УДК 621. 391

ТОЧНІСТЬ РОЗРАХУНКУ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА ТА ІМОВІРНОСТІ ОЧІКУВАННЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ ПАКЕТІВ САМОПОДІБНОГО ТРАФІКА

Лєвєнберг Є.В.

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
65029, Україна, м. Одеса, вул. Кузнечна, 1.
levenberg.evgenii@gmail.com

ТОЧНОСТЬ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЯ ХЕРСТА И ВЕРОЯТНОСТИ ОЖИДАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПАКЕТОВ САМОПОДОБНОГО ТРАФИКА

Левенберг Е.В.

Одесская национальна академия связи им. А.С. Попова,
65029, Украина, г. Одесса, ул. Кузнечная, 1.
levenberg.evgenii@gmail.com

CALCULATION ACCURACY OF THE HURST EXPONENT AND SERVICE WAITING PROBABILITY OF PACKETS SELF-SIMILAR TRAFFIC

Levenberg Ye.V.

O.S. Popov Odessa national academy of telecommunications,
1 Kuznechna St., Odessa, 65029, Ukraine.
levenberg.evgenii@gmail.com

Анотація. Оцінка характеристик якості обслуговування (QoS) в одноканальній системі з нескінченною чергою пакетної мережі зв'язку часто зводиться до визначення показника Херста самоподібного трафіка, після чого за формулою Норроса розраховується середня кількість пакетів в системі та всі інші характеристики. Показник Херста можна визначити методом R/S-статистики на основі реальних вимірів характеристик трафіка або з функцій імовірнісних розподілів, що описують цей трафік. Проте, відомі формули розрахунку показника Херста, які показують залежність його від параметрів імовірнісного розподілу трафіка, не є точними. Є метод підвищення точності розрахунку характеристик якості обслуговування в пакетній мережі зв'язку з самоподібним трафіком за рахунок більш точного знаходження коефіцієнта самоподібності або показника Херста в залежності від параметрів імовірнісної функції розподілу інтервалу часу між пакетами. Для випадку, коли в самоподібному трафіку інтервал часу між пакетами описується розподілами Парето або Вейбулла, отримано нові формули розрахунку коефіцієнта самоподібності трафіка на основі параметра форми цих розподілів. Після більш точного визначення показника Херста у такий спосіб, далі розраховується середнє значення кількості пакетів у системі за формулою Норроса, а після цього із запропонованої в роботі апроксимації функції розподілу станів системи розраховуємо імовірність очікування обслуговування пакета. З підвищенням точності розрахунку показника Херста підвищується й точність розрахунку самих характеристик якості обслуговування. Імітаційне моделювання підтвердило коректність даних методів розрахунку характеристик QoS у системі з самоподібним трафіком. При цьому розходження результатів моделювання і розрахунку не перевищує 5% при зміні загрузки системи в діапазоні $0{,}3 < \rho < 1$ і зміні значень показника Херста $0{,}5 < H < 0{,}9$.

Ключові слова: самