РАДІОТЕХНІКА І ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 621.371

Иваницкий А.М.
Ivanitckiy A.M.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ЭКСПОФУНКЦИОНАЛЬНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

ENERGETICAL PROPERTIES OF ELECTROMAGNETIC FIELD WITH THE EXPOFUNCTIONAL EXCITATION

Аннотация. Найдена новая форма уравнения баланса мгновенных значений мощности электромагнитного поля, с помощью которой проанализированы энергетические свойства этого поля.

Summary. New form of the balance equation of the power istantaneous significance of electromagnetic field is found with which energetical properties this field are analysed.

При решении проблемы компенсации поглощения радиосигнала в среде распространения большую роль играют исследования энергетических свойств электромагнитного поля. Решение указанной выше проблемы важно для повышения надежности радиосвязи.

В классической электродинамике исследования энергетических свойств электромагнитного поля осуществляют с помощью уравнений баланса мгновенных значений мощности электромагнитного поля, т.е. с помощью теоремы Умова-Пойнтинга, и с помощью уравнений баланса комплексной мощности (см., например, [1]). Для более детальных исследований в уравнении баланса комплексной мощности вместо вещественной частоты применяют комплексную частоту [2, 3]. Этот искусственный прием, как назвал такую замену Л.А. Вайнштейн [2], в общем случае описания сред приводит к неправильным формулам, но для сред, в которых отсутствует дисперсия проницаемостей, этот прием по существу является аналогом обобщенного символического метода анализа электрических цепей [4, 5]. При условии экспофункционального возбуждения электромагнитного поля энергетические свойства поля по-прежнему можно определить с помощью теоремы Умова-Пойнтинга [6]. Однако исследование энергетических свойств электромагнитного поля при экспофункциональном возбуждении только намечено. Поэтому целью данной статьи является изучение энергетических свойств электромагнитного поля при экспофункциональном возбуждении более полно.

Для достижения цели необходимо доказать теорему Умова-Пойнтинга, содержащую мощность потерь, которые обусловлены следующими факторами: токами проводимости, высокочастотным диэлектрическим гистерезисом [2], линейным магнитным гистерезисом [2], явлением возникновения направленных потоков электрических и магнитных монополей в экспофункциональном поле [6, 7].

Прежде всего найдем взаимосвязь между вектором электрической индукции $\overline{D}$ и вектором напряженности электрического поля $\overline{E}$ во временной области, учитывая запаздывание по фазе вектора $\overline{D}$ относительно вектора $\overline{E}$. Для комплексных векторов $\dot{\overline{D}}$ и $\dot{\overline{E}}$ эта взаимосвязь имеет вид [1]:

$$\dot{\overline{D}} = \varepsilon_0 \dot{\varepsilon} \dot{\overline{E}}, \tag{1}$$

где ε_0 – электрическая постоянная; $\dot{\varepsilon}$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость среды, которая равна

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'', \tag{2}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Мнимая составляющая $\dot{\varepsilon}$ появляется в связи с поляризацией среды. Например, для среды с ориентационной поляризацией ε' и ε'' можно рассчитать по формулам Дебая [8]:

$$\varepsilon' = \varepsilon_{в} + \frac{\varepsilon_{н} - \varepsilon_{в}}{1 + \omega^2 \tau^2}, \tag{3}$$

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_{н} - \varepsilon_{в})\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \tag{4}$$

где ω – круговая частота гармонического колебания; τ – время релаксации поляризации диэлектрика; $\varepsilon_{н}$ – значение ε' для низких частот ($\tau << T = 2\pi/\omega$); $\varepsilon_{в}$ – значение ε' для высоких частот ($\tau >> T$).

Подставив значения (3) и (4) в формулу (2), а полученное выражение в соотношение (1), найдем

$$\dot{\overline{D}} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_{\text{в}} + \frac{\varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{в}}}{1+\omega^2\tau^2} - i\omega\frac{(\varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{в}})\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right)\dot{\overline{E}}\,. \tag{5}$$

Это выражение для диапазона частот, когда выполняется условие $\omega^2\tau^2 << 1$, имеет вид

$$\dot{\overline{D}} \cong \varepsilon_0\varepsilon_{\text{н}}\dot{\overline{E}} - i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{в}})\tau\dot{\overline{E}}\,. \tag{6}$$

Учитывая, что при применении символического метода [1] дифференциальный оператор $\partial/\partial t$ заменяется умножением функции на $i\omega$, то выражение (6) соответствует равенству во временной форме

$$\overline{D} \cong \varepsilon_0\varepsilon_{\text{н}}\overline{E} - \varepsilon_0(\varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{в}})\tau\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\,. \tag{7}$$

Из равенств (3) и (4) видно, что для случая $\omega^2\tau^2 << 1$:

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\text{н}}\,, \tag{8}$$

$$\frac{\varepsilon''}{\omega} = (\varepsilon_{\text{н}} - \varepsilon_{\text{в}})\tau = \text{const}\,, \tag{9}$$

т.е. в области нижней части диапазона частот ε' = const, а ε'' – пропорционально увеличивается с увеличением частоты. Приблизительно такая же зависимость от частоты ω величин ε' и ε'' на нижних частотах сохраняется и для общего случая поляризации [8].

На основании равенств (7), (8) и (9) выражение во временной области для общего случая поляризации имеет вид

$$\overline{D} = \varepsilon_0\varepsilon'\,\overline{E} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon''}{\omega}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \varepsilon_{\text{a}}'\overline{E} - \frac{\varepsilon_a''}{\omega}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\,, \tag{10}$$

где $\varepsilon_{\text{a}}' = \varepsilon_0\varepsilon'$ и $\varepsilon_{\text{a}}'' = \varepsilon_0\varepsilon''$ – вещественная и мнимая часть соответственно абсолютной диэлектрической проницаемости среды. Выражение (10) и есть искомая взаимосвязь между вектором $\overline{D}$ и $\overline{E}$ во временной области.

Аналогично можно получить выражение во временной области для общего случая намагниченности среды

$$\overline{B} = \mu_0\mu'\,\overline{H} - \frac{\mu_0\mu''}{\omega}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} = \mu_{\text{a}}'\overline{H} - \frac{\mu_{\text{a}}''}{\omega}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}\,, \tag{11}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ' и μ'' – вещественная и мнимая часть соответственно комплексной $\dot{\mu}$ относительной магнитной проницаемости среды; $\mu_{\text{a}}' = \mu_0\mu'$ и $\mu_{\text{a}}'' = \mu_0\mu''$ – вещественная и мнимая часть соответственно комплексной абсолютной магнитной проницаемости среды. Выражение (11) устанавливает взаимосвязь между вектором магнитной индукции $\overline{B}$ и вектором напряженности магнитного поля $\overline{H}$ во временной области, учитывая расхождение по фазе вектора $\overline{B}$ относительно вектора $\overline{H}$. При выводе формулы (11) использовалась взаимосвязь между комплексными векторами $\dot{\overline{B}}$ и $\dot{\overline{H}}$

$$\dot{\overline{B}} = \mu_0\dot{\mu}\dot{\overline{H}}\,, \tag{12}$$

где

$$\dot{\mu} = \mu' - i\mu''\,; \tag{13}$$

при этом характер зависимости от частоты величин μ' и μ'' на нижних частотах такой же, как и для ε' и ε'' соответственно. Поэтому μ' = const и μ''/ω = const на нижних частотах [9].

При $\varepsilon'' \neq 0$ появляется высокочастотный диэлектрический гистерезис [2]. Поэтому выражение (10) описывает взаимосвязь между вектором $\overline{D}$ и $\overline{E}$ во временной области с учетом наличия высокочастотного диэлектрического гистерезиса. Аналогично при $\mu'' \neq 0$ появляется линейный магнитный гистерезис [2]. Следовательно выражение (11) устанавливает взаимосвязь между векторами $\overline{B}$ и $\overline{H}$ во временной области, учитывающая наличие линейного магнитного гистерезиса.

Запишем строго симметричные первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме [10]:

$$\mathrm{rot}_{+}\overline{H} = \bar{j} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \bar{j}^{\text{ст}}, \tag{14}$$

$$\mathrm{rot}_{-}\overline{E} = \bar{e} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \bar{e}^{\text{ст}}, \tag{15}$$

где $\mathrm{rot}_{+} \equiv \mathrm{rot}\ \ldots$, $\mathrm{rot}_{-}\ \ldots = -\,\mathrm{rot}\ \ldots$, $\bar{j}^{\text{ст}}$ и $\bar{e}^{\text{ст}}$ – векторы объемной плотности стороннего тока проводимости и объемной плотности стороннего напряжения сопротивления (стороннего магнитного тока [1]); $\bar{e}$ – вектор объемной плотности напряжения сопротивления. Здесь векторы $\bar{j}$ и $\bar{e}$ описываются материальными уравнениями:

$$\bar{j} = \sigma\overline{E}, \tag{16}$$

$$\bar{e} = r\overline{H}, \tag{17}$$

где σ – удельная проводимость среды; r – удельное сопротивление среды.

Подставив выражения (10) и (16) в первое уравнение Максвелла (14), а – (11) и (17) во второе уравнение (15), получим:

$$\mathrm{rot}_{+}\overline{H} = \sigma\overline{E} - \frac{\varepsilon_a''}{\omega}\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} + \varepsilon_a'\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \bar{j}^{\text{ст}}, \tag{18}$$

$$\mathrm{rot}_{-}\overline{E} = r\overline{H} - \frac{\mu_a''}{\omega}\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} + \mu_a'\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \bar{e}^{\text{ст}}. \tag{19}$$

Пусть существует экспофункциональное возбуждение электромагнитного поля [6], т.е.

$$\bar{j}^{\text{ст}} = e^{\pm\lambda t}\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}, \tag{20}$$

где $\lambda > 0$; $\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}$ – вектор с произвольной функциональной зависимостью координат от времени t, не имеющей множителя $e^{\mp\lambda t}$. Вектор $\bar{e}^{\text{ст}}$ пусть так же имеет вид

$$\bar{e}^{\text{ст}} = e^{\pm\lambda t}\tilde{\bar{e}}^{\text{ст}}. \tag{21}$$

Тогда получим экспофункциональное поле [6], т.е.

$$\overline{E} = e^{\pm\lambda t}\tilde{\overline{E}}, \qquad \overline{H} = e^{\pm\lambda t}\tilde{\overline{H}}, \tag{22}$$

в котором существуют направленные потоки электрических и магнитных монополей.

Подставим выражения (20), (21) и (22) в равенства (18) и (19). В результате получим следующую систему уравнений Максвелла, в которой отображены все вышеперечисленные факторы:

$$e^{\pm\lambda t}\mathrm{rot}_{+}\tilde{\overline{H}} = \left(\sigma \pm \lambda\varepsilon_{\text{a}}' - \frac{\varepsilon_a''\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm\lambda t}\tilde{\overline{E}} - \frac{\varepsilon_a''}{\omega}e^{\pm\lambda t}\frac{\partial^2\tilde{\overline{E}}}{\partial t^2} +$$

$$+\left(\varepsilon_{\text{a}}' \mp \frac{\varepsilon_a''2\lambda}{\omega}\right)e^{\pm\lambda t}\frac{\partial\tilde{\overline{E}}}{\partial t} + e^{\pm\lambda t}\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}, \tag{23}$$

$$e^{\pm\lambda t}\mathrm{rot}_{-}\overline{E} = \left(r \pm \lambda\mu_{\text{a}}' - \frac{\mu_{\text{a}}''\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm\lambda t}\tilde{\overline{H}} - \frac{\mu_{\text{a}}''}{\omega}e^{\pm\lambda t}\frac{\partial^2\tilde{\overline{H}}}{\partial t^2} + .$$

$$+\left(\mu_{\text{a}}' \mp \frac{\mu_{\text{a}}''2\lambda}{\omega}\right)e^{\pm\lambda t}\frac{\partial\tilde{\overline{H}}}{\partial t} + e^{\pm\lambda t}\tilde{\bar{e}}^{\text{ст}}. \tag{24}$$

Умножив обе части равенства (23) скалярно на вектор $\overline{E}$ вида (22), а обе части равенства (24) на вектор $\overline{H}$ того же вида; сложим левые и правые части найденных равенств. В результате получим после ряда преобразований уравнение

$$e^{\pm2\lambda t}\mathrm{div}\,\tilde{\overline{\Pi}} + \left(\sigma \pm \lambda\varepsilon_{\text{a}}' - \frac{\varepsilon_{\text{a}}''\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\tilde{\overline{E}} + \left(r \pm \lambda\mu_{\text{a}}' - \frac{\mu_{\text{a}}''\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\tilde{\overline{H}} -$$

$$-\frac{\varepsilon_a''}{\omega}e^{\pm2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\frac{\partial^2\tilde{\overline{E}}}{\partial t^2} - \frac{\mu_{\text{a}}''}{\omega}e^{\pm2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\frac{\partial^2\tilde{\overline{H}}}{\partial t^2} + \left(\varepsilon_{\text{a}}' \mp \frac{\varepsilon_{\text{a}}''2\lambda}{\omega}\right)e^{\pm2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\frac{\partial\tilde{\overline{E}}}{\partial t} +$$

$$+\left(\mu_a^{'} \mp \frac{\mu_a^{''}2\lambda}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\frac{\partial\tilde{\overline{H}}}{\partial t}+e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\tilde{\overline{j}}^{\,\text{ст}}+e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\overline{e}^{\,\text{ст}}=0\,, \tag{25}$$

где

$$\tilde{\overline{\Pi}}=[\tilde{\overline{E}},\tilde{\overline{H}}]\ - \tag{26}$$

ядро вектора [11] Пойнтинга.

