УДК 621.39 *Григорьева Т. И.*
Grygoryeva T. I.

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ ТЕНЗОРА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

APPLICATION OF PROPERTY OF INVARIANCY OF TENSOR AT MATHEMATICAL MODELING TELECOMMUNICATION SYSTEMS

Аннотация. Показана возможность построения математических моделей систем связи, применяя свойство инвариантности тензора. Рассмотрены как структурные, так и функциональные свойства системы связи в рамках одной модели.

Summary. The opportunity of construction of mathematical models of systems of communication is shown, applying property of invariancy of tensor. The structural and functional properties of system of communication are considered within the framework of one model.

При математическом моделировании телекоммуникационных сетей и систем возникает проблема выбора адекватного математического аппарата и корректного его использования. Для исследования структурных свойств телекоммуникационных сетей, как правило, применяют матричные методы [1], а при исследовании структурных и функциональных свойств телекоммуникационных систем – тензорные методы [2-5]. Поскольку, тензор – математический объект, более общего характера чем матрица, более предпочтительными при решении многих задач анализа и синтеза телекоммуникационных систем являются тензорные методы.

Фундаментальной работой в этом направлении стала работа Г. Крона. Тензорный анализ сетей [2]. Применяя тензоры, Г. Крон показал возможность моделирования электрических цепей. Позже А.Е. Петров занимался задачами моделирования экономических систем, используя тензорные методы [3]. Некоторые результаты тензорного моделирования телекоммуникационных систем представлены в работах В.В. Поповского и А.В. Лемешко [4, 5].

Однако, в перечисленных работах не продемонстрировано применение главного свойства тензора – инвариантности относительно выбора системы координат, а так же не было уделено внимание возможности задания разных систем координат. Цель данной статьи: показать возможность применения свойства инвариантности тензора при построении математических моделей телекоммуникационных систем.

1. Геометризация телекоммуникационных систем. Для построения тензорной модели телекоммуникационной системы необходимо в первую очередь произвести геометризацию системы: ввести понятие пространства, задать системы координат и правила их преобразования.

Рассмотрим пространство-структуру, определяемое составом и взаимосвязями элементов телекоммуникационной системы. Пространство-структура состоит из узлов сети и ветвей, соединенных тем или иным способом, т. е. это пространство дискретно в том смысле, что оно существует только вдоль выделенных линий – ветвей, «погруженных» в обычное евклидово пространство, а в общем случае в риманово пространство. Сами ветви и последовательности ветвей образуют в этом пространстве пути, по которым могут распространяться потоки информации.

В выбранном пространстве необходимо определить систему координат, а затем преобразование этих координат и, наконец, задать законы преобразования величин, характеризующие функциональные свойства системы связи при изменении системы координат.

Идея тензорного подхода состоит в том, что все измеряемые физические величины суть тензоры. Главной особенностью есть то, что реальная величина не зависит от системы координат, хотя значения ее проекций в различных системах координат могут быть разными. Проекции тензора, т. е. компоненты тензора в различных системах координат, преобразуются по определенным законам. Наличие такой формулы преобразования позволяет знать проекции только в одной системе координат и без нового проектирования определять проекции того же объекта в любой другой системе координат – это главное свойство тензорного метода, называемое свойством инвариантности относительно системы координат, которое мы будем применять при построении математических моделей систем связи.

Ввиду того, что при исследовании системы связи возникает необходимость в получении различных характеристик системы при изменении нагрузки в сети, а с помощью тензорных методов мы можем вычислять эти характеристики при переходе от одной системы координат к другой, то систему координат в данном пространстве-структуре зададим следующим образом. В качестве системы координат возьмем совокупность независимых путей, проходящих по ветвям сети, т. е. каждый путь ввиду своей независимости будет определять координатную ось. Изменение структуры или другой выбор путей будем интерпретировать как преобразование координат (рис. 1). Такая специфика задания системы координат не является новой. Ранее она была предложена Г. Кроном [2,6], А. Е. Петровым [3] и др., в частности, для систем связи впервые была использована В. В. Поповским и А. В. Лемешко [4,5]. Указанный способ выбора системы координат позволяет в моделируемой системе производить анализ как структурных, так и функциональных свойств и хорошо вписывается в современные телекоммуникационные технологии для их анализа.

Состояние № 1 системы	$\Rightarrow$	Преобразование координат	$\Rightarrow$	Состояние № 2 системы

Рисунок 1 – Последовательность процедур при изменении состояния системы

Системы координат будут отличаться количеством и способом соединения элементов связи. Среди этих систем координат следует выбрать одну в качестве эталонной, для которой, затем, разработать тензорный метод исследования. Итак, выбрав некоторую простейшую систему координат, т. е. некий обобщенный элемент данной системы связи, для которого можно выяснить аналитически различные характеристики в тензорном виде, несложно получить подобные характеристики (тензоры) для любого другого элемента связи путем преобразования системы координат. Само преобразование координат можно интерпретировать как изменение нагрузки по соответствующим направлениям сети.

Можно показать, что преобразования координат, рассмотренные выше, образуют группу [7]. Действительно, два последовательных преобразования координат дают снова преобразование координат; операция преобразования координат является ассоциативной; каждое невырожденное преобразование координат имеет обратное; можно определить «единичный элемент» группы преобразований, не меняющий системы координат (это квадратная единичная матрица).

2. Функциональные свойства тензорной модели системы связи. Каждая ветвь сети, моделирующая тракт передачи в ТКС, характеризуется рядом параметров. Рассмотрим основные из них по аналогии с [4]. В качестве воздействующей величины возьмем задержку, в качестве величины отклика – нагрузку. Введем следующие обозначения. Пусть h_j^i – нагрузка j – го канала в i– ю секунду времени; λ_j – пропускная способность j – го канала; t^i – задержка сети в i – ю секунду времени. Тогда имеют место следующие соотношения

$$h_j^i = t^i \lambda_j .$$

Здесь $h_j^i = h_j^i(x)$ – тензор второй валентности, который определяется n^2 функциями, зависящими от системы координат $(x) = (x^1, x^2, ..., x^n)$, в которой рассматривается сеть, $\lambda_j = \lambda_j(x)$ – ковариантный вектор, $t^i = t^i(x)$ – контравариантный вектор.

Предположим, произошло изменение нагрузки по различным направлениям в сети, что можно трактовать как переход от старой системы координат (x) к новой системе координат $(y) = (y^1, y^2, ..., y^n)$. При этом функции перехода должны задаваться некоторыми достаточно гладкими (т. е. непрерывно - дифференцируемыми) функциями

$$y^i = y^i(x^j); \quad x^j = x^j(y^i). \tag{1}$$

Тогда значения нагрузки сети, пропускной способности и задержек в новой системе координат будут рассчитываться по стандартным формулам преобразования тензора при изменении системы координат [8]

$$h'^i_j(y) = h_\alpha^\beta(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial y^i}{\partial x^\beta},$$

$$\lambda`_j(y) = \lambda_\alpha(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}, \qquad (2)$$

$$t`^i(y) = t^\alpha(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}.$$

В качестве примера рассмотрим систему связи с динамическим режимом работы, состоящую из пяти узлов с четырьмя коммутациями. Пусть структура данной системы связи описывается следующим графом с пятью вершинами и четырьмя ветвями (рис. 2). В качестве математической модели данной сети можно рассмотреть пространство – структуру. В качестве системы координат $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ возьмем коммутации системы связи x^1, x^2, x^3 и x^4. Пусть $h_j(x)$ – значение пропускной способности *j*-го канала в системе координат (x). Предположим, что в данной сети произошло перераспределение информационных потоков, т. е. изменилась система координат. Тогда в новой системе координат, в отличие от старой, положение узлов и их количество останется прежним, а количество ветвей и их направления могут измениться.

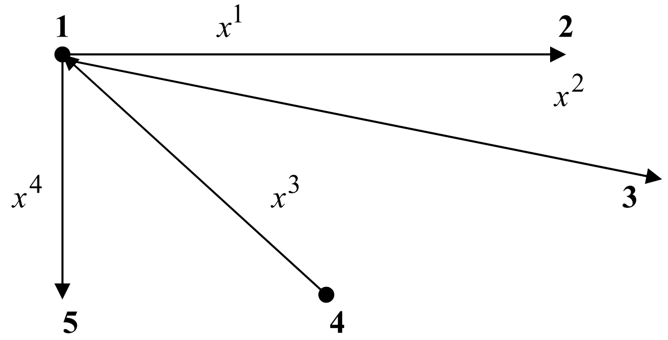

Рисунок 2 – Структура динамической системы связи для конкретного момента времени

Пусть структура сети в новой системе координат (*y*) имеет такой вид, как показано на рис. 3. Зададим функции перехода от системы координат (*x*) к системе координат (*y*) и обратно:

$$y^1 = x^1,\ y^2 = x^1 - x^2,\ y^3 = x^2 - x^3,$$

$$y^4 = x^3 + x^4,\ y^5 = x^4,\ y^6 = x^1 - x^4,$$

$$x^1 = y^1,$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(-2y^1 - y^2 + y^3 + y^4 + y^6),$$

$$x^3 = y^4 - y^5,\ x^4 = y^5.$$

Обозначим через $p_j(y)$ – значение пропускной способности *j*-го канала в системе координат (*y*). Тогда по следующим формулам можно вычислить $p_j(y)$:

$$p_j(y) = h_\alpha(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}.$$

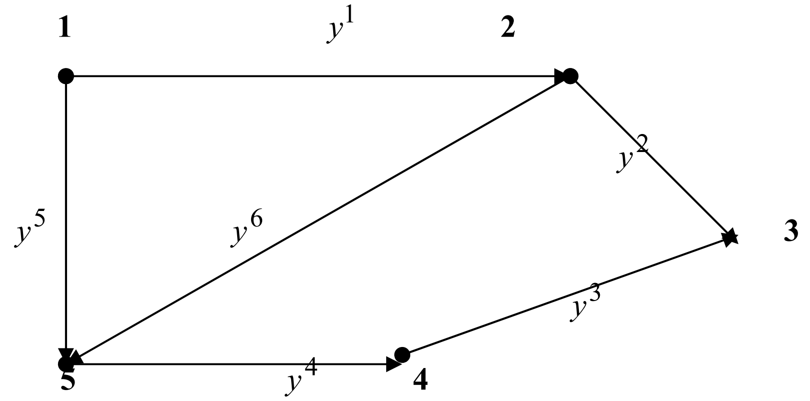

Рисунок 3 – Структура динамической модели системы связи с учетом перераспределения ресурсов

Таким образом, перераспределение пропускных способностей произошло следующим образом:

$$p_1 = h_1 - h_2;\ p_2 = -\frac{1}{2}h_2;\ p_3 = \frac{1}{2}h_3;\ p_4 = \frac{1}{2}h_2 + h_3;\ p_5 = h_4 - h_3;\ p_6 = \frac{1}{2}h_2.$$

3. Различные способы задания системы координат при математическом моделировании систем связи. Выше показано построение математической модели системы связи, в которой количество ветвей и их направления не инвариантны, а положение узлов и их количество инвариантно относительно системы координат. Аналогично можно построить математическую модель системы связи, в которой количество узлов инвариантно, а количество ветвей и их направления, а также положение узлов не инвариантно относительно выбора системы координат. В такой математической модели мы будем иметь больше возможностей для оптимизации при преобразовании системы координат. Ввиду того, что теперь при переходе к другой системе координат можно изменить не только количество и направления каналов как в предыдущей модели, но можно изменить и положение узлов, т.е. мы можем переходить к некоторой абстрактной системе координат. Таким образом, преобразование координат имеет меньше ограничений, чем при построении предыдущей модели.

В [4] рассмотрена математическая модель системы связи, в которой структура сети изменяется при изменении системы координат следующим образом: количество ветвей инвариантно относительно системы координат, положение узлов и их количество не инвариантно. При исследовании ТКС в [4] предложено рассмотреть анизотропное пространство-структуру, определяемое составом и взаимосвязями элементов системы. Размерность такого пространства численно равна количеству ветвей, т. е. числу отдельных трактов передачи информации в ТКС. Совокупность независимых замкнутых и разомкнутых путей, проходящих по ветвям сети, образуют системы координат, т.е. каждый путь ввиду своей независимости определяет координатную ось. Преобразование структуры сети с сохранением начального числа ветвей или переход от одной совокупности независимых путей к другой трактуется как преобразование системы координат.

