

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНОДОСТУПНОГО ПУЧКА С ПОТЕРЯМИ

## STATISTICAL SIMULATION ANALYSIS OF AN ACCESSIBLE BUNDLE LOSSY

**Аннотация.** Простые и точные формулы для расчета вероятностных характеристик систем распределения информации удается получить в простейших случаях. Когда же строгое и верное решение задачи не получается, используется имитационное моделирование исследуемого процесса. В статье обосновывается необходимость моделирования, приведен и описан его алгоритм.

**Summary.** The simple and exact formula for account of the probability characteristics of information distribution systems is developed in the elementary cases. When the strict and valid decision of the task is impossible, the statistical simulation analysis of the investigated process is used. In this article there is a substantiation of necessity of statistical simulation analysis, the block-diagram of his algorithm is given.

Основные расчетные формулы определения емкости пучков каналов или объема коммутационного оборудования, связывающие вероятность потерь сообщения, интенсивность нагрузки и число каналов, получены в предположении о пуассоновском характере потока поступающих вызовов. Результаты измерений параметров нагрузки на телекоммуникационных сетях показали отличие характеристик реальных потоков от модели простейшего потока [1, 2].

Поток вызовов, поступающий на обслуживание в систему, описывается распределением вероятностей длины промежутка времени между соседними вызовами [3, стр. 23]. В математической модели, описывающей пуассоновский поток вызовов, длительность промежутка времени между вызовами распределена по показательному закону, для которого математическое ожидание рассматриваемой величины равно  $1/\lambda$ , а дисперсия –  $1/\lambda^2$  ( $\lambda$  – параметр потока). Степень отклонения реальных потоков от модели пуассоновского потока можно оценить по коэффициентам вариации  $Var$ , асимметрии  $Sk$  и эксцесса  $Ex$ . Для показательного распределения  $Var \equiv 1$ ,  $Sk \equiv 2$  и  $Ex \equiv 6$ .

Поскольку модель пуассоновского потока не всегда позволяет адекватно описать реальные потоки вызовов, то необходимо выбирать другие распределения для их описания, позволяющие достаточно широко варьировать формой кривой плотности вероятности и обеспечивать лучшее согласие с данными измерений. Применение иных, отличных от показательных, распределений приводит к значительному усложнению математической модели. Основным инструментарием исследования является *марковский процесс*, как модель системы телетрафика. Марковский процесс, а также его частный случай *процесс гибели и размножения*, предусматривает составление и решение систем линейных алгебраических уравнений равновесия. Произвольное распределение вероятностей времени между переходами процесса из одного состояния в другое исследуется *полумарковским процессом*. Основные результаты, пригодные для практического использования, получены для систем массового обслуживания типа  $M/M/1$  и  $M/M/m$  (*марковские процессы*), где  $M$  – обозначает показательное распределение промежутков времени между вызовами и времени обслуживания соответственно, а  $m$  – число обслуживающих устройств. Для систем типа  $G/M/m$ ,  $M/G/m$  (*полумарковский процесс*),  $G/G/m$ , где  $G$  – произвольное распределение времени, даже при применении спектральных методов решения уравнений с использованием техники преобразований и методов теории функций комплексного переменного получены лишь частичные результаты [3, стр. 186].

Как показывают исследования [4, стр. 35], для описания потока вызовов с переменным параметром  $\lambda$  необходимо использовать произвольное распределение промежутков между вызовами, но не показательное. Нестационарность параметра потока вызывает колебания количества вызовов в единицу времени и рост дисперсии интенсивности нагрузки. Среди методов расчета, позволяющих учитывать реальную дисперсию нагрузки, наиболее известны метод эквивалентных замен (МЭЗ) и метод «расчетной нагрузки». Оба метода ввиду предположения, что простейший поток с переменным параметром  $\lambda$  подчиняется распределению Пуассона так же, как и с постоянным параметром, базируются на известной первой формуле Эрланга [5, стр. 136]. Но поскольку при переменном параметре необходимая для расчета вероятностных характеристик функция изменения параметра потока во времени неизвестна, то данные методы позволят получить лишь приближенные значения искомых характеристик рассчитываемой системы и величина ошибки может быть достаточно существенной.

