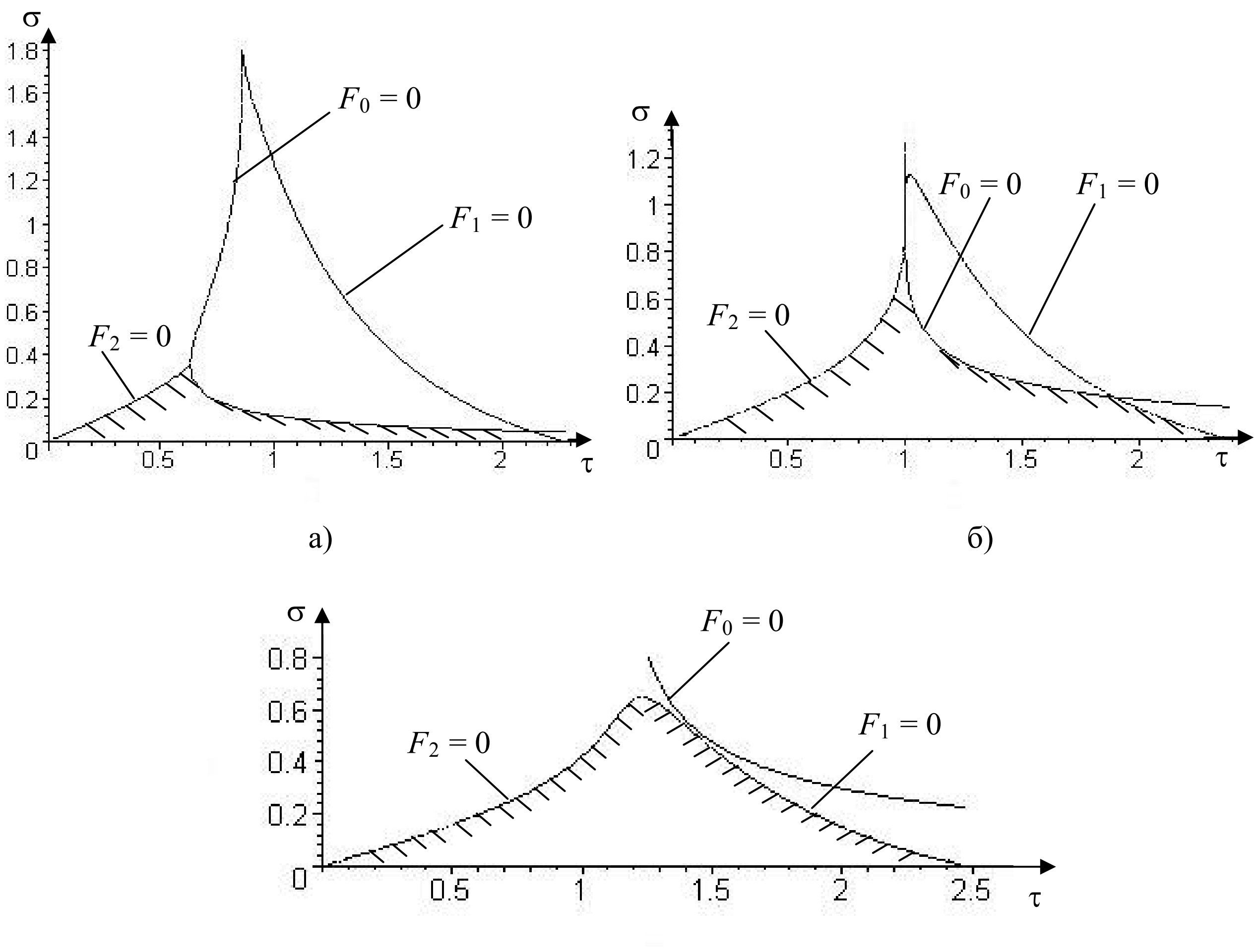

Рисунок 2 – Линии *D*-разбиения и область устойчивости в пространстве параметров (τ, σ):

а) при β = 0,9; б) при $\beta = \frac{2}{e}$; в) при β = 0,6

При $\beta \geq \frac{2}{e}$ величина $\overline{\sigma}_0(\beta) = \max\limits_{\theta_0} \sigma_0(\theta_0)$ определяется как ордината точки соприкасания кривых $F_0 = 0, F_2 = 0$. Величину $\overline{\sigma}_0(\beta)$ можно определить неявно соотношением

$$\beta = (1 + \overline{\sigma}_0^2(\beta)) e^{-\frac{2\overline{\sigma}_0^2(\beta)}{1+\overline{\sigma}_0^2(\beta)}}.$$

При этом $\theta_0 = \dfrac{2\overline{\sigma}_0^2(\beta)}{1+\overline{\sigma}_0^2(\beta)}$.

