

**КРИВА ПЕРЕМІКАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУЮЧИХ ЗБУДЖЕНЬ
ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ СПОСІБ ПОБУДОВИ ФАЗОВИХ ПОРТРЕТІВ
КОНСЕРВАТИВНИМИ ОБ'ЄКТАМИ**

**CURVE OF SWITCHING PERIODIC EXCITATIONS AFTER THE MANAGER'S
FAST-ACTING OF AND GEOMETRICAL METHOD OF PHASE PORTRAITS
CONSTRUCTION BY THE CONSERVATIVE OBJECTS**

Анотація. Розглянуто існування кривої граничного перемикання періодичними оптимальними за швидкодією керуючими збудженнями та геометричний спосіб подальшого продовження фазових портретів консервативними об'єктами.

Summary. Curve's existence of the maximum switching by the periodic optimum handling excitations after fast-acting and geometrical method of subsequent continuation of phase portraits by the conservative objects is considered.

Проблеми теорії оптимальних управлінь об'єктами в техніці зв'язку [1, 2] з важливішими науковими проблемами достатньо відомі [3-5].

Відомі змісти термінів граничний цикл та замкнута крива граничного циклу (ЗКГЦ) фазового простору об'єкта керування. Порівняємо їх з термінами об'єктів з періодичними по фазовій координаті керуючими збудженнями. Поняття граничний цикл увів французький математик А. Пуанкаре. Метод фазового простору був створений і розвинений О.О. Андроном і його учнями [5].

О.О. Андронов [5] виділяв два етапи розвитку взаємозв'язку нелінійних задач теорії коливань з працями А. Пуанкаре і О. Ляпунова: до і після установаження такого взаємозв'язку. Математичною базою першого етапу була теорія диференційних рівнянь, а другого – теорія граничних циклів. Остання теорія разом з методами малого параметра, послідовних наближень, гармонічної лінеаризації, повільно змінюючих амплітуд дозволила спрощення рішення цілого ряду нових задач теорії автоколивань.

Разом з цим багато задач цього класу до сьогодні залишились недослідженими у різних областях науки і техніки. До них, зокрема, відносяться задачі, розв'язання яких потребує розв'язку неоднорідних диференційних рівнянь з періодичними не тільки фазовими координатами, а і з періодичними (не тільки від часу, а і від фазових координат) правими частинами, звичайно в техніці відображаючи вплив керуючого середовища.

Прикладами таких об'єктів управління є ведені пристрої синхронізації інформаційних мереж та інфраструктур.

Проблема побудови оптимального за швидкодією керуючого збудження веденими пристроями синхронізації з фазовим автопідстроюванням частоти як консервативного об'єкта з періодичним збудженням, яке залежить від фазової похибки з урахуванням двох параметрів керування – власне періодичності по позиційному члену матмоделі і його періоду.

В даній статті розглядається існування кривої граничних перемикань періодичними оптимальними за швидкодією керуючих збуджень та геометричний спосіб продовження фазових портретів консервативними об'єктами.

1. Існування кривої граничного перемикання оптимальних за швидкодією періодичних керуючих збуджень консервативним об'єктом. Математичну модель системи консервативних об'єктів виразимо диференційним рівнянням другого порядку з неоднорідним у правій частині керуючим збудженням [2]:

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{T_{\text{ФНЧ}}} \cdot \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{b_0 b_1}{T_{\text{ФНЧ}}^2} \cdot U_{\text{ФД}} \cdot F[x(\tau) + nT_x], n = \overline{-\infty, +\infty}, \quad (1)$$

де $x(\tau)$ – періодична фазова похибка об'єкта керування (періодична координата – позиційний член рівняння); $T_{\text{ФНЧ}}$ – фільтр нижніх частот; $b_0 b_1$ – константи; $U_{\text{ФД}}$ – амплітуда фазового детектора; T_x – період керуючого збудження на виході фазового детектора; $F[x(\tau) + nT_x]$ – періодична керуюча збудженість у функції фазової координати; τ – незалежна змінна (час).

Уведемо масштабні перетворення

$$\varphi(t) = \frac{1}{b_0 b_1 T_{\text{ФНЧ}}} \cdot x(\tau); t = \frac{\tau}{T_{\text{ФНЧ}}}, \quad (2)$$

то рівняння (1) еквівалентно, отримаємо:

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} = F[\varphi(t) + nT_\varphi], n = \overline{-\infty, +\infty}. \quad (3)$$

В оптимальних за швидкодією об'єктах [2-5] керуюче збудження дорівнюватиме на півперіоді T_φ : $F(\varphi) = U = +1$, або $F(\varphi) = U = -1$, або навпаки, а

$$F[\varphi(t) + nT_\varphi] = s \operatorname{ign} \sin [\varphi(t) + nT_\varphi], n = \overline{-\infty, +\infty}. \quad (4)$$

Уведемо рівняння на площині φ, ω . Дано рівняння (3) в системі:

$$\begin{cases} \frac{d(\varphi - U)}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -(\varphi - U), \end{cases} \quad (5)$$

де $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Виключимо час із рівняння (5), отримаємо:

$$-(\varphi - U) \cdot d(\varphi - U) = \omega d\omega. \quad (6)$$

Проінтегруємо рівняння (6), тоді отримаємо рівняння фазової траєкторії на площині φ, ω :

$$[\varphi(t) - U]^2 + [\omega(t)]^2 = R^2, \quad (7)$$

де R – постійна інтегрування, яка дорівнює:

$$R^2 = \frac{(\Phi_{\text{ЗК}} - U)^2 + \Omega_{\text{ЗК}}^2}{2}, \quad (8)$$

де Φ, Ω – постійні значення, наприклад $\Phi_{\text{ЗК}}, \Omega_{\text{ЗК}}$ – точки ЗКГЦ, які представляють собою примусові коливання за рахунок керуючого збудження в стаціонарному режимі.

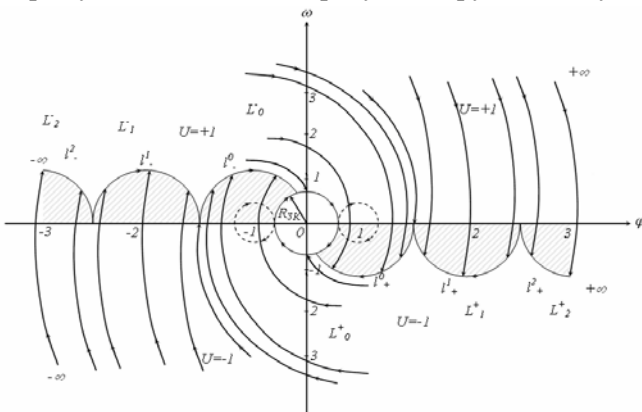


Рисунок 1– Оптимальна крива перемикання періодичного керуючого збудження типу $L^0 = l_+^0 \cup K \cup l_-^0 = K$ і продовженої

$$\text{до } L = \left[U l_+^S \right] \cup \left[U l_-^S \right]$$

замкнута крива граничного циклу (ЗКГЦ) є коло. В кожному із сімейств є по одній фазовій траєкторії, відбиваюча точка яких закінчується в одній із точок ЗКГЦ площини φ, ω кола з координатами $O_1(1,0)$ і $O_{-1}(-1,0)$. Поєднання координатами цих кіл з координатами кола ЗКГЦ на всій ω . Позначимо їх символами l_+^0 при $U = +1$ і l_-^0 при $U = -1$. Об'єднання кривих l_+^0 і l_-^0 складає рівняння кривої перемикання періодичних керуючих збуджень аналітичної фамільної пари $L^0 = l_+^0 \cup K \cup l_-^0 = K$. Доведемо існування рівняння кривої перемикання періодичних керуючих збуджень.

Теорема 1. Для рівняння кривої перемикання періодичних керуючих збуджень у функції фазової координати $u(\varphi) = U \times F(\varphi + n \times T_\varphi), \forall$

$n = \overline{-\infty, +\infty}$ і представляють дві примусові траєкторії з оптимальними за швидкодією значеннями $U = +1$ або $U = -1$ від початку фазової площини φ, ω до простої замкнутої кривої граничного циклу є існуючою аналітичною фамільною парою $L^0 = l_+^0 \cup K \cup l_-^0 = K$.