Перепишем равенство (25) с учетом очевидных соотношений:

$$\overline{A}\cdot\overline{A}=A^2\,, \tag{27}$$

$$\overline{A}\cdot\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial A^2}{\partial t}\,, \tag{28}$$

$$\overline{A}\cdot\frac{\partial^2\overline{A}}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A^2}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}\right|^2, \tag{29}$$

где $\overline{A}$ – вектор; A – модуль вектора $\overline{A}$. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered}
e^{\pm 2\lambda t}\operatorname{div}\tilde{\overline{\Pi}}+\left(\sigma\pm\lambda\varepsilon_a^{'}-\frac{\varepsilon_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\tilde{E}^2+\left(r\pm\lambda\mu_a^{'}-\frac{\mu_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\tilde{H}^2-\\
-\frac{\varepsilon_a^{''}}{\omega}e^{\pm 2\lambda t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{E}^2}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial\tilde{\overline{E}}}{\partial t}\right|^2\right)-\frac{\mu_a^{''}}{\omega}e^{\pm 2\lambda t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{H}^2}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial\tilde{\overline{H}}}{\partial t}\right|^2\right)+\\
+\frac{1}{2}\left(\varepsilon_a^{'}\mp\frac{\varepsilon_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\frac{\partial\tilde{E}^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\mu_a^{'}\mp\frac{\mu_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\frac{\partial\tilde{H}^2}{\partial t}+\\
+e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\tilde{\overline{j}}^{\,\text{ст}}+e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\tilde{\overline{e}}^{\,\text{ст}}=0\,.
\end{gathered} \tag{30}$$

где $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$ – модули соответствующих векторов. Из этого уравнения видно, что слагаемые в данном уравнении являются экспофункциями с экспоненциальными множителями $e^{\pm 2\lambda t}$, имеющими размерность объемной плотности мощности, Вт/м^3. Уравнение (30) и есть искомое уравнение баланса мгновенных значений объемной плотности мощности электромагнитного поля, т.е. является дифференциальной формой теоремы Умова-Пойнтинга, в которой отображены все вышеперечисленные факторы.

Интегрируя почленно равенство (30) по объему V, ограниченного замкнутой поверхностью S, и применяя теорему Остроградского-Гаусса, получаем

$$\begin{gathered}
\oint_S e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{\Pi}}\cdot d\overline{S}+\int_V\left(\sigma\pm\lambda\varepsilon_a^{'}-\frac{\varepsilon_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\tilde{E}^2dV+\int_V\left(r\pm\lambda\mu_a^{'}-\frac{\mu_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\tilde{H}^2dV-\\
-\int_V\frac{\varepsilon_a^{''}}{\omega}e^{\pm 2\lambda t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{E}^2}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial\tilde{\overline{E}}}{\partial t}\right|^2\right)dV-\int_V\frac{\mu_a^{''}}{\omega}e^{\pm 2\lambda t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tilde{H}^2}{\partial t^2}-\left|\frac{\partial\tilde{\overline{H}}}{\partial t}\right|^2\right)dV+\\
+\int_V\frac{1}{2}\left(\varepsilon_a^{'}\mp\frac{\varepsilon_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\frac{\partial\tilde{E}^2}{\partial t}dV+\int_V\frac{1}{2}\left(\mu_a^{'}\mp\frac{\mu_a^{''}\lambda^2}{\omega}\right)e^{\pm 2\lambda t}\frac{\partial\tilde{H}^2}{\partial t}dV+\\
+\int_V e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{E}}\cdot\tilde{\overline{j}}^{\,\text{ст}}dV+\int_V e^{\pm 2\lambda t}\tilde{\overline{H}}\cdot\tilde{\overline{e}}^{\,\text{ст}}dV=0\,.
\end{gathered} \tag{31}$$

Последнее равенство – окончательная интегральная форма теоремы Умова-Пойнтинга, записанная с учетом всех факторов.

Рассмотрим физический смысл выражений, содержащихся в равенстве (31).

Первое слагаемое равенства (31) можно записать в форме

$$e^{\pm 2\lambda t}\oint_S\tilde{\overline{\Pi}}\cdot d\overline{S}\equiv P_\Sigma=e^{\pm 2\lambda t}\tilde{P}_\Sigma\,, \tag{32}$$

где $\tilde{P}_\Sigma=\oint_S\tilde{\overline{\Pi}}\cdot d\overline{S}$ – ядро экспофункции, которая равна потоку мощности (энергии в единицу времени) через поверхность S [1] при $t=0$.

Второе, третье, четвертое и пятое слагаемые равенства (31) описывают потери электромагнитной энергии внутри данного объема V, которые появляются в связи с превращением этой энергии в другие формы энергии неэлектромагнитного характера за счет всех вышеперечисленных факторов. Составляющие этих слагаемых можно записать в следующем виде:

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \sigma \widetilde{E}^2 dV \equiv P_{\text{п}1} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}1}, \tag{33}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \pm\lambda\varepsilon_{\text{a}}^{'}\widetilde{E}^2 dV \equiv P_{\text{п}2} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}2}, \tag{34}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V -\frac{\varepsilon_{\text{a}}^{''}\lambda^2}{\omega}\widetilde{E}^2 dV \equiv P_{\text{п}3} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}3}, \tag{35}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V r\widetilde{H}^2 dV \equiv P_{\text{п}4} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}4}, \tag{36}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \pm\lambda\mu_{\text{a}}^{'}\widetilde{H}^2 dV \equiv P_{\text{п}5} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}5}, \tag{37}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V -\frac{\mu_{\text{a}}^{''}\lambda^2}{\omega}\widetilde{H}^2 dV \equiv P_{\text{п}6} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}6}, \tag{38}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V -\frac{\varepsilon_{\text{a}}^{''}}{2\omega}\frac{\partial^2\widetilde{E}^2}{\partial t^2} dV \equiv P_{\text{п}7} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}7}, \tag{39}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \frac{\varepsilon_{\text{a}}^{''}}{\omega}\left|\frac{\partial\widetilde{\widetilde{E}}}{\partial t}\right|^2 dV \equiv P_{\text{п}8} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}8}, \tag{40}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V -\frac{\mu_{\text{a}}^{''}}{2\omega}\frac{\partial^2\widetilde{H}^2}{\partial t^2} dV \equiv P_{\text{п}9} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}9}, \tag{41}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \frac{\mu_{\text{a}}^{''}}{\omega}\left|\frac{\partial\widetilde{\widetilde{H}}}{\partial t}\right|^2 dV \equiv P_{\text{п}10} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_{\text{п}10}. \tag{42}$$

Шестое и седьмое слагаемые уравнения (31) описывают скорость изменения энергии электромагнитного поля, записанной в объеме V. Эти слагаемые можно записать в форме:

$$e^{\pm 2\lambda t}\frac{d}{dt}(W_{\text{э}1} + W_{\text{э}2} + W_{\text{м}1} + W_{\text{м}2}), \tag{43}$$

где

$$W_{\text{э}1} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_{\text{a}}^{'}\widetilde{E}^2 dV, \tag{44}$$

$$W_{\text{э}2} = \mp\int_V \frac{\varepsilon_{\text{a}}^{''}2\lambda}{\omega}\widetilde{E}^2 dV, \tag{45}$$

$$W_{\text{м}1} = \frac{1}{2}\int_V \mu_{\text{a}}^{'}\widetilde{H}^2 dV, \tag{46}$$

$$W_{\text{м}2} = \mp\int_V \frac{\mu_{\text{a}}^{''}2\lambda}{\omega}\widetilde{H}^2 dV. \tag{47}$$

И, наконец, восьмое и девятое слагаемые уравнения (31), которое запишем в следующем виде:

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \widetilde{\widetilde{E}}\cdot\widetilde{\widetilde{j}}^{\,\text{ст}} dV \equiv P_j^{\text{ст}} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_j^{\text{ст}}, \tag{48}$$

$$e^{\pm 2\lambda t}\int_V \widetilde{\widetilde{H}}\cdot\widetilde{\widetilde{e}}^{\,\text{ст}} dV \equiv P_e^{\text{ст}} = e^{\pm 2\lambda t}\widetilde{P}_e^{\text{ст}}, \tag{49}$$

описывают мгновенные значения мощности, отдаваемой сторонними токами проводимости и сторонними напряжениями сопротивления соответственно электромагнитному полю в объеме V.

Используя обозначения (32)-(49), теорему Умова-Пойнтинга можно записать коротко

$$P_\Sigma + \sum_{k=1}^{10} P_{\text{п}k} + e^{\pm 2\lambda t}\frac{d}{dt}(W_{\text{э}1} + W_{\text{э}2} + W_{\text{м}1} + W_{\text{м}2}) + P_j^{\text{ст}} + P_e^{\text{ст}} = 0\,. \tag{50}$$

Для дальнейших исследований найдем уравнение баланса комплексной мощности. Пусть в уравнениях Максвелла (14) и (15) векторы $\bar{j}^{\text{ст}}$ и $\bar{e}^{\text{ст}}$ имеют вид (20) и (21) соответственно с $\tilde{\bar{j}}^{\text{ст}}$ и $\tilde{\bar{e}}^{\text{ст}}$, проекции которых являются гармоническими функциями. В этом случае к левым и правым частям уравнений (14) и (15), в которых учтены равенства (16) и (17), можно применить комплексное преобразование [5], представляющее суть обобщенного символического метода электрических цепей.