Имитационное моделирование применимо к задачам, не поддающимся аналитическим и численным методам, причем усложнение задачи не создает никаких принципиальных трудностей. При имитационном моделировании реализующий алгоритм воспроизводит процесс функционирования

системы во времени, имитируются составляющие процесс элементарные явления с сохранением его временной и логической структуры. Выбор алгоритмов моделирования осложнен противоречивым требованием – за минимальное время получить статистические оценки максимальной точности. В связи с этим существует несколько подходов к статистическому моделированию систем массового обслуживания. Один из них – это моделирование марковского процесса. При этом воспроизводятся два случайных механизма: время пребывания системы в  $i$ -м состоянии и вероятности перехода из состояния  $i$  в состояние  $i + 1$ . В результате такого моделирования можно получить распределение числа занятых каналов моделируемой системы. Однако, поскольку траектория марковского процесса устроена таким образом, что время пребывания в  $i$ -м состоянии подчиняется экспоненциальному распределению с параметром  $\lambda + i$ , т.е.

$$P\{\xi_{\zeta_i} > t\} = e^{-(\lambda+i)t},$$

то статистическое испытание возможно только для пуассоновских потоков.

Второй подход заключается в моделировании истинного процесса обслуживания потока вызовов. При этом используются подпрограммы реализации двух случайных величин: согласно функции распределения промежутков времени между вызовами  $A(t)$  и функции распределения продолжительности обслуживания  $B(t)$ . Процесс поступления вызовов в систему моделируется как рекуррентный – момент прибытия очередной заявки получается добавлением случайного интервала  $A(t)$  к предыдущему, а моменты освобождения каналов – добавлением к текущему моменту случайной длительности обслуживания  $B(t)$ . Интервалы формируются датчиками псевдослучайных чисел, настроенными на требуемые законы распределения. Это является существенным преимуществом данного подхода, но требует значительно больше машинных ресурсов.

Случайные величины  $A(t)$  и  $B(t)$  с требуемым законом распределения могут быть получены из последовательности случайных величин с равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ , которая, в свою очередь, получается из последовательности случайных величин, распределенных по закону Бернулли с параметром  $p = 0,5$ . Существует немало способов получения равномерно распределенных чисел [7, стр. 71]. Для получения случайных величин, подчиненных требуемой функции распределения  $F(t)$ , случайная величина  $t$  вычисляется как обратная функция  $F^{-1}$  от аргумента, которым является случайная величина  $x$ , равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ , т.е.  $t = F^{-1}(x)$  [8, с. 51].

Поскольку произвольный поток вызовов может быть задан последовательностью промежутков времени между вызовами  $z$ , то для моделирования любого потока вызовов достаточно на  $i$ -м шаге получить значение величины  $z_i$ , имеющей соответствующую моделируемому потоку функцию распределения  $F(z)$ . Для потока с переменным параметром функция распределения промежутка между  $i$ -м и  $(i - 1)$ -м вызовами имеет вид

$$F_i(z) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+z} \lambda(t) dt}, \quad (1)$$

где  $\lambda(t)$  – значение параметра потока в промежутке  $[t_0, t_0 + z]$ .

С учетом сказанного, для моделирования потока с переменным параметром нужно найти обратную функцию к функции (1). Для этого необходимо решить относительно  $t_0 + z$  уравнение

$x = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0+z} \lambda(t) dt}$ . При  $t_0 = 0$  (начальный момент времени) следует решить относительно  $z$  уравнение  $x = 1 - e^{-\int_0^z \lambda(t) dt}$ . Значение  $z$ , получающееся в результате решения данного уравнения зависит от вида функции  $\lambda(t)$ . Например, при  $\lambda(t) = \lambda$  (параметр не зависит от  $t$ , постоянен) решением уравнения будет

$$z_i = \frac{-\ln(1 - x_i)}{\lambda}. \quad (2)$$

Моделируя случайную величину  $z$  при постоянном значении  $\lambda$ , неизбежно получим простейший поток с дисперсией числа вызовов в единицу времени, равной математическому ожиданию. Для моделирования потока, в котором бы дисперсия превышала математическое ожидание (что соответствует реальным потокам вызовов), необходимо либо задать функцию изменения во времени параметра потока, либо аппроксимировать поток каким-либо иным способом.