Доведення теореми 1. Геометричний спосіб доказу оптимальним за швидкодією примусовим траєкторіям на фазовій площині об'єкта керування відповідають криві, які складають сімейства від періодичних керуючих збуджень $U = \pm 1$ (див. рис. 1). K – проста

На правому боці коло другого квадранта з координатами $O_{+1}(+1, 0)$ $U = +1$ проходить за часовою стрілкою і переходить швидкість відбиваючої точки до точок ЗКГЦ менше ніж π часових одиниць. Звідси протиріччя вимог необхідних умов, згідно з якими швидкість оптимального за швидкодією керування не може залишатися менше π часових одиниць. Таким чином, коло в першому квадранті не може бути частиною кривої перемикавання керуючих збуджень до точок ЗКГЦ.

У другому квадранті частина половинної дуги з координатами кола $O_{+1}(+1, 0)$ з $U = +1$ проходить за часовою стрілкою і переходить відбиваючу точку до точок ЗКГЦ рівно за π часових одиниць. Таким чином, коло в цьому квадранті є можливою частиною кривої перемикавання керуючих збуджень до точок ЗКГЦ.

У третьому квадранті частина половинної дуги з координатами кола $O_{-1}(-1, 0)$ із $U = -1$ проходить мимо за часовою стрілкою від точок ЗКГЦ, що не є можливою частиною кривої перемикавання керуючих збуджень до точок ЗКГЦ.

В четвертому квадранті частина половинної дуги проходить за часовою стрілкою і переходять відбиваючу точку до точок ЗКГЦ рівно за π часових одиниць. Таким чином, є можливою частиною кривої перемикавання керуючих збуджень до точок ЗКГЦ.

Результати висновків свідчать, що частини кривих перемикавання керуючих збуджень до точок ЗКГЦ є частина половини дуги кола I_+^0 з координатами кола $O_{+1}(+1, 0)$ з $U = +1$ у другому квадранті та частина половини дуги кола I_-^0 з координатами кола $O_{-1}(-1, 0)$ з $U = -1$ – у четвертому квадранті.

Траєкторії з координатами кола $O_{+1}(+1, 0)$ з $U = +1$ заключаються за часовою стрілкою на половині дуги у першому квадранті на точках ЗКГЦ. Це є частиною кривих перемикавання керуючих збуджень. Траєкторії з координатами кола $O_{+1}(+1, 0)$ з $U = -1$ заключаються за часовою стрілкою на половині дуги в третьому квадранті на точках ЗКГЦ. Це є також частиною кривої перемикавання керуючих збуджень.

Доведемо, що інші траєкторії, які виходять із кола $O_{+1}(+1, 0)$ і $O_{-1}(-1, 0)$ більші за радіус $(R - R_{зк})$, будуть нескінченними по відношенню до ЗКГЦ, оптимального за швидкодією керуючого збудження.

Таким чином, оптимальна за швидкодією крива перемикавання керуючих збуджень буде до ЗКГЦ існуючою і зводиться до чверті кола ЗКГЦ в першому квадранті площини φ, ω від кола з координатами $O_{-1}(-1, 0)$; частини дуги кола з координатами $O_{-1}(-1, 0)$ в другому квадранті; чверті кола ЗКГЦ у третьому квадранті від кола з координатами $O_{+1}(+1, 0)$; частини дуги кола з координатами $O_{+1}(+1, 0)$ у четвертому квадранті, а саме:

$$L^0 = I_+^0 \cup K \cup I_-^0 = K. \quad (9)$$

Теорема доведена.

Наслідок 1. Частина кривої перемикавання оптимальних за швидкодією керуючих збуджень I_+^0 або I_-^0 є геометричне місце точок на фазовій площині φ, ω , які можуть бути переведені в точку ЗКГЦ з координатами $\Phi_{зк}, \Omega_{зк}$ з довжиною керуючого збудження $U = +1$ або $U = -1$:

$$I_{\pm}^0(I_{\pm}^+) = \{(\varphi, \omega) : (\varphi \pm 1)^2 + \omega^2 = 1, \omega \neq \pi_0^0\}. \quad (10)$$

Наслідок 2. Довжина дуги менше різниці $(\pi R - \pi R_{зк})$, то будь-яку відбиваючу точку ЗКГЦ при оптимальних за швидкодією керуваннях $U = +1$ або $U = -1$ не більше π числових одиниць. Ця множина є геометричне місце точок, які існують при $U = +1$ для I_0^+ або $\omega > 0$ при $U = -1$ для I_0^- .