Если $\beta < \frac{2}{e}$, то возможны два случая: величина $\overline{\sigma}_0(\beta)$ определяется либо как максимум $\sigma_{\max}(\tilde{\theta})$ кривой $F_1(1, \beta, -\sigma, \theta) = 0$, либо как ордината $\sigma_s(\theta_s)$ точки пересечения кривых $F_0(1, \beta, -\sigma, \theta) = 0,\ F_1(1, \beta, -\sigma, \theta) = 0$. То есть $\overline{\sigma}_0(\beta) = \min\{\sigma_{\max}(\tilde{\theta}), \sigma_s(\theta_s)\}$.

При $\beta \in \left(\beta_0, \frac{2}{e}\right] \sigma_s(\theta_s) \leq \sigma_{\max}(\tilde{\theta})$, при $\beta \in (0, \beta_0)$ $\sigma_s(\theta_s) > \sigma_{\max}(\tilde{\theta})$. Величину β_0 можно определить из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \theta} = 0, \\ F_1 = 0, \\ F_0 = 0, \end{cases}$$

что следует из равенства $\dfrac{d\sigma}{d\theta} = -\dfrac{\partial F_1 / \partial \theta}{\partial F_1 / \partial \sigma}$.

Вычисления показывают, что

$$\beta_0 \approx 0{,}6516448,$$

$$\overline{\sigma}_0(\beta_0) \approx 0{,}7928524$$

(рис. 3).

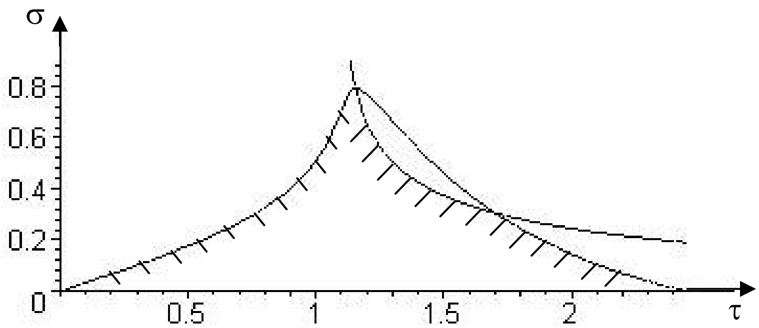

Рисунок 3 – Линии D-разбиения и область устойчивости в пространстве параметров (τ, σ) при $\beta = \beta_0 \approx 0{,}6516448$

Определим величину $\overline{\sigma}_0(\beta)$ при $\beta \in \left[\beta_0, \frac{2}{e}\right)$. Из системы $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 0 \end{cases}$, находим

$$\beta e^{\sigma\theta} = 1 + \sigma^2, \quad \omega_1 = \sqrt{2}\sqrt{1-\sigma^2},$$

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sigma^2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}.$$

Следовательно, величина $\overline{\sigma}_0(\beta)$ определяется неявно соотношением

$$\beta = (1 + \overline{\sigma}_0^2(\beta)) e^{-\frac{\sqrt{2}\overline{\sigma}_0(\beta)}{\sqrt{1-\overline{\sigma}_0^2(\beta)}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{2}\overline{\sigma}_0(\beta)}{\sqrt{1-\overline{\sigma}_0^2(\beta)}}}.$$

При $\beta < \beta_0$ величину $\overline{\sigma}_0(\beta)$ можно найти из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \theta} F_1(1, \beta, -\overline{\sigma}_0(\beta), \theta) = 0, \\ F_1(1, \beta, -\overline{\sigma}_0(\beta), \theta). \end{cases}$$

График функции $\overline{\sigma}_0(\beta)$ приведен на рис. 4.