Реальные потоки вызовов формируются множеством источников с различной удельной интенсивностью нагрузки. В процессе создания потока вызовов участвуют источники, принадлежащие к той или иной группе с близкими значениями интенсивности нагрузки. Значение параметра результи-

рующего потока вызовов в каждый момент времени зависит от того, к какой группе по интенсивности нагрузки принадлежит источник и каково соотношение численности этих источников с остальными. Следовательно, более адекватно описать такой поток или распределение промежутков времени между вызовами можно не экспоненциальным распределением, а их смесью, называемой гиперэкспоненциальным распределением. Ему подчиняется прерывистый пуассоновский поток  $n$ -го порядка. Практические измерения показали, что достаточно хорошо реальные потоки аппроксимируются уже при  $n = 2$ . Плотность гиперэкспоненциального распределения при этом записывается так:

$$p(z) = p_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (3)$$

Это значит, что с вероятностью  $p_1$  промежуток времени между вызовами имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda_1$ , а с вероятностью  $p_2$  – с параметром  $\lambda_2$  (естественно,  $p_1 + p_2 = 1$ ). Такое распределение позволяет моделировать большие разбросы величины промежутка времени между вызовами и обеспечивает значения коэффициентов  $Var \geq 1$ ,  $Sk \geq 2$  и  $Ex \geq 6$ . Это, в свою очередь, позволяет получать потоки с дисперсией числа вызовов в единицу времени, превышающей математическое ожидание в единицы и десятки раз.

Поток вызовов моделируется в соответствии с (3). При этом используется вспомогательный датчик случайных равномерно распределенных чисел на интервале  $[0, 1]$   $y$ , задающий вероятности  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_2 = 1 - p_1$ ). Случайная величина  $z_i$  определяется в зависимости от полученного значения  $p_1$  и в соответствии с выражением (2), поэтому

$$z_i = \begin{cases} \frac{-\ln(1-x_i)}{\lambda_1} & \text{при } y_i \leq p_1, \\ \frac{-\ln(1-x_i)}{\lambda_2} & \text{при } y_i > p_1. \end{cases} \quad (4)$$

Итак, при получении от вспомогательного датчика случайной величины  $y_i$ , не превышающей заданной вероятности  $p_1$ , промежуток  $z_i$  формируется исходя из значения параметра  $\lambda_1$ . В противном случае ( $y_i > p_1$ , «сгенерирована» вероятность  $p_2$ ) – исходя из значения параметра  $\lambda_2$ . Описанный способ достаточно прост и не требует нахождения обратной функции к плотности (3).

Общая идея алгоритма моделирования дана в [8, стр. 53], но в этой работе она доведена до конкретной реализации и добавлено нескольких оригинальных ветвей для «измерения» математического ожидания и дисперсии поступающей и обслуженной нагрузок. Это позволяет исследовать зависимость вероятности потерь от величины дисперсии нагрузки.

Структурная схема алгоритма имитационной модели показана на рис. 1.

Работа модели начинается с установки в нуль таймера (счетчика текущего времени)  $T$ , момента предыдущего события  $T1$  и всех остальных накапливающих счетчиков. Моментам выхода из системы вызовов присваиваются значения, превышающие предельное значение таймера  $T$  (все каналы свободны).

Момент выхода из системы вызова соответствует моменту освобождения канала и записывается в индивидуальную ячейку памяти, закрепленную за каждым каналом. При занятии канала в нее записывается момент его будущего освобождения, определяемый как сумма значений таймера текущего времени и продолжительности обслуживания  $B(t)$ . При освобождении канала в эту ячейку записывается такое значение (например,  $10^{99}$  или « $\infty$ »), которого заведомо не достигнет в результате всего времени моделирования таймер  $T$ .

После приведения схемы в исходное состояние формируется случайный момент  $z_i$  прибытия  $i$ -го вызова. Из ячеек памяти, закрепленных за каждым каналом, выбирается минимальный из моментов освобождения каналов  $O_j$  ( $j$  – номер канала). Вариант обработки текущего события определяется соотношением между  $T + z_i$  и  $O_j$ . Если  $T + z_i \leq \min[O_j]$ , то текущим событием является поступление вызова. Соответственно продвигается таймер текущего времени  $T$ . К счетчику  $p_k$  времени пребывания системы в состоянии с  $r$  занятыми каналами добавляется разность  $T - T1$  и обновляется значение  $T1$ . Если новый вызов застает в системе все  $V$  каналов занятыми (число ранее поступивших заявок  $k = V$ ), то к счетчику отказов  $d$  добавляется единица. Затем формируется момент  $z_{i+1}$  поступления нового вызова. После подпрограммы измерения избыточной нагрузки производится возврат к оператору проверки условия  $T + z_i > O_j$  (поскольку  $z$  обновлено).