Наслідок 3. Крива L_+^1 або L_-^1 є множиною станів, які можливо перевести відбиваючі точки півдуги I_0^+ або I_0^- оптимальним за швидкодією керуванням $U = -1$ або $U = +1$ до кривої перемикавання L_0 максимум за π часових одиниць. Крива L_-^1 або L_+^1 складається із дуг кіл з центрами $O(-1, 0)$ або $O(+1, 0)$ довжиною π , які закінчуються в точках кривої λ_0^- або I_0^+ , як це показано на рис. 1.

Наслідок 4. Крива I_0^+ або I_0^- є множиною станів, які можливо перевести в точки ділянки кривої перемикавання I_0^+ або I_0^- керуванням $U = -1$ або $U = +1$ за тривалість, що дорівнює π . Вона складається із дуг півкіл з центром у точці $(-2S - 1, 0)$ або $(+2S + 1, 0)$ $S = 1$ і є півколом одиничного радіуса кола, який дорівнює $(-2S - 1)$ або $(+2S + 1)$, $S = 1$ і розміщена при $\omega > 0$ або $\omega < 0$:

$$I_{\pm}^1(I_{\pm}^+) = \{(\varphi, \omega) : (\varphi \pm 3)^2 + \omega^2 = 1, \omega \neq \pi_0^0\}. \quad (11)$$

Наслідок 5. Крива перемикання періодичних оптимальних за швидкістю керуючих збуджень навколо ЗКГЦ вигляду (9) має один інтервал оптимального руху (половина дуги з радіусом кола $R_{ЗК}$ довжиною $\pi/2$ у квадранті I і III) і два інтервали оптимального руху в секторах дуг кіл з центрами $O_{+1}(+1, 0)$ і $O_{-1}(-1, 0)$.

2. Аналітичний і геометричний спосіб побудови фазового портрету консервативного керування періодичного керуючого збудження. Як раніше зазначалося, що оптимальна за швидкістю періодична крива перемикання збудження обмежена довжиною не більше π секторів кіл з центрами $O_{+1}(+1,0)$ і $O_{-1}(-1,0)$ біля центра кола діаметром на початку координат фазової площини φ, ω . З метою розширення кривої перемикання керування слід продовжити її у вигляді зліва і справа секторами півкіл, які є тільки перемикання керуючих збуджень згідно з динамікою періодичності (див. рис. 1 і 2).

Аналітичний спосіб побудови алгоритму кривої перемикання керуючих збуджень. Припустимо, що множини L_-^s і L_+^s (де $s = 1, 2, \dots$ – це множина станів), які можуть перевести відбиваючу точку максимум за час π з керуваннями $u = -1$ і $u = +1$ в точки відповідно до кривих l_+^{s-1} і l_-^{s-1} :

$$l_+^s = \{(x_1, x_2) : [x_1 - (2s+1)]^2 + (x_2)^2 = 1\}; x_2 > 0, \quad (12)$$

$$l_-^s = \{(x_1, x_2) : [x_1 + (2s+1)]^2 + (x_2)^2 = 1\}; x_2 < 0. \quad (13)$$

Із виразів (12) і (13) легко отримати алгоритм побудови лінії перемикання: якщо крива l_+^s і l_-^s – це геометричне місце станів, які можуть перевести за π с в точки кривих l_+^{s-1} і l_-^s при керуванні відповідно $U = -1$ та $U = +1$, то точки кривих l_+^{s-1} та l_-^s потрібно повернути відповідно біля центра $(-1, 0)$, а l_-^s біля центра $(+1, 0)$ на кут, що дорівнює 180° .

Геометрична побудова фазового портрета консервативного об'єкта керування періодичною оптимальною за швидкістю керуючого збудження зводиться до наступного.

