

РАСЧЕТ ПИКФАКТОРА СИГНАЛА МОДЕМА

PAR CALCULATION OF THE MODEM'S SIGNAL

Аннотация. В статье дана методика расчета пикфактора сигнала модема с использованием в передатчике фильтра с АЧХ, равной квадратному корню из приподнятого косинуса. Приведены численные результаты расчета пикфактора для нижнечастотного и полосового вариантов фильтра и соответствующие аппроксимационные формулы. Показано, что основное влияние на пикфактор оказывает величина коэффициента сглаживания.

Summary. In the article the technique of calculation of a PAR of a signal of the modem with usage in the repeater of the filter with frequency response, equal square root from an elevated cosine is adduced. The numerical outcomes of calculation of a PAR for low frequency and band version of the filter and conforming approximation of the formula are adduced. Is rotined, that the basic influencing on a PAR renders the value of a smoothing factor.

При проектировании современных модемов и расчете их основных параметров необходимо знать основные характеристики передаваемого сигнала. Важной из них является логарифмическая величина отношения пиковой мощности сигнала к средней (в дальнейшем пикфактор). Для эффективного использования лимита мощности передатчика возникает проблема минимизации пикфактора. Предпосылки для использования пикфактора при вычислении скорости передачи приведены в работе [1], где рассматривается передача дискретной информации с использованием прямоугольных посылок. В существующих публикациях [2], [3], [4] приведены результаты вычисления и моделирования для сигнала при модуляции прямоугольными импульсами. Однако существует ряд систем [5], [6], в которых используется формирование спектра сигнала передатчика при помощи фильтров передачи. Но в существующей литературе для класса данных систем не уделяется внимание исследованию свойств передаваемого сигнала и пикфактора в частности.

Поэтому целью данной статьи является разработка методики оценки пикфактора сигнала при использовании на передаче нижнечастотного и полосового формирующего фильтров.

В тракте приема модема для увеличения отношения сигнал/шум используются согласованные фильтры, аналогичные фильтрам передачи. При работе "на себя", амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) полученного тракта должна удовлетворять критерию Найквиста. Поэтому в дальнейшем все исследования проводятся для варианта АЧХ фильтра передачи в виде квадратного корня из АЧХ фильтра Найквиста.

Пикфактор зависит от двух величин: коэффициента многопозиционного кодирования m и коэффициента сглаживания фильтра Найквиста r . Поэтому пикфактор удобно представить в виде двух соответствующих слагаемых. Для определения их величин воспользуемся рис. 1, на котором показана глаз-диаграмма сигнала на выходе фильтров передачи (а) и приема (б) при $m = 4$ (2 бит/символ). Данный рисунок получен путем математического моделирования в MatLab.

Анализ вышеприведенного графика позволяет сделать вывод о том, что пиковое значение сигнала $u_{\text{пик}}$ превышает максимальное $u_{\text{макс}}$ значение входного сигнала. Пикфактор сигнала на выходе фильтра передачи вычисляется согласно выражению [1]:

$$\Delta p_{\text{пик пер}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{пик пер}}}{u_{\text{ср пер}}} \right) = \Delta p_{m \text{ пер}} + \Delta p_{r \text{ пер}},$$