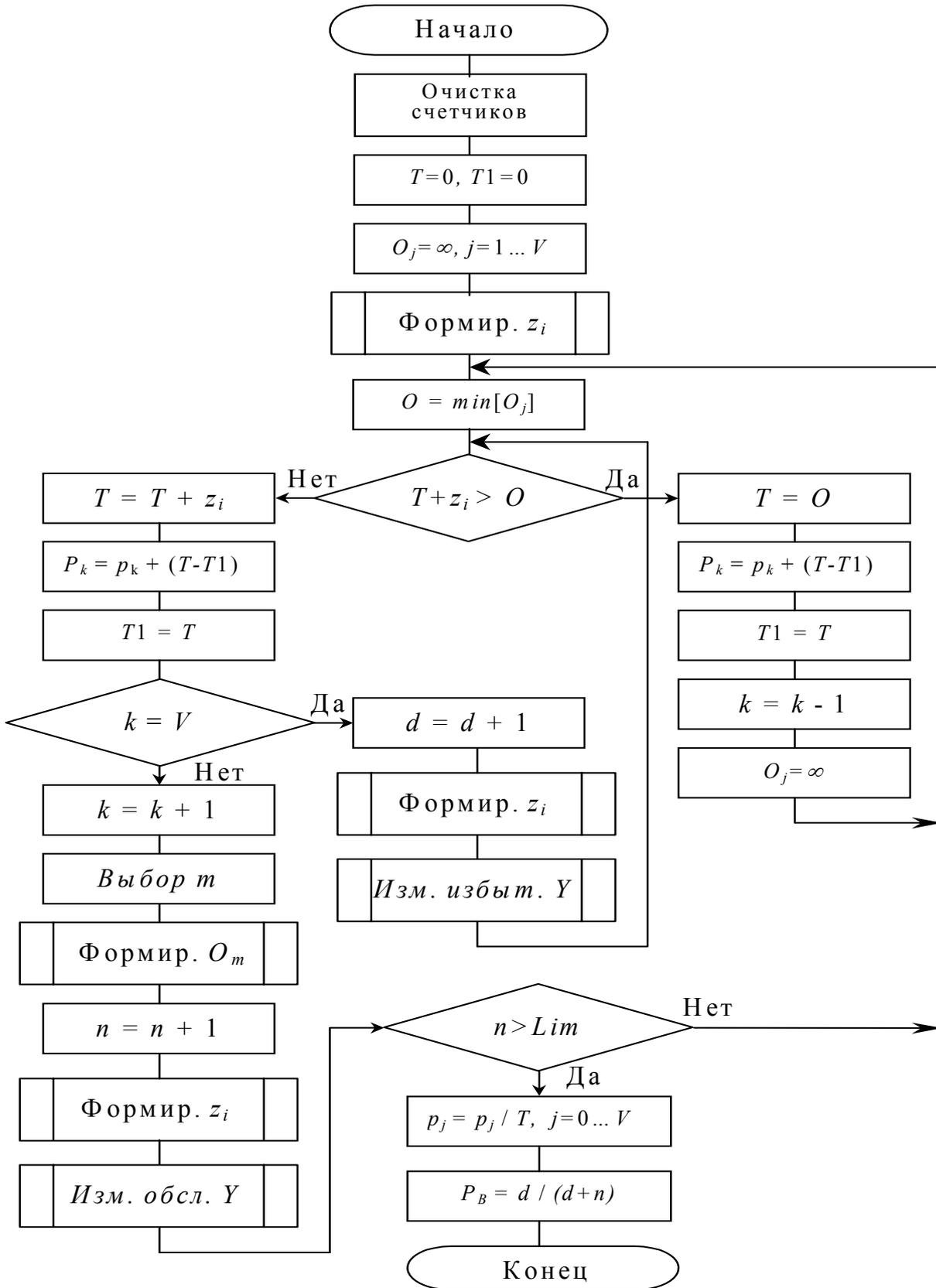


Рисунок 1 – Структурная схема имитационной модели

При наличии в системе свободных каналов ( $k \neq V, k < V$ ) текущее число занятых каналов  $k$  увеличивается на единицу и определяется номер свободного канала  $m$  (по значению « $\infty$ » в закрепленной за ним ячейке). Затем формируется момент будущего освобождения  $m$ -го канала и записывается в его ячейку памяти. Далее счетчик числа обслуженных вызовов  $n$  увеличивается на единицу и формируется момент  $z_{i+1}$  поступления нового вызова. После подпрограммы измерения обслуженной нагрузки выполняется проверка достижения заданного числа обслуженных вызовов  $Lim$  (при моделировании устанавливалось до  $10^7$  вызовов). Если предельное число наблюдаемых вызовов не достигнуто, то осуществляется возврат к оператору поиска минимального из моментов освобождения каналов  $O_j$ . В противном случае производится расчет стационарных вероятностей  $p_k$ , определяемых как доля общего времени  $T$ , в течение которого в системе было занято ровно  $r$  каналов. Для этого накопленные значения счетчиков  $p_k$  делятся на значение таймера общего времени моделирования  $T$ . Вероятность потерь по времени  $P_t$  соответствует доле времени, в течение которого в системе были заняты все  $V$  каналов, или отношению суммарного времени занятия  $V$  каналов за интервал времени наблюдения к длине интервала –  $p_k / T$  при  $k = V$ . Вероятность потерь по вызовам  $P_B$  определяется как отношение числа потерянных вызовов  $d$  к общему числу поступивших вызовов  $d + n$  (потерянных и обслуженных).

Если  $T + z_i > \min[O_j]$ , то очередным событием оказывается завершение начатого обслуживания и освобождение канала  $j$ . Здесь также продвигается таймер текущего времени  $T$ , к счетчику  $p_r$  времени пребывания системы в состоянии с  $r$  занятыми каналами добавляется разность  $T - T_1$  и обновляется значение  $T_1$ . Затем число занятых каналов (число обслуживаемых системой вызовов)  $k$  уменьшается на единицу. В ячейку памяти, закрепленной за освобождаемым каналом  $j$ , записывается «бесконечность» – признак того, что канал свободен. После этого выполняется переход на выбор минимального из моментов освобождения каналов  $O_j$ .

Подпрограммы «измерения» обслуженной, избыточной и поступающей (сумма обслуженной и избыточной) нагрузок и их дисперсии содержат массивы для хранения всех промежутков времени между вызовами и всех длительностей вызовов. Обслуженная нагрузка определяется как отношение суммарного времени занятия всех каналов к общему времени наблюдения. Поступающая нагрузка определяется как отношение среднего времени занятия канала к среднему времени промежутка между двумя вызовами ( $M_t / M_z$ ). Она же определяется и как среднее число вызовов за среднюю длительность занятия канала  $M_t$ . При этом дисперсия нагрузки определяется как дисперсия числа вызовов за  $M_t$  для всех интервалов  $M_t$ , содержащихся в периоде наблюдения.

В соответствии с алгоритмом, представленном на рис. 1, разработана программа имитационного моделирования  $V$ -канальной системы обслуживания потоков вызовов. Она позволяет получать стационарное распределение числа занятых в системе каналов с оценкой количества поступивших, обслуженных и потерянных вызовов (отказов). При этом можно рассчитать вероятности потерь по времени и по вызовам, исследовать высшие моменты поступившей, обслуженной и избыточной нагрузок. В программе имитационного моделирования предусмотрен генератор нескольких видов потоков вызовов с возможностью задания всех требуемых вероятностно-временных характеристик этих потоков. В частности, промежутки времени между вызовами могут иметь показательный (экспоненциальный), гиперэкспоненциальный, комбинированный, равномерный и логарифмически нормальный законы распределения. Длительность обслуживания вызовов может подчиняться показательному, регулярному, равномерному и логарифмически нормальному законам распределения. Число генерируемых вызовов при моделировании может быть в пределах от  $10^5$  до  $10^7$ , а емкость системы обслуживания (число каналов) – может задаваться с шагом «1 канал» от единицы до 1000.

Для проверки корректности построения имитационной модели выполнены следующие тесты:

- проверка «случайности» генератора равномерно распределенных чисел на интервале  $[0, 1]$  (критерий  $\chi^2$  Пирсона) ;
- проверка произвольно распределенных случайных чисел по центральным моментам распределения, коэффициентам асимметрии и эксцесса.

