УДК 621.341.27

Панфилов В.И.
Panfilov V.I.

СИНТЕЗ СИГНАЛОВ С ЗАДАННЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ
SYNTHESIS OF SIGNALE WITH TASKED CORRELATION CHARACTERISTICS

Аннотация. Синтез сигналов по корреляционным функциям рассматривался рядом авторов на протяжении длительного времени. Однако в общей постановке эта задача в настоящее время не решена.

В работе на основе теории вариационного исчисления получены системы нелинейных алгебраических уравнений, используя которые можно синтезировать сигналы с заданными корреляционными свойствами. Рассмотрен ряд примеров решения алгебраических уравнений по синтезу сигналов в классе полиномиальных разложений.

Summary. The number of authors considered the synthesis of signals on correlation functions during the long period. However in general putting out this task at the present time has not been solved.

In the work on the basis of theory of variation calculation the systems of non-linear algebraic equations are obtained, using which it is possible to syntesise signals with the tacked correlation properties. A number of examples of solving algebraic equations on synthesis of signals in class of polynomial sampling are considered.

При анализе и синтезе систем связи, когда в каналах действуют помехи с нормальными процессами распределения, оператор оптимальной системы будет линейным [1, 2]. Основной характеристикой нормального процесса является математическое ожидание и корреляционная функция. Если мы хотим оставаться в рамках корреляционной теории случайных функций при синтезе систем передачи информации, когда в канале действуют одновременно различного рода помехи и искажения, необходимо синтезировать сигналы с заданными корреляционными функциями.

Особенно остро стоит задача синтеза сигналов с заданными корреляционными свойствами в системах локации [6].

Проблема синтеза сигналов по корреляционным функциям рассматривалась на протяжении длительного времени рядом авторов [3, 4]. Однако в общей постановке задача синтеза сигнала по заданным многомерным корреляционным функциям $A_{ki}(\tau)$ $(k,i=\overline{1,M})$ в настоящее время не решена.

Для синтеза оптимального сигнала $\varphi_k(t)$ $(k=\overline{1,M})$ по заданной корреляционной функции по среднеквадратичному критерию минимизируем функционал

$$L=\sum_{k=1}^{M}\sum_{k,i}^{m}\sum_{i=1}^{M}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(t)\varphi_i(t-\tau)dt-A_{ki}(\tau)\right]^2 d\tau\,, \tag{1}$$

в классе функций, представленных в виде

$$\varphi_k(t)=\sum_{n=1}^{N}a_{kn}\,\psi_n(t)\,. \tag{2}$$

На функции $\psi_n(t)$ $(n=\overline{1,N})$ наложим пока единственное условие: все интегралы, которые будут возникать в дальнейшем, существуют.

В такой постановке функционал L можно рассматривать как функцию $N\cdot M$ переменных $a_{kn}(k=\overline{1,M}\ ,n=\overline{1,N})$:

$$L=L(a_{11},a_{12},...,a_{1M},a_{21},a_{22},...,a_{2M},...,a_{M1},a_{M2},...,a_{MN})\,.$$

Для нахождения стационарной точки этой функции имеем следующую систему уравнений [5]

$$\frac{\partial L}{\partial a_{Sr}}=0,\qquad S=\overline{1,M},\quad r=\overline{1,N} \tag{3}$$

или, дифференцируя (1) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial a_{Sr}}=2\sum_{k,i=1}^{M}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(t)\varphi_i(t-\tau)dt-A_{ki}(\tau)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi_i(t-\tau)\frac{\upsilon\varphi_k(t)}{\upsilon a_{Sr}}+\varphi_k(t)\frac{\upsilon\varphi_i(t-\tau)}{\upsilon a_{Sr}}\right]dt\right\}d\tau. \tag{4}$$

Из (2) имеем

$$\frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial a_{Sr}} = \begin{cases} 0, \text{если } k \neq S, \\ \varphi_r(t), \text{если } k = S. \end{cases}$$

Следовательно, вместо (4) получаем

$$\frac{\partial L}{\partial a_{Sr}} = 2\sum_{i=1}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_S(t)\varphi_i(t-\tau)dt - A_{Si}(\tau) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t-\tau)\psi_r(t)dt \right\} d\tau +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_S(t-\tau)dt - A_{kS}(\tau) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\psi_r(t-\tau)dt \right\} d\tau = 0 . \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\int \psi_n(t)\psi_m(t-\tau)dt = \gamma_{n,m}(\tau) . \quad (6)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_S(t)\varphi_i(t-\tau)dt = \sum_{n,m}^{N} a_{Sn}a_{im} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t)\psi_m(t-\tau)dt = \sum_{n,m}^{N} a_{Sn}a_{im}\gamma_{n,m}(\tau) ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t-\tau)\psi_r(t)dt = \sum_{p=1}^{N} a_{ip} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_r(t)\psi_p(t-\tau)dt = \sum_{p=1}^{N} a_{ip}\gamma_{rp}(\tau) ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_r(t-\tau)dt = \sum_{p=1}^{N} a_{kp} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t)\psi_r(t-\tau)dt = \sum_{p=1}^{N} a_{kp}\gamma_{kr}(\tau) .$$

С учетом введенных обозначений выражение (5) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{n,m,p=1}^{N} (\Gamma_{n,m,r,p} + \Gamma_{m,n,p,r}) a_{Sn}\, a_{im}\, a_{ip} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{p=1}^{N} (C_{S,i,r,p} + C_{i,S,p,r})\, a_{ip} = 0 , \quad (7)$$

$$r = \overline{1,N} , \quad S = \overline{1,M} ,$$

где

$$\Gamma_{n,m,r,p} = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{n,m}(\tau)\gamma_{r,p}(\tau)d\tau , \quad C_{S,i,r,p} = \int_{-\infty}^{\infty} A_{Si}(\tau)\gamma_{r,p}(\tau)d\tau .$$

Очевидно, что коэффициенты $\Gamma_{n,m,r,p}$ обладают следующими свойствами

1) $\Gamma_{n,m,r,p} = \Gamma_{r,p,n,m}$; (8)

2) $\Gamma_{n,m,r,p} = \Gamma_{m,n,p,r}$. (9)

Таким образом, обозначая

$$G_{S,i,r,p} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}}_{S,i,r,p} + \overline{\overline{C}}_{i,S,p,r}) , \quad (10)$$

(если $A_{iS}(-\tau) = A_{Si}(\tau),$) вместо (7), имеем

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{n,m,p=1}^{N} \Gamma_{n,m,r,p} a_{Sn}a_{im}a_{ip} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{p=1}^{N} G_{S,i,r,p}a_{ip} = 0 , \quad (11)$$

$$(r = \overline{1,N},\ S = \overline{1,M}) .$$

Мы получим систему нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим пример. $M = 1,\ N = 1$.

Можно показать, что в этом случае

$$a_{11} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} A_{11}(\tau)\,\psi_1(\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^2(\tau)d\tau}} \quad (12)$$

и именно при таком a_{11} функционал L достигает минимума, так как в этом случае

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a_{11}^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[3a_{11}^2\psi_{11}^2(\tau) - A_{11}(\tau)\psi_1(\tau)\right]d\tau = 2a_{11}^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^2(\tau)d\tau > 0 .$$

Дальнейшее решение системы (11) будем строить при следующем предположении: можно выбрать такую систему функций

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),...,\psi_N(t),$$

чтобы построенная с их помощью система функций, $\gamma_{n,m}(\tau)$, $n = 1,2,...N$, $m = 1,2,...M$, определяемая соотношением (6) была ортономирована в промежутке $(-\infty,\infty)$. Тогда

$$\Gamma_{n,m,r,p} = \begin{cases} 0, \text{если } n \neq r \text{ или } m \neq p, \\ 1, \text{или } n = r \text{ и } m = p \end{cases}$$

и вместо (11) получим

$$\beta a_{Sr} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{p=1}^{N} G_{S,i,r,p}a_{ip} = 0, \tag{13}$$

$$S = 1,2,...M,\quad r = 1,2,...N,$$

где

$$\beta = \sum_{i,p} a_{ip}^2 . \tag{14}$$

Так как нас интересует ненулевое решение системы (11), то β следует положить равным a^2 – положительному собственному числу матрицы $\{G_{S,i,r,p}\}$. Если у этой матрицы такого собственного числа нет, то система (11) ненулевых решений не имеет.