В результате получим следующие равенства:

$$\text{rot}_+ \dot{\bar{H}}_m = \sigma \dot{\bar{E}}_m + (\pm\lambda + i\omega)\dot{\bar{D}}_m + \dot{\bar{j}}_m^{\text{ст}}\,, \tag{51}$$

$$\text{rot}_- \dot{\bar{E}}_m = r \dot{\bar{H}}_m + (\pm\lambda + i\omega)\dot{\bar{B}}_m + \dot{\bar{e}}_m^{\text{ст}}\,, \tag{52}$$

где точка над вектором и индекс m обозначают комплексные амплитуды соответствующих векторов. Эти равенства можно переписать с учетом равенств (1), (2), (12), и (13):

$$\text{rot}_+ \dot{\bar{H}}_m = \left(\sigma \pm \lambda\varepsilon_a' + \omega\varepsilon_a''\right)\dot{\bar{E}}_m + i\left(\omega\varepsilon_a' \mp \lambda\varepsilon_a''\right)\dot{\bar{E}}_m + \dot{\bar{j}}_m^{\text{ст}}\,, \tag{53}$$

$$\text{rot}_- \dot{\bar{E}}_m = \left(r \pm \lambda\mu_a' + \omega\mu_a''\right)\dot{\bar{H}}_m + i(\omega\mu_a' \mp \lambda\mu_a'')\dot{\bar{H}}_m + \dot{\bar{e}}_m^{\text{ст}}\,. \tag{54}$$

Отсюда получим известным путем [2] искомое уравнение баланса комплексной мощности в дифференциальной форме

$$\begin{gathered}\text{div}\left[\dot{\bar{E}}_m, \overset{*}{\bar{H}}_m\right] + \left(\sigma \pm \lambda\varepsilon_{\text{a}}' + \omega\varepsilon_{\text{a}}''\right)\left|\dot{\bar{E}}_m\right|^2 + \left(r \pm \lambda\mu_{\text{a}}' + \omega\mu_{\text{a}}''\right)\left|\dot{\bar{H}}_m\right|^2 - \\ - i\left(\omega\varepsilon_{\text{a}}' \mp \lambda\varepsilon_{\text{a}}''\right)\left|\dot{\bar{E}}_m\right|^2 + i(\omega\mu_{\text{a}}' \mp \lambda\mu_{\text{a}}'')\left|\dot{\bar{H}}_m\right|^2 + \dot{\bar{E}}_m \cdot \overset{*}{\bar{j}}{}_m^{\text{ст}} + \overset{*}{\bar{H}}_m \cdot \dot{\bar{e}}_m^{\text{ст}} = 0\,,\end{gathered} \tag{55}$$

где * над векторами обозначают комплексное сопряжение, которому соответствует уравнение баланса комплексной мощности

$$\dot{P}_\Sigma + P_{\text{п ср}} + 2i\omega(W_{\text{м ср}} - W_{\text{э ср}}) + \dot{P}_j^{\text{ст}} + \dot{P}_e^{\text{ст}} = 0\,, \tag{56}$$

где

$$\dot{P}_\Sigma = \oint_S \dot{\bar{\Pi}} \cdot d\bar{S} \quad - \tag{57}$$

– комплексный поток мощности через поверхность S;
здесь

$$\dot{\bar{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\bar{E}}_m, \overset{*}{\bar{H}}_m\right] - \tag{58}$$

– комплексный вектор Пойнтинга [1];

$$P_{\text{п ср}} = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma \pm \lambda\varepsilon_{\text{a}}' + \omega\varepsilon_{\text{a}}''\right)\left|\dot{\bar{E}}_m\right|^2 dV + \frac{1}{2}\int_V \left(r \pm \lambda\mu_{\text{a}}' + \omega\mu_{\text{a}}''\right)\left|\dot{\bar{H}}_m\right|^2 dV \ - \tag{59}$$

– среднее за период значение мощности потерь в объеме V, появляющихся за счет всех вышеперечисленных факторов;

$$W_{\text{э ср}} = \frac{1}{4}\int_V \left(\varepsilon_{\text{a}}' \mp \frac{\varepsilon_{\text{a}}''\lambda}{\omega}\right)\left|\dot{\bar{E}}_m\right|^2 dV \tag{60}$$

$$W_{\text{м ср}} = \frac{1}{4}\int_V \left(\mu_{\text{a}}' \mp \frac{\mu_{\text{a}}''\lambda}{\omega}\right)\left|\dot{\bar{H}}_m\right|^2 dV \ - \tag{61}$$

– средние за период значения энергий электрического и магнитного полей соответственно в объеме V;

$$\dot{P}_j^{\text{ст}} = \frac{1}{2}\int_V \dot{\bar{E}}_m \cdot \overset{*}{\bar{j}}{}_m^{\text{ст}}\, dV\,, \tag{62}$$

$$\dot{P}_e^{\text{ст}} = \frac{1}{2}\int_V \overset{*}{\overline{H}}_m \cdot \dot{\bar{e}}_m^{\text{ст}} dV \; - \qquad (63)$$

– комплексные мощности сторонних токов проводимости и сторонних напряжений сопротивления соответственно.