Кроме того, проведено испытание имитационной модели на получение заведомо известных результатов. Для этого генерировался простейший поток вызовов (экспоненциальное распределение промежутков между вызовами) и получаемые значения вероятности потерь по времени и по вызовам сравнивались с рассчитанными по формуле Эрланга значениями. Проверка в широком диапазоне задаваемых нагрузок  $\Lambda$  и емкости пучка каналов  $V$  показала, что отклонения получаемых значений от расчетных не превысили 5% ни в одном из опытов при значениях  $V > \Lambda$ , и 0,5% – при значениях  $V < \Lambda$ .

После проверки и тестирования разработанных алгоритма и программы имитационного моделирования произведена серия опытов. Целью моделирования является получения статистических оценок вероятностных характеристик процесса обслуживания потока вызовов при различных значениях дисперсии нагрузки. Кроме того, исследована зависимость этих вероятностных характеристик от вида закона распределения длительности обслуживания (ЗРДО).

На рис. 2 показаны графики, иллюстрирующие величину ошибки МЭЗ в зависимости от величины нагрузки  $R$  для случая 10-канальной системы и коэффициента скученности (отношение дисперсии к среднему)  $V/R = 2$ .

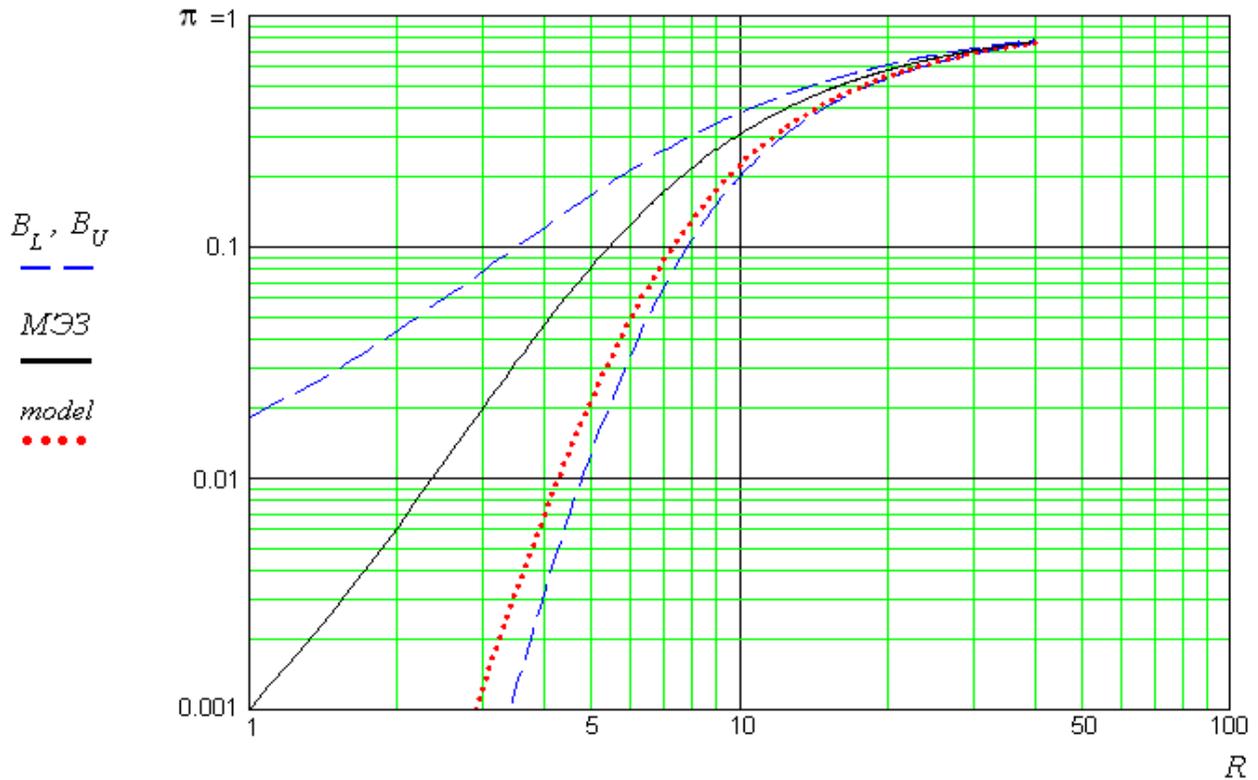


Рисунок 2 – Зависимость вероятности потерь  $\pi$  от интенсивности  $R$

Сплошной линией показаны значения вероятности потерь, рассчитанные методом эквивалентных замен. Штриховыми линиями указаны верхняя  $B_U$  и нижняя  $B_L$  границы области возможных значений вероятности потерь, рассчитанные по формулам, предложенным в [8, стр. 82]. Пунктирной линией показаны значения вероятностей, полученные автором путем статистического моделирования реального процесса обслуживания вызовов при тех же условиях ( $N = 10, V/R = 2$ ). Как видно из рисунка, величина ошибки МЭЗ весьма существенна. Например, при  $R = 2$  вероятность потерь, полученная при моделировании, составила 0,001, а расчетное значение  $\pi = 0,02$  – расхождение в 20 раз.

На рис. 3 приведены графики зависимости вероятности потерь от емкости пучка каналов  $V$  для интенсивности нагрузки  $\Lambda = 100$  Эрл и дисперсии  $D = 800$ , что соответствует коэффициенту скученности  $S = 8$ . При этом расчетное значение нагрузка  $Y_p = 119$  Эрл.

Сплошная кривая  $E_v$  представляет зависимость потерь вызовов  $P_B$  от  $V$ , рассчитанных по формуле Эрланга, а пунктирная – по той же формуле, но с подстановкой расчетного значения нагрузки  $Y_p$ .

По итогам моделирования определено, что вероятность потерь зависит не только от дисперсии интенсивности нагрузки, но и от закона распределения длительности обслуживания вызовов. Результаты моделирования, представленные штриховыми линиями 1, 2, 3 и 4, демонстрируют зависимость вероятности потерь от емкости пучка каналов при регулярном, равномерном, экспоненциальном и логарифмически нормальном ЗРДО соответственно.

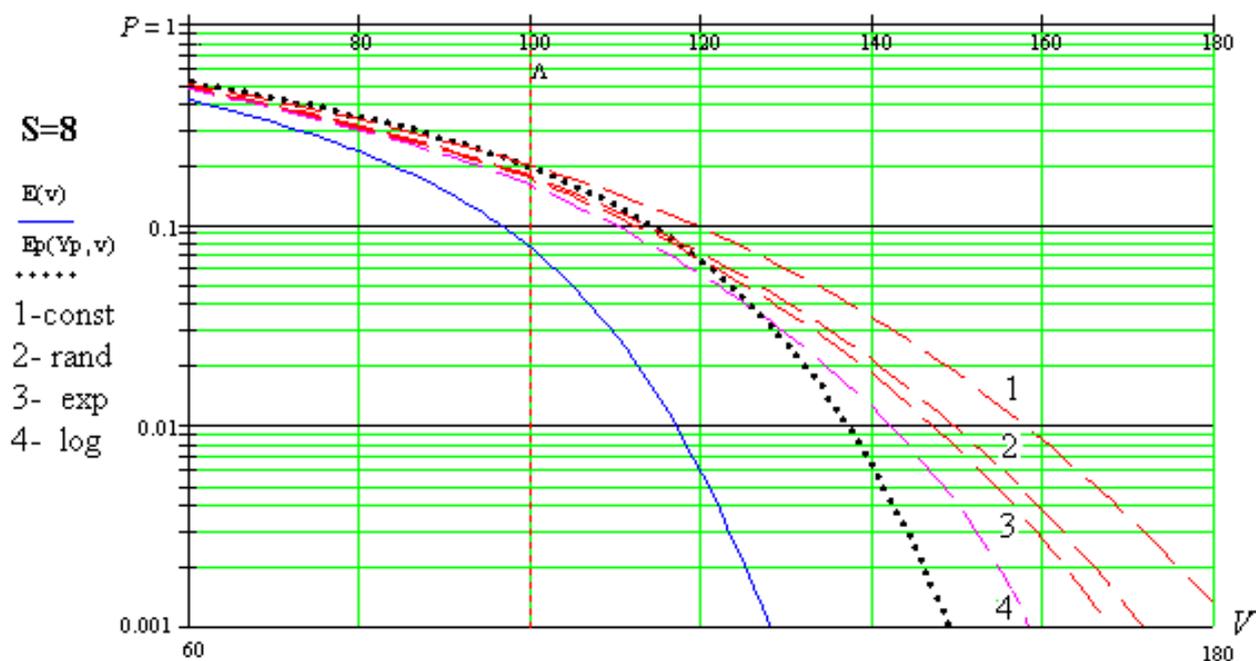


Рисунок 3 – Зависимость  $P_B$  от вида ЗРДО и дисперсии нагрузки

Неудовлетворенность результатами вычислений методом расчетной нагрузки заставляет по итогам реальных исследований корректировать значения  $Y_p$  с целью более адекватного описания колебаний нагрузки и, соответственно, более точного расчета телекоммуникационных систем [5, стр. 49]. Однако, увеличение (уменьшение) величины расчетной нагрузки пропорционально ее дисперсии приводит лишь к сдвигу вправо (влево) пунктирного графика зависимости вероятности потерь (рис. 3). Реально зависимость вероятности потерь от дисперсии нагрузки и ЗРДО принципиально иная, чем предполагает метод расчетной нагрузки – графики становятся более пологими, например, кривая 1. Вычисления методом расчетной нагрузки приводят к существенным ошибкам. Например, в результате моделирования при  $S = 8$ ,  $\Lambda = 100$  Эрл и  $V = 145$  вероятность потерь  $P_B$  несколько больше 0,010, а вычисленная методом расчетной нагрузки вероятность  $\approx 0,002$  – расхождение в 5 раз. Поэтому никакое уточнение вышеупомянутой «расчетной нагрузки» не улучшит точность расчета.

Результаты моделирования показали, что при обслуживании полнодоступной системой с явными потерями потока вызовов с  $S > 1$  потери по вызовам выше потерь по времени, а при  $S < 1$  – имеет место обратное соотношение.

В настоящее время не существует точных методов расчета полнодоступного пучка каналов с учетом реальной дисперсии нагрузки. В основном все формулы расчета вероятностных характеристик систем распределения информации получены для простейшего потока вызовов. В работе показано, что методы эквивалентных замен и расчетной нагрузки не соответствуют реальному характеру зависимости вероятности потерь от дисперсии нагрузки.

Когда классическое решение задачи невозможно, необходимо использовать моделирование исследуемого процесса. На основе анализа способов имитационного моделирования систем телеграфика выбран путь моделирования истинного процесса обслуживания потоков вызовов. Это позволяет исследовать не только зависимость вероятности потерь от дисперсии нагрузки, но и от вида закона распределения длительности обслуживания.