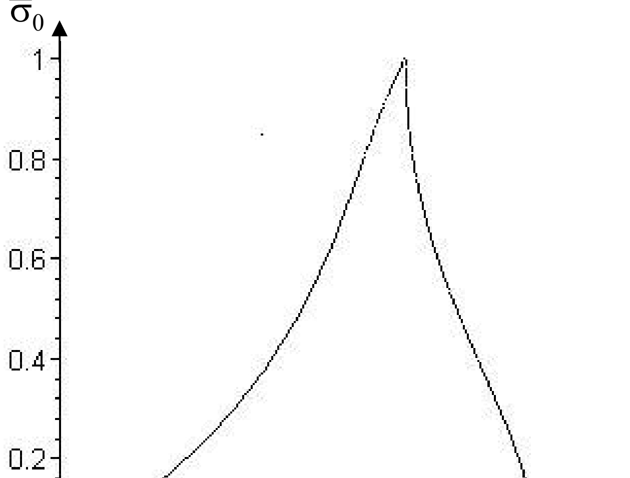

Рисунок 4 – График зависимости максимальной степени затухания $\overline{\sigma}_0$ от коэффициента β

5. Расчет параметров жесткой обратной связи колебательной системы с запаздыванием. Предположим, что система уравнений в отклонениях от положения равновесия имеет вид (рис. 5)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 2a_1\dot{x}(t) + a_2 x(t) = u(t), \\ u(t) = -(k_1 x(t) - k_2 x(t-\tau)), \end{cases} \tag{5}$$

где $a_1 > 0, a_2 > 0$.

Требуется выбрать коэффициенты усиления k_1, k_2 и запаздывание τ таким образом, чтобы замкнутая система управления была устойчивой. Это означает, что в исходной автоколебательной системе положение равновесия окажется устойчивым при замыкании системы.

Укажем возможный алгоритм построения стабилизирующего управления.

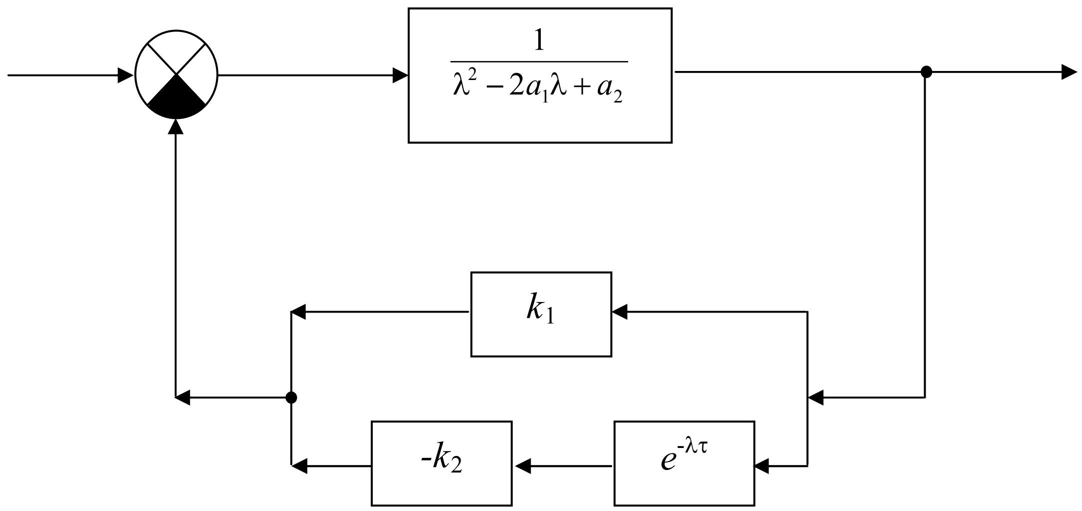

Рисунок 5 – Структурная схема управляемой колебательной системы с жесткой обратной связью

Характеристический квазиполином замкнутой системы

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 2a_1\lambda + a_2 + k_1 - k_2 e^{-\lambda\tau}$$

после замены $z = \lambda - a_1$ перейдет в квазиполином

$$\tilde{f}(z) = z^2 + A - Be^{-z\tau},$$

где $A = a_2 + k_1 - a_1^2, \quad B = k_2 e^{-a_1\tau}$. Если $\operatorname{Re} z < -a_1$, то $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Также, как и в разд. 2, введем вспомогательный нормированный квазиполином

$$f_1(z) = z^2 + 1 - \beta e^{-z\theta}.$$

Согласно утверждению 2, если при $\beta = \beta_1, \theta = \theta_1$ степень затухания квазиполинома $f_1(z)$ равна σ_1, то для корней квазиполинома $\tilde{f}(z)$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} z < -\chi\sigma_1$, если выбрать $A = \chi^2, B = \chi^2\beta_1, \tau = \frac{1}{\chi}\theta_1$.

Отсюда следует алгоритм построения стабилизирующего управления.

Шаг 1. Задаются параметры $\beta_1 \in (0, 1), \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{1+\beta_1}}\right)$.

Шаг 2. Определяется величина степени затухания $\sigma_1(\beta_1, \theta_1)$ и выбирается $\sigma < \sigma_1(\beta_1, \theta_1)$.

Шаг 3. Выбирается $\chi \geq \frac{a_1}{\sigma}$.

Шаг 4. Вычисляются коэффициенты усиления и запаздывание $k_1 = \chi^2 + a_1^2 - a_2$, $k_2 = \chi^2 \beta_1 e^{\frac{a_1\theta_1}{\chi}}$, $\tau = \dfrac{\theta_1}{\chi}$.

Например, если выбрать $\beta_1 = \dfrac{2}{e}, \theta_1 = 1$, то $\sigma_1 = 1$. Можно далее выбрать $\sigma = \dfrac{1}{2}, \chi = 2a_1$. Тогда $k_1 = 5a_1^2 - a_2$, $k_2 = \dfrac{8a_1^2}{\sqrt{e}}$. Следовательно, управление

$$u(t) = -(5a_1^2 - a_2)x(t) + \frac{8a_1^2}{\sqrt{e}} x(t - \frac{1}{2a_1})$$

является стабилизирующим в системе (5).

Отметим, что если $a_2 > 2a_1^2$, то колебания в системе (5) можно устранить управлением вида $u = kx(t-\tau)$.

Таким образом, в статье показана возможность устранения регулярных колебаний, возникающих в радиотехнических и электронных системах или системах иной природы, управлениями, не содержащими диссипативные силы и состоящими только из потенциальных сил, измеренных в предшествующие моменты времени. Выделен наиболее простой класс таких управлений и указана методика определения допустимых параметров управлений этого класса, что позволяет выбирать оптимальные в том или ином смысле управления.

Приложение. Доказательство утверждения 1. При $\tau \in (0, \dfrac{\pi}{\sqrt{a+b}})$ квазиполином (1) устойчив. Определим его степень затухания. Пусть она равна σ. Это означает, что устойчив квазиполином

$$f_1(\lambda) = f(\lambda - \sigma) = \lambda^2 - 2\sigma\lambda + \sigma^2 + a - be^{\sigma\tau}e^{-\lambda\tau}.$$

Условия его устойчивости можно выписать явно. Так как квазиполином $f_1(\lambda)$ при $\sigma = 0$ устойчив, то он остается устойчивым и при малых $\sigma > 0$. Определим те значения параметра σ, при которых нарушается устойчивость квазиполинома $f_1(\lambda)$. Это произойдет, если $f_1(0) = 0$ или $f_1(i\omega) = 0$. Первое условие эквивалентно равенству

$$\sigma^2 + a - be^{\sigma\tau} = 0.$$

Второе условие –

$$-\omega^2 - i2\sigma\omega + \sigma^2 + a - be^{\sigma\tau}(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\dfrac{\omega\tau}{2} = \dfrac{2\sigma\omega}{be^{\sigma\tau} + \omega^2 - \sigma^2 - a}, \\ (-\omega + \sigma^2 + a)^2 + 4\sigma^2\omega^2 = b^2 e^{2\sigma\tau}, \end{cases}$$

из которой получаем, что $f_1(i\omega) = 0$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из равенств

$$\frac{2}{\omega_j}\operatorname{arcctg}\frac{2\sigma\omega_j}{be^{\sigma\tau} + \omega_j^2 - \sigma^2 - a} - \tau = 0, \quad j = 1, 2,$$

где $\omega_1 = \sqrt{a - \sigma^2 + \sqrt{b^2 e^{2\sigma\tau} - 4a\sigma^2}}$, $\omega_2 = \sqrt{a - \sigma^2 - \sqrt{b^2 e^{2\sigma\tau} - 4a\sigma^2}}$.
Из теоремы о непрерывной зависимости корней квазиполинома запаздывающего типа от параметров и теории *D*-разбиения следует заключение утверждения.

Доказательство утверждения 2. $\lambda^2 + a - be^{-\lambda\tau} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\lambda^2}{a} + 1 - \frac{b}{a}e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\tau} = 0 \text{ или } z^2 + 1 - \beta e^{-z\theta} = 0 \text{ при } z = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}, \beta = \frac{b}{a}, \theta = \sqrt{a}\tau.$$

Пусть $\operatorname{Re} z < -\tilde{\sigma}$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\sqrt{a}z < -\sqrt{a}\tilde{\sigma} = \sigma$.

Доказательство утверждения 3. В случае а) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\theta\to\theta_0}\omega_2(\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta),\theta)=0,$$

из которого можно найти θ_0. Так как $F_0(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta_0),\theta_0)=0$, то $1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2-\beta e^{\tilde{\tilde{\sigma}}\theta}=\xi\to 0$ при $\theta\to\theta_0$. Тогда

$$\omega_2\sim\sqrt{1-\tilde{\tilde{\sigma}}^2-\sqrt{(-\xi+1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2)^2-4\tilde{\tilde{\sigma}}^2}}\sim\sqrt{\frac{1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2}{1-\tilde{\tilde{\sigma}}^2}},$$

$$\theta_0=\lim_{\xi\to 0+0}\frac{2}{\omega_2}\operatorname{arcctg}\frac{2\tilde{\tilde{\sigma}}\omega_2}{-\xi+\omega_2^2}=\lim_{\xi\to 0+0}\frac{2}{\omega_2}\cdot\frac{\omega^2-\xi}{2\tilde{\tilde{\sigma}}\omega_2}=\frac{2\tilde{\tilde{\sigma}}}{1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2}.$$

С учетом соотношения $\beta e^{\tilde{\tilde{\sigma}}\theta_0}=1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2$ получается

$$\beta=(1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2)e^{-\frac{2\tilde{\tilde{\sigma}}^2}{1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2}}.$$

Таким образом, $\theta_0=\ln\dfrac{1+\tilde{\tilde{\sigma}}^2}{\beta}$, где $\tilde{\tilde{\sigma}}$ определяется предыдущим соотношением.

Минимум функции $\varphi(\chi)=(1+\chi^2)e^{-\frac{2\chi^2}{1+\chi^2}}$ достигается при $\chi=1;$ $\varphi(1)=\dfrac{2}{e}$. Следовательно, при $\beta<\dfrac{2}{e}$ система

$$\begin{cases}F_0(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta_0),\theta_0)=0,\\ \lim\limits_{\theta\to\theta_0}F_2(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta),\theta)=0\end{cases}$$

несовместна ни при каком θ_0.

Из соотношения $\theta_0=\dfrac{2\sigma}{1+\sigma^2}$ следует, что $\theta_0\le 1$. Из равенства $\omega_2(\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta),\theta)=0$ следует $1-\sigma^2=\sqrt{\beta^2 e^{2\sigma\theta}-4\sigma^2}\ge 0$, откуда $\sigma\le 1$.

Во втором случае должна быть совместна система

$$\begin{cases}F_0(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta_0),\theta_0)=0,\\ \lim\limits_{\theta\to\theta_0}F_1(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta),\theta)=0,\\ \lim\limits_{\theta\to\theta_0}F_2(1,\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta),\theta)=0.\end{cases}$$

Следовательно, $\omega_1(\beta,-\operatorname{Re}\lambda_4(\theta_0),\theta_0)=\omega_2(\beta,-\operatorname{Re}\lambda_1(\theta_0),\theta_0)$ откуда $\beta e^{\sigma\theta_0}=2\sigma$. С другой стороны $\beta e^{\sigma\theta_0}=1+\sigma^2$, что возможно только при $\sigma=1$, откуда $\theta_0=\left.\dfrac{2\sigma}{\sigma^2+1}\right|_{\sigma=1}=1,\quad \beta=\left.2\sigma e^{-\sigma\theta_0}\right|_{\substack{\sigma=1\\ \theta_0=1}}=\dfrac{2}{e}$.

Литература

1. *Андронов А.В., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. *Дмитриев А*.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. – М.: Наука, 1989. – 278 с.
3. *Василенко Н.В.* Теория колебаний. – К.: Высшая школа, 1992. – 430 с.
4. *Антончик В*.С. Методы стабилизации программных движений. – С.Пб.: Изд. С.ПбГУ, 1998. – 208 с.
5. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. – С.Пб.: Изд. СпбГУ, 1993. – 320 с.
6. *Чашников М.В.* Максимизация запаса устойчивости колебательного контура с запаздыванием // Сб. трудов 36-й межвузовской научной конференции. – С.Пб.: Изд. СПбГУ, 2005. – С. 197-203.
7. *Усов А*.В., *Дубров А.Н., Дмитришин Д.В.* Моделирование систем с распределенными параметрами. – Одесса: Астропринт, 2002. – 664 с.