Пусть, например, β – простой корень характеристического уравнения матрицы $\{G_{S,i,r,p}\}$ и пусть определитель, получающийся из этой матрицы вычеркиванием последних строк и столбца, не равен нулю. Тогда, положив

$$\tilde{a}_{ip} = \frac{a_{ip}}{a_{MN}}, i = 1,2,...,M,\ p = 1,2,...,N(i,p \neq M,N) \tag{15}$$

для определения $\tilde{a}_{ip}$ имеем вместо (13) неоднородную систему уравнений

$$a^2\tilde{a}_{Sr} - \sum_{i,p\neq M,N} G_{S,i,r,p}\tilde{a}_{ip} = G_{S,M,r,N} . \tag{16}$$

Подставляя теперь

$$a_{ip} = \tilde{a}_{ip}a_{MN} \tag{17}$$

в (14), находим a_{MN}:

$$a^2 = \sum_{i,p\neq M,N}\tilde{a}_{ip}a_{MN}^2 + a_{MN}^2,$$

$$a_{MN} = \sqrt{\frac{\beta}{1+\sum\limits_{i,p\neq M,N}\tilde{a}_{ip}^2}} . \tag{18}$$

Рассмотрим пример. $M = 1,\ N = 2$.

Введем, как и ранее, обозначения

$$\mathrm{a}_{\mathrm{ip}} = \mathrm{a}_{\mathrm{1p}} = \mathrm{a}_{\mathrm{p}},\ \beta = \sum_{\mathrm{p=1}}^{\mathrm{N}}\mathrm{a}_{\mathrm{p}}^2,\ \mathrm{G}_{\mathrm{S,i,r,p}} = \mathrm{G}_{\mathrm{1,1,r,p}} = \mathrm{G}_{\mathrm{r,p}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\gamma_{\mathrm{r,p}}(\tau) + \gamma_{\mathrm{p,r}}(\tau)\right]\mathrm{A}(\tau)\mathrm{d}\,\tau ,$$

$$A_{11}(\tau) = A(\tau) .$$

Система (13) приобретает вид

$$G_{r1}a_1 + G_{r2}a_2 - \beta a_r = 0,\ r = 1,2 .$$

После ряда математических преобразований определим

$$a_1 = \frac{aG_{12}}{\sqrt{G_{12}^2 + (G_{11} - a^2)^2}}, \quad a_2 = \frac{a(G_{11} - a^2)}{\sqrt{G_{12}^2 + (G_{11} - a^2)^2}}.$$

Теперь надо показать, что найденные нами числа a_1, a_2 доставляют минимум функционалу L. Проведем преобразования

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial a_2} = a_2(a_1^2 a_2^2) - G_{r1}a_1 - C_{r2}a_2,$$

$$\upsilon_{r\sigma} = \frac{\upsilon^2 L}{\upsilon a_2 \, \upsilon a_\gamma} = \begin{cases} 3a_1 + a_2^2 - G_{11}, \ \sigma = 1, r = 1, \\ 2a_1 a_2 - G_{21}, \sigma = 1, r = 2, \\ a_1^2 + 3a_2^2 - C_{22}, \sigma = 2, r = 2. \end{cases}$$

$$\upsilon_{11} \, 3a_1^2 + a_2^2 - G_{11},$$

Так как $$a^2 > C_{11}, \quad \text{то } \sigma_{11} > 0.$$

Далее не трудно убедиться, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix}$ больше нуля. Отсюда будет следовать, что матрица положительно определенная и значит в точке (a_1, a_2) будет минимум функционала L.

Литература

1. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966.
2. *Зюко А.Г.* Помехоустойчивость и эффективность систем связи. – М.: Связь, 1972.
3. *Френкс Л.* Теория сигналов. – М.: Советское радио, 1974.
4. *Варакин Л.Е.* Теория сложных сигналов. – М.: Советское радио, 1970. – 370 с.
5. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1966. – 320 с.
6. *Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М.* Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Советское радио, 1973. – 311 с.