В [9] предложен метод расчета вероятности занятия всех каналов полнодоступного пучка, учитывающий дисперсию нагрузки. Вероятность занятия всех каналов системы определяет долю времени, в течение которого существует потенциальная возможность потери вызова. Но она численно совпадает с вероятностью потери вызова лишь в случае равенства математического ожидания и дисперсии нагрузки. С ростом дисперсии процесс обслуживания вызовов становится сложнее и аналитически определить соотношение между вышеупомянутыми потерями по времени и по вызовам пока не удастся. В этом случае функциональную связь между ними можно установить с помощью имитационного моделирования, что позволит найти искомую вероятность потери вызова.

**Литература**

1. *Ложковский А.Г.* Исследование параметров телефонной нагрузки на сотовой сети мобильной радиосвязи // *Праці УНДІРТ.* – 2001. – №3. – 10–14с.
2. *Ложковский А.Г., Захарченко Н.В., Горохов С.М.* Экспериментальная оценка модели потока вызовов на современных телефонных сетях. // *Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова.* – 2001. – №2, – 40–43 с.
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. – 432 с., ил.
4. *Ложковский А.Г.* Исследование нестационарного потока вызовов телекоммуникационной сети. // *Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова.* – 2002. – №3.
5. Теория телефонных и телеграфных сообщений / *Лившиц Б.С.* и др. – М.: Связь, 1971. – 304 с., ил.
6. *Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л.* Теория распределения информации: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и Связь, 1985. – 184 с., ил.
7. *Дырда В.Ю., Дырда О.В.* Щодо побудови ефективних генераторів псевдовипадкових чисел // *Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова.* – 2002. – №1. – 71 с.
8. *Шнепс М.А.* Системы распределения информации. Методы расчета: Справ. пособие. – М.: Связь, 1979. – 344 с., ил.
9. *Ложковський А.Г.* Розрахунок імовірності втрат у випадку нормального розподілу числа зайнятих каналів. – К.: Зв'язок. – №3, 2003.