Уравнения баланса комплексной мощности (56) … (63) справедливы для любых фиксированных частот ω экспогармонических функций возбуждения. Частотные зависимости величин параметров среды $\varepsilon^{'}$, $\varepsilon^{''}$, $\mu^{'}$, $\mu^{''}$ можно найти, например, в [8, 9].

Теперь возвратимся к рассмотрению физического смысла выражений равенства (31). Прежде всего более подробно охарактеризуем слагаемые, описывающие потери электромагнитной энергии, составляющие которых представлены выражениями (33) … (42). В связи с тем, что величины r и $\overline{e}^{\text{ст}}$ являются фиктивными [1-3] и введены в уравнение Максвелла для симметрии [2, 10], что создает удобства при решении задач электродинамики [1-3], то на составляющие (36) и (49) не будем обращать внимания. Все остальные составляющие описывают реально существующие потери электромагнитной энергии, порожденные теми или иными факторами.

Мощность потерь, обусловленная токами проводимости, описана составляющей (33), т.е. $P_{\text{п}1}$ – это мощность джоулевых потерь в объеме V [1].

Составляющие (34) и (37) отображают мощности, которые связаны с рождением в диэлектрической среде направленных потоков электрических и соответственно магнитных монополей (зарядов) в экспофункциональном поле [6, 11].

Сумма составляющих (39) и (40) описывает потери за счет диэлектрического гистерезиса, так как эта сумма составляющих соответствуют слагаемому выражения (59), в котором имеется величина $\omega\varepsilon_{\text{a}}^{''}$ [2].

Сумма составляющих (41) и (42) определяет магнитные потери за счет линейного магнитного гистерезиса, так как эта сумма соответствует слагаемому выражения (59), в котором находится величина $\omega\mu_a^{''}$ [2].

Составляющая (35) отображает мощность потерь, появляющуюся от комбинации двух факторов: диэлектрического гистерезиса и рождения потока электрических зарядов. Аналогично составляющая (38) – мощность потерь, появляющуюся за счет комбинации линейного магнитного гистерезиса и рождения потока магнитных монополей.

Рассмотрим сумму составляющих (39) и (41):

$$P_{\text{п}7} + P_{\text{п}9} = e^{\pm 2\lambda t}\,\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_V -\frac{\varepsilon_{\text{a}}^{''}}{2\omega}\widetilde{E}^2 dV + \int_V -\frac{\mu_{\text{a}}^{''}}{2\omega}\widetilde{H}^2 dV\right) = e^{\pm 2\lambda t}\,\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{K}\,, \qquad (64)$$

где

$$\widetilde{K} = -\frac{1}{2\omega}\left(\int_V \varepsilon_{\text{a}}^{''}\widetilde{E}^2 dV + \int_V \mu_{\text{a}}^{''}\widetilde{H}^2 dV\right). \qquad (65)$$

Здесь $\widetilde{K}$ – величина, имеющая размерность электромагнитного момента количества движения [12]. Таким образом, выражение (64) описывает ускорение в изменении величины электромагнитного момента количества движения в объеме V.

Из вышесказанного видно, что в уравнении (31), которое составляет содержание теоремы Умова-Пойнтинга, выделены отдельно составляющие мощности потерь, которые соответствуют составляющим активной мощности, записанной в выражении (59) баланса комплексной мощности, и которые порождены следующими факторами: токами проводимости (выражение (33), параметр σ в (59)), высокочастотным диэлектрическим гистерезисом (выражения (35), (39), (40), величина $\omega\varepsilon_{\text{a}}^{''}$ в (59)), линейным магнитным гистерезисом (выражения (38), (41), (42), величина $\omega\mu_{\text{a}}^{''}$ в (59)), явлением возникновения направленного потока электрических монополей (выражения (34), (35), величина $\pm\lambda\varepsilon_{\text{a}}^{'}$ в (59)), явлением возникновения направленного потока магнитных монополей (выражения (37), (38), величина $\pm\lambda\mu_{\text{a}}^{'}$ в (59)).

Мощность, расходуемая на изменение энергии в объеме V (выражение (43)), состоит из четырех слагаемых, два из которых содержат энергию электрического и магнитного полей [1] (выражения

(44), величина $\varepsilon_a^{'}$ в (60) и (46), величина $\mu_a^{'}$ в (61) соответственно); остальные слагаемые содержат: 1) энергию электрического поля (выражение (45), величина $\mp\frac{\varepsilon_a^{''}\lambda}{\omega}$ в (60)), которая изменяется под совместным действием диэлектрического гистерезиса и явлением возникновения направленного потока электрических монополей; 2) энергию магнитного поля (выражение (47), величина $\mp\frac{\mu_a^{''}\lambda}{\omega}$ в (61)), которая изменяется под совместным действием линейного магнитного гистерезиса и явлением возникновения направленного потока магнитных монополей.

И, наконец, мощность сторонних источников тока проводимости, которая расходуется на все процессы, происходящие в объеме *V*, описана выражениями (48), (62).

Теперь рассмотрим искусственный прием, данный в [2] без какого-либо обоснования корректности его применения, который заключается в замене вещественной частоты ω комплексной частотой $\Omega = \omega + i\gamma$, с целью выяснения условий, когда этот прием дает правильный результат. В общем случае данный в [2] прием, как отмечал и сам автор [2], приводит к ошибочным формулам. Для решения поставленной задачи перепишем равенства (51) и (52) с учетом выражений (1), (2), (12) и (13) в виде:

$$\mathrm{rot}_{+}\dot{\bar{H}}_m = \sigma\dot{\bar{E}}_m + i\big(\omega + i(\mp\lambda)\big)\big(\varepsilon_a^{'} - i\varepsilon_a^{''}\big)\dot{\bar{E}}_m + \dot{\bar{j}}_m^{\,\text{ст}}, \tag{66}$$

$$\mathrm{rot}_{-}\dot{\bar{E}}_m = r\dot{\bar{H}}_m + i\big(\omega + i(\mp\lambda)\big)\big(\mu_a^{'} - i\mu_a^{''}\big)\dot{\bar{H}}_m + \dot{\bar{e}}_m^{\,\text{ст}}. \tag{67}$$

В этих равенствах сочетание $\omega + i(\mp\lambda)$ можно рассматривать в качестве комплексной частоты Ω с величиной $\gamma = \mp\lambda$. Поэтому корректной является замена вещественной частоты ω на комплексную частоту Ω только там, где ω умножается на $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\mu}$. Величины же $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\mu}$ нужно считать имеющими фиксированные значения, т.е. $\varepsilon_a^{'}$, $\varepsilon_a^{''}$, $\mu_a^{'}$ и $\mu_a^{''}$ – фиксированные величины; они конечно же зависят от частоты (см., например, в [8, 9]), но в каждом конкретном случае частота ω гармонического колебания вполне определенная фиксированная величина, которой соответствуют определенные фиксированные значения $\varepsilon_a^{'}$, $\varepsilon_a^{''}$, $\mu_a^{'}$ и $\mu_a^{''}$. Поэтому в [2] формулы становятся правильными для случая отсутствия дисперсии проницаемостей, так как неправильно используемая частотная зависимость параметров среды в данном случае исключается и формулы приобретают правильный физический смысл, что и отмечает автор [2].

В заключение отметим, что найденная новая форма теоремы Умова-Пойнтинга удобна для анализа энергетических свойств электромагнитного поля в тех случаях, когда требуется проследить влияние того или иного фактора на распределение энергии электромагнитного поля в объеме *V*.

Литература

1. *Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д.* Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2002. – 536 с.
2. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. – М.: Советское радио, 1957. – 584 с.
3. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
4. *Блажкевич Б.І.* Основи теорії лінійних електричних кіл. – К.: Наукова думка, 1964. – 444 с.
5. *Иваницкий А.М.* Обобщенный символический метод анализа электрических цепей. – Одесса, 1994. – 27 с.
6. *Иваницкий А.М.* Экспофункциональные поля // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. – № 1. – С. 18-21.
7. *Иваницкий А.М.* Экспериментальное доказательство существования направленного потока магнитных монополей // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2004. – № 3. – С. 3-9.
8. *Физика*. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – 4-е изд. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 944 с.
9. *Физические величины*: Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др.; Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мелихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
10. *Иваницкий А.М.* Принцип дуальности в электродинамике // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2000. – № 3. – С. 29-35.
11. *Иваницкий А.М.* Исследование потока магнитных монополей экспофункционального поля // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2003. – № 2. – С. 9-14.
12. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – 8-е изд. – М.: Наука, 1966. – 624 с.