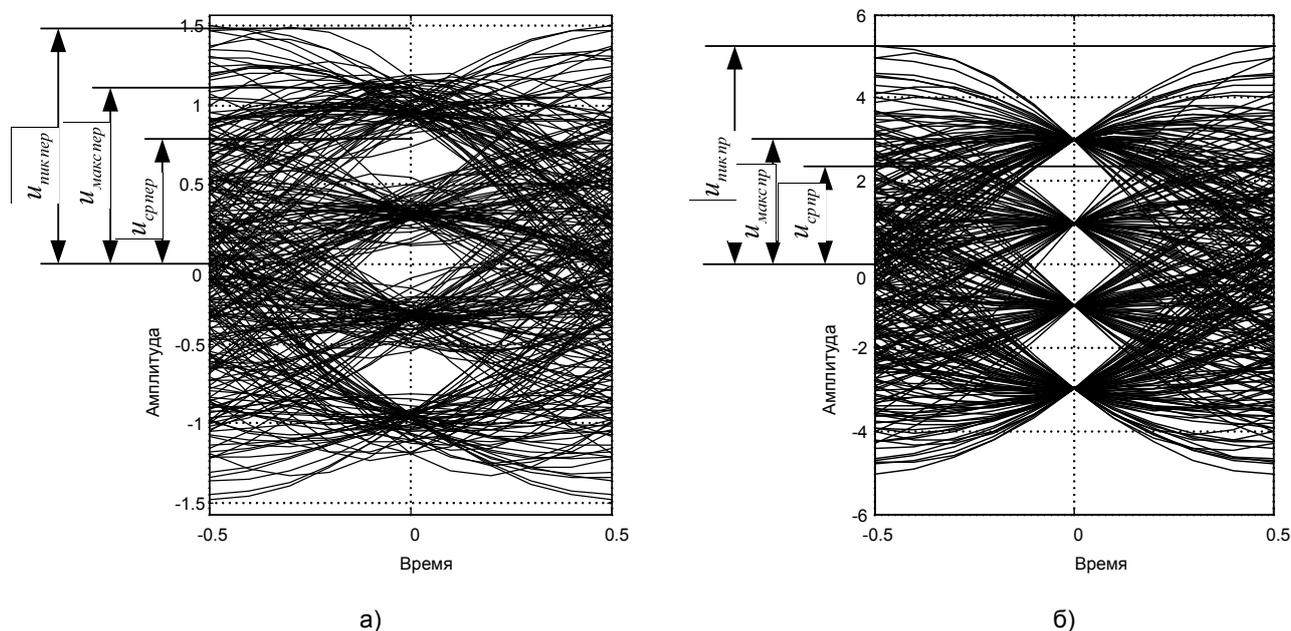
где $\Delta p_{m \text{ пер}}$ и $\Delta p_{r \text{ пер}}$ – слагаемые величины пикфактора за счет многопозиционного кодирования и фильтрации соответственно.

Эти величины можно вычислить по формулам:

$$\Delta p_{m \text{ пер}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{макс пер}}}{u_{\text{ср пер}}} \right)$$

и

$$\Delta p_{r\text{пер}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{пик пер}}}{u_{\text{макс пер}}} \right).$$



а) б)
Рисунок 1 – Глаз-диаграмма сигнала на выходе:
а) фильтра передачи; б) фильтра приема

Пикфактор сигнала и его составляющие на выходе фильтра приема вычисляется по аналогичным формулам:

$$\Delta p_{\text{пик пр}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{пик пр}}}{u_{\text{ср пр}}} \right) = \Delta p_{m\text{пр}} + \Delta p_{r\text{пр}},$$

где

$$\Delta p_{m\text{пр}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{макс пр}}}{u_{\text{ср пр}}} \right)$$

и

$$\Delta p_{r\text{пр}} = 20 \lg \left(\frac{u_{\text{пик пр}}}{u_{\text{макс пр}}} \right).$$

Слагаемое пикфактора, вызванное многопозиционным кодированием, рассчитывается по формуле [1]:

$$\Delta p_{m\text{пер}} = \Delta p_{m\text{пр}} = 10 \lg \left[\frac{(2^m - 1)^2}{\frac{\sum_{n=1}^{2^m} (-(2^m - 1) + 2(n - 1))^2}{2^m}} \right] = 20 \lg \left[\frac{2^m - 1}{\sqrt{\frac{2^{2m} - 1}{3}}} \right]. \quad (1)$$

Величину слагаемого $\Delta p_{r\text{пер}}$ можно вычислить двумя методами: по импульсной характеристике и по огибающей импульсной характеристике [7]. Пикфактор сигнала на выходе нижнечастотного фильтра Найквиста целесообразно определять первым методом (по импульсной характеристике), а полосового – по огибающей.

Вначале рассмотрим нижнечастотный фильтр Найквиста со следующей АЧХ [8]:

$$K_n(\omega) = \begin{cases} T_c, & 0 \leq \omega < \frac{\pi}{T_c} \cdot (1-r) \\ T_c \cdot \cos^2 \left[\frac{T_c}{4r} \cdot \left(\omega - \frac{\pi}{T_c} \cdot (1-r) \right) \right], & \frac{\pi}{T_c} \cdot (1-r) \leq \omega < \frac{\pi}{T_c} \cdot (1+r), \end{cases} \quad (2)$$

где T_c – символьный интервал.

Выражение для импульсной характеристики фильтра Найквиста с АЧХ равной квадратному корню из (2), имеет вид [8]:

$$h(t) = \frac{4r}{\pi\sqrt{T_c}} \cdot \frac{\cos \left[(1+r) \cdot \frac{\pi t}{T_c} \right] + \frac{T_c \cdot \sin \left[(1-r) \cdot \frac{\pi t}{T_c} \right]}{4 \cdot r \cdot t}}{1 - \left(\frac{4 \cdot r \cdot t}{T_c} \right)}. \quad (3)$$

При численном вычислении пикфактора по импульсной характеристике необходимо выбрать количество символьных интервалов, в пределах которых будет вестись суммирование. Для этого при помощи математического пакета MathCad построен график (рис. 2, а) импульсной характеристики во времени, нормированный к $h(0)$ и выраженный в процентах для удобства представления. С этой же целью на рисунке использован логарифмический масштаб по двум координатам. Анализ рисунка позволяет сделать вывод о том, что величина отсчетов импульсной характеристики при $t > 100 \cdot T_c$ составляет менее 0,1% от $h(0)$. Поэтому при вычислениях $\Delta p_{r\text{пер}}$ учитывалось только 100 первых слагаемых:

$$\Delta p_{r\text{пер}} = 20 \lg \left[\frac{\sum_{n=-100}^{100} |h((n + \Delta T) \cdot T_c)|}{|h(0)|} \right], \quad (4)$$

где ΔT – интервал сдвига относительно отсчетных точек.

На рис. 2,б показан график $\Delta p_{r\text{пер}}(\Delta T)$ при разных значениях r , также полученный при помощи MathCad. Приведенные кривые показывают, что точка экстремума функции $\Delta p_{r\text{пер}}(\Delta T)$ зависит от r . Поэтому для каждого значения r необходимо проводить поиск экстремума функции $\Delta p_{r\text{пер}}(\Delta T)$. Результаты расчета с поиском экстремума путем равномерного перебора значений ΔT в интервале (0 ... 1) приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты вычисления $\Delta p_{r\text{пер}}(r)$ по импульсной характеристике фильтра

| r | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Delta p_{r\text{пер}}(r)$, дБ | 7,45 | 5,49 | 4,03 | 2,83 | 2,37 | 2,25 | 1,95 | 1,83 | 1,74 | 1,68 |

Анализируя таблицу, можно сделать вывод, что зависимость $\Delta p_{r\text{пер}}(r)$ имеет нелинейный характер и быстро уменьшается с ростом r . Для удобства использования, вышеуказанную таблицу можно аппроксимировать формулой (ошибка не превышает 7,2%):

$$\Delta p_{r\text{пер}}(r) = -16,3r^3 + 38,4r^2 - 30,7r + 10,2. \quad (5)$$

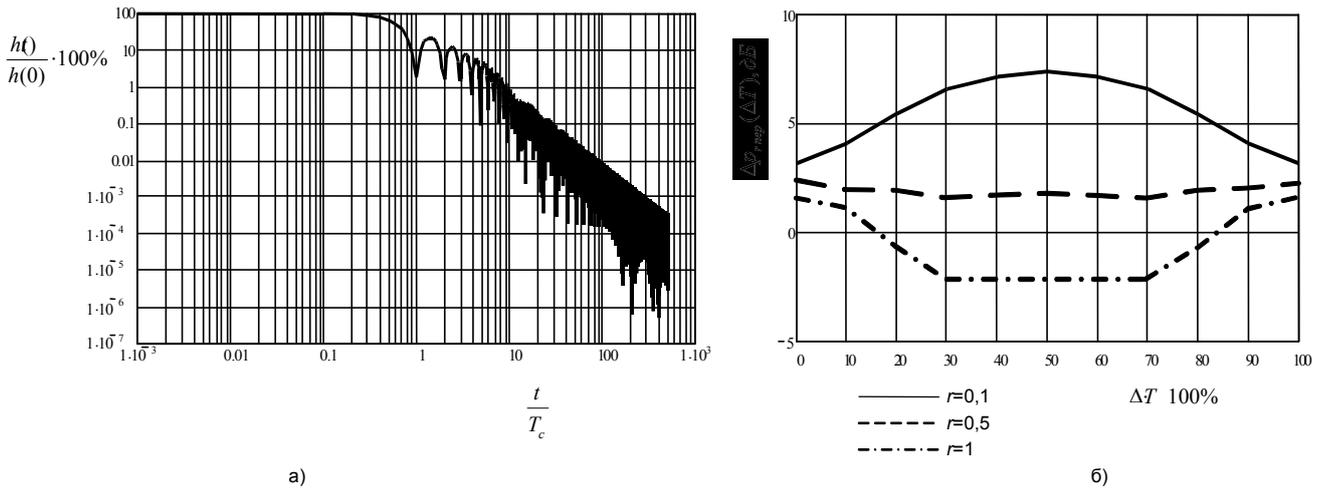


Рисунок 2 – Импульсная характеристика фильтра Найквиста:

а) модуль, нормированный к $h(0)$; б) график зависимости $\Delta p_{r\text{пер}}(\Delta T)$ при $r = \text{const}$

Теперь перейдем к вычислению слагаемого пикфактора сигнала на выходе полосового фильтра Найквиста. Взяв за основу формулу (2), можно показать, что данный фильтр имеет следующую АЧХ:

$$K_H(\omega) = \begin{cases} \cos^2 \left[\frac{T_c}{2r} \cdot \left(\frac{3\pi}{2T_c} - \omega - \frac{\pi}{2T_c}(1-r) \right) \right], & \frac{\pi}{T_c} \left(1 - \frac{r}{2} \right) \leq \omega < \frac{\pi}{T_c} \left(1 + \frac{r}{2} \right) \\ 1, & \frac{\pi}{T_c} \left(1 + \frac{r}{2} \right) \leq \omega < \frac{2\pi}{T_c} \left(1 - \frac{r}{4} \right) \\ \cos^2 \left[\frac{T_c}{2r} \cdot \left(\omega - \frac{\pi}{2T_c}(1-r) - \frac{3\pi}{2T_c} \right) \right], & \frac{2\pi}{T_c} \left(1 - \frac{r}{4} \right) \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T_c} \left(1 + \frac{r}{4} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку АЧХ фильтра передатчика равна $\sqrt{K_H(\omega)}$ и далее сигнал переносится в требуемую область частот, то целесообразно провести оценку $\Delta p_{r\text{пер}}$ по огибающей импульсной характеристике с помощью известной формулы [7]:

$$u_{\text{ог}}(t) = \sqrt{h_I^2(t) + h_Q^2(t)}, \quad (7)$$

где $h_I^2(t)$ и $h_Q^2(t)$ – соответственно синфазная (действительная) и квадратурная (мнимая) составляющая отклика фильтра.

Эти две составляющих можно вычислить по формулам обратного преобразования Фурье:

$$h_I(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{T_c} \left(1 - \frac{r}{2} \right)}^{\frac{2\pi}{T_c} \left(1 + \frac{r}{4} \right)} \sqrt{K_H(\omega)} \cdot e^{i\omega t} d\omega \right] \quad (8)$$

и

$$h_Q(t) = 2 \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\frac{\pi}{T_c} \left(1 - \frac{r}{2} \right)}^{\frac{2\pi}{T_c} \left(1 + \frac{r}{4} \right)} \sqrt{K_H(\omega)} \cdot e^{i\omega t} d\omega \right] \quad (9)$$

Записи $\operatorname{Re}()$ и $\operatorname{Im}()$ обозначают операцию выделения действительной и мнимой составляющей соответственно. Для определения пределов суммирования рис. 3 приведена форма огибающей при разных значениях r (а) и величина огибающей в процентах относительно $u_{\text{ог}}(0)$ при $r = 0,1$ (б).

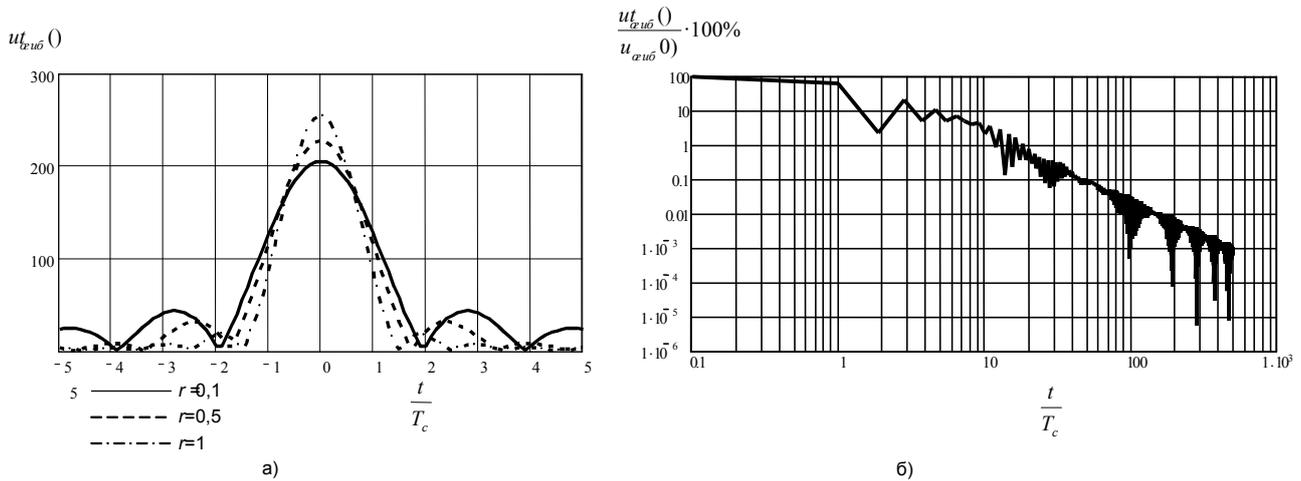


Рисунок 3 – Огибающая импульсной характеристики полосового фильтра передачи:
 а) форма при разных значениях r ; б) значение относительно $u_{огиб}(0)$ при $r = 0,1$

При вычислении $\Delta p_{rпер}$ для полосового варианта фильтра передачи отсчеты с амплитудами менее 0,1% от $u_{огиб}(t)$ не использовались:

$$\Delta p_{rпер} = 20 \lg \left[\frac{\sum_{n=-60}^{60} u_{огиб}(n + \Delta T) \cdot T_c}{u_{огиб}(0)} \right]. \quad (10)$$

Результаты расчетов, выполненные по приведенным формулам в MathCad, приведены в табл. 2. Как и в предыдущем случае, поиск экстремума осуществлялся путем равномерного перебора всех значений ΔT .

Таблица 2 – Результаты вычисления $\Delta p_{rпер}(r)$ по огибающей импульсной характеристики полосового фильтра

| r | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|---------------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Delta p_{rпер}(r)$, дБ | 12,04 | 10,50 | 9,44 | 8,73 | 8,12 | 7,54 | 6,90 | 6,50 | 6,21 | 5,99 |

Для упрощения дальнейших вычислений, данную таблицу можно аппроксимировать формулой (относительное значение ошибки не превышает 3%):

$$\Delta p_{rпер} = 6,11r^2 - 13,1r + 13,1. \quad (11)$$

Сравнивая численные данные табл. 1 и 2 можно заметить, что при одинаковом значении r величина слагаемого пикфактора для полосового фильтра Найквиста значительно больше, чем для нижнечастотного. Анализ этих же таблиц позволяет сделать вывод о том, что основное влияние на величину пикфактора оказывает коэффициент сглаживания r и зависимость $\Delta p_{rпер}(r)$ имеет нелинейный характер. Наибольшее значение пикфактор принимает при малых значениях r . При увеличении аргумента до 0,4 ... 0,5 имеет место стремительный спад пикфактора. Дальнейшее увеличение коэффициента сглаживания приводит к монотонному спаду пикфактора.

Подводя итоги, можно сделать вывод о том, что наибольшее влияние на величину пикфактора модема оказывает коэффициент многопозиционного кодирования m и коэффициент сглаживания r . Для уменьшения величины пикфактора целесообразно значение r выбирать не менее 0,5.

В дальнейшем при вычислении скорости передачи модема необходимо учитывать полученные аппроксимационные зависимости пикфактора.

Література

1. *Брескин В.А.* Проектирование цифровых систем передачи. – Одесса: ОЭИС, 1987. – 80 с.
2. *Boyd S.* Multitone signals with low crest factor // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1986. – Vol. 33, № 10. – P. 1018-1022.
3. OFDM with Reduced Peak to Average Power Ratio by Multiple Signal Representation / S.H. Muller, R.W. Bauml, R.F.H. Fischer, J.B. Huber // In Annals of Telecommunications. – 1997. – Vol. 52. – №1-2. – P. 58-67.
4. *Henkel W., Wagner B.* Another Application for Trellis Shaping: PAR Reduction for DMT (OFDM) // IEEE Transactions on Communications. – 2000. – Vol. 48, № 9. – P. 1-5.
5. *Chang R.W., Gibby, R.A.* A Theoretical Study of Performance of an Orthogonal Multiplexing Data Transmission Scheme // IEEE Transactions on Communication Technology. – 1968. – Vol. 16, № 4. – P. 529-540.
6. Пат. 3488445 США, МКИ Н 04 J 1/00. Orthogonal frequency multiplex data transmission system: Пат. 3488445 США, МКИ Н 04 J 1/00/ Chang R.W. (США); Bell telephone lab. Inc. - № 594042; Заявл. 14.11.66; Опубл. 6.01.70. НКИ 179/15. – 3 с.
7. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высшая школа, 1983. – 536 с.
8. *Захарченко Н.В., Нудельман П.Я., Кононович В.Г.* Основы передачи дискретных сообщений: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 240 с.