1. На заключному інтервалі оптимального за швидкістю руху ВТ рухається по півколу l_+^0 з координатами центра $(+1, 0)$ лінії перемикання при $U = +1$ до точки з перетином замкненої кривої лінії перемикання, тобто вона знаходиться на відріжку дуги АК, довжина якої менша довжини півкола.

2. В положення точки А відбиваючої точки потрапляє на лінію перемикання l_+^0 з фазової траєкторії півкола ВА під впливом керування $U = -1$ з координатами центра $(-1, 0)$. Дуга ВА дорівнює півколу з координатами центра $(-1, 0)$ і радіусом, який дорівнює довжині між координатами цього центра і точки А. Проводимо дугу ВА.

3. На перетині дуги ВА з перетином продовження лінії перемикання з півколом з координатами $(5,0)$ l_+^2 отримаємо точку С. Дуга ВС дорівнює півколу з центром з координатами $(+1,0)$ і радіусом, який дорівнює довжині між координатами цього центра і точки В. Проводимо дугу ВС.

4. Припис п.3 повторюється до перетину лінії відбиваючої точки з координатами $D(\Phi_{10}, \Omega_{20})$. Таким чином, отримаємо оптимальну траєкторію ABCD.

5. Фазова траєкторія, яка на заключному інтервалі оптимального за швидкістю руху відповідає руху по l_-^0 з координатами центра $(-1,0)$ лінії перемикання при $U = -1$ до точки з перетином ЗКГЦ, будується з використанням методу інверсій за процедурою, яка описана вище. Таким чином, отримаємо оптимальну фазову траєкторію $A^1B^1C^1D^1$.

6. Аналогічним чином точки D і D^1 можна переводити до ЗКГЦ з координатами Φ_{10}, Ω_{20} і $\Phi_{10}^1, \Omega_{20}^1$ навіть до нескінченності. Об'єднання отриманих дуг у принципі нескінченного числа половин радіусів, що дорівнюють l зліва і справа лінії перемикання, складають продовжену лінію перемикання керуючого збудження:

$$+\infty K l_+^2 \cup l_+^1 \cup l_+^0 \text{ (відрізок дуги АК)} \cup l_-^0 \text{ (відрізок дуги } K^1 A^1) \cup l_-^1 \cup l_-^2 K + \infty \quad (14)$$

за умови, якщо початкові координати відбиваючої точки вище зазначеної кривої, рухаються під впливом керування $U = -1$ до тих пір, доки вона не попаде на дугу лінії перемикання L_+^0 в точці А і по ній на відрізок дуги АК на точку К ЗКГЦ, причому в точках $(+\infty \dots B)$ керування перемикається з $U = +1$ на $U = -1$ і рух буде здійснюватись вище продовженої лінії перемикання (14) по дугах $+\infty \dots BA$.

В момент попадання ВТ в точки $+\infty \dots C$ і А керування переключить свій знак з $U = -1$ на $U = +1$ і рух буде здійснюватися нижче продовженої лінії перемикання (14) по дугах $+\infty \dots CB$, АК.

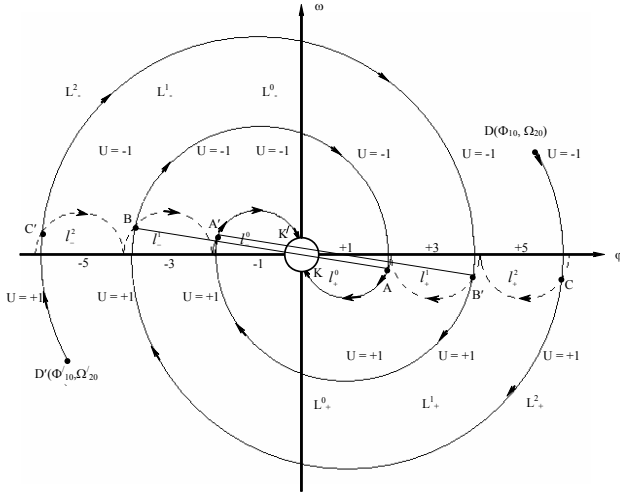


Рисунок 2 – Картина фазових траєкторій консервативного об’єкта періодичного оптимального за швидкодією керуючого збудження

7. Аналогічним чином ВТ з початковими координатами нижче кривої (14) керування буде здійснюватись з $U = +1$, а вище $-U = -1$. Перемикання керування буде виконуватись в точках $+\infty \dots C^1 B^1$ з $U = +1$ на $U = -1$ з рухом по дугах $+\infty \dots C^1 B^1$, $A^1 K^1$; а в точках $+\infty \dots B^1 A^1$ з $U = +1$ на $U = -1$ з рухом по дугах $+\infty \dots B^1 A^1$.