Рассмотрим сеть, представленную n связными путями (рис. 4), структура которой отражается ориентированным полносвязным графом с k вершинами-узлами. В [4] показано, что при расчете соединенной сети в качестве примитивной сети целесообразно выбрать несвязную сеть, состоящую из отдельных ветвей (рис. 5).

Переход от соединенной структуры сети к разомкнутой структуре, сохранив инвариантным количество ветвей, можно трактовать как переход от старой системы координат (x) к новой системе координат $(y) = (y^1, y^2, ..., y^n)$.

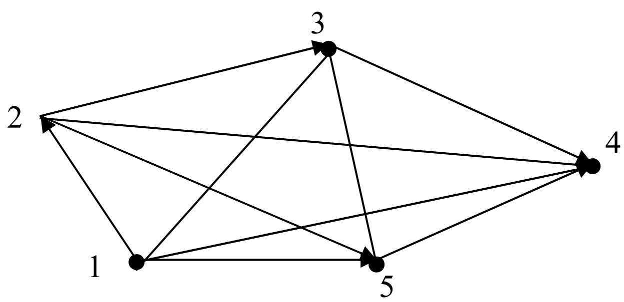

Рисунок 4 – Структура полносвязной сети

Пусть $h_j^i(y)$, $\lambda_j(y)$, $t^i(y)$ – значения нагрузки сети, пропускной способности, задержек в системе координат (y), т. е. значения для разомкнутой сети. Задав функции перехода (1) можно найти значения нагрузки сети, пропускной способности, задержек в исходной системе координат (x), т. е. найти характеристики для исходной соединенной сети.

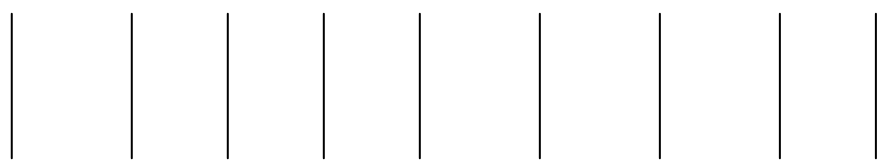

Рисунок 5 – Структура несвязной сети

При подобных построениях математических моделей систем связи актуальной становится задача выбора простейшей (примитивной) системы координат, для которой уже известны необходимые характеристики данной системы связи, опираясь на которую, можно рассчитать необходимые величины в заданной координатной системе. Если же заранее рассчитанной системы нет, то в качестве примитивной выбирается система, в которой расчет искомых параметров был бы наиболее предпочтительным.

Таким образом, свойство инвариантности тензора позволяет сконцентрировать основное внимание на свойствах системы связи независимо от системы координат, в которой рассматривается данная система связи. Более того, решение любой задачи можно свести к исследованию системы связи в наиболее предпочтительной (эталонной) системе координат. Переход от исходной системы координат, в которой осуществлялась постановка задачи, к эталонной и обратно осуществляется с помощью известных инвариантных преобразований. Отметим также, что структурные и функциональные свойства системы представляются в рамках одной и той же тензорной модели.

Литература

1. *Основи теорії систем зв'язку* / М. В. Захарченко, В. В. Поповський, В. Ф. Олійник, С. М. Горохов – Одеса: ОНАЗ, 2001. – 194 с.
2. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 719 с.
3. *Петров А. Е.* Тензорная методология в теории систем. – М: Радио и связь, 1985. – 152 с.
4. *Поповский В. В., Лемешко А. В.* Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып.125. – С. 156-164.
5. *Лемешко А. В.* Особенности моделирования двухполюсной сети связи ортогональной сетью в рамках тензорного анализа // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып.128. – С. 16-25.
6. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям – диакоптика. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
7. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 432 с.
8. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.