Як підсумок сказаного вище на рис. 2 представлені дві оптимальні за швидкодією фазові траєкторії DCBAK і $D^1 C^1 B^1 A^1 K^1$ відбиваюча точка з координатами відповідно $D(\Phi_{10}, \Omega_{20})$ і $D(\Phi_{10}^1, \Omega_{20}^1)$ до точок К і K^1 , що розміщені на ЗКГЦ. Зазначені фазові траєкторії є оптимальними і єдиними.

Цей алгоритм побудови лінії перемикання керування консервативним КОУ показано на рис. 2. Траєкторію лінії перемикання можна представити наступним співвідношенням:

$$l = \begin{bmatrix} \infty \\ U \\ s=0 \end{bmatrix} I_+^s \begin{bmatrix} \infty \\ U \\ s=0 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} \infty \\ U \\ s=0 \end{bmatrix} I_-^s = l_+ Y l_- \quad (15)$$

Множини точок

$$\begin{cases} L_- = \bigcup_{s=0}^{\infty} L_-^s, \\ L_+ = \bigcup_{s=0}^{\infty} L_+^s \end{cases} \quad (16)$$

будуть розміщуватись відповідно вище і нижче від лінії перемикання.

3. Число перемикань періодичними керуючими збудженнями консервативними об’єктами. Теорема 2. Припустимо, що періодична керування за швидкодією $u(\varphi)$ консервативним об’єктом існує. Тоді число перемикань для оптимальних за швидкодією керуючого збудження на консервативний об’єкт з функцією фазової координати повинна складати S переключень.

Доказом теореми 2 є вимірня формула

$$S = 1 + \frac{\Phi_0}{4U}, \quad (17)$$

де піврадіуса $\Phi_0 = \Phi_0'$ зверху від кривої L_-^1 центра кола $O_{-1}(-U, 0)$ або $\Phi_0 = \Phi_0''$ знизу від кривої L_+^1 центра кола $O_{+1}(-U, 0)$ від кривої переключення L_0 керуючого збудження U в масштабі радіуса кола $O_{-1}(-U, 0)$ ліворуч $O_{-1} \Phi_0'$ або $O_{+1}(-U, 0)$ праворуч O_{+1} в рамках виміру фази φ . Дрібна частина $\frac{\Phi_0}{4U}$ кола наближається до 1.

В результаті основних результатів і висновків отримано існування кривої граничних переключень періодичними оптимальними за швидкодією консервативними об’єктами показано, що

вона є аналітичною фамільною парою $L^0 = l_+^0 \cup K \cup l_-^0 = K$ (теорема 1). Побудована аналітична і геометричний фазовий портрет на осі площини φ, ω .

Доведено число переключень періодичними керуючими збудженнями консервативного об'єкта, яка складає кінцеве значення від початкової координати відбиваючої точки (теорема 2).

Література

1. Борщ В.И., Вивчарюк А.В., Коваль В.В. Р-системы научное направление разработки и исследования средств автоматизации систем и сетей связи // Информатика и связь. – 1996, – №1. – 156 с.
2. Тактовая синхронизация в интегральных цифровых сетях связи / В.И. Борщ, В.П. Гайдар, В.В. Коваль, И.П. Лесовой. – К.: Наукова думка, 1998. – 202 с.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1966. – 390 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1966. – 384 с.
5. Репников А.В. Колебания в оптимальных системах автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1968. – 239 с.
6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физмат., 1959. – 568 с.
7. Теоретическое решение оптимальных по быстродействию колебательных объектов с периодическим по фазовой координате управлением / В.И. Борщ, С.Д. Карош, В.В. Коваль, Е.И. Коршун, Б.Я. Костик, Ю.Г. Туманов // Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова, 2005. – С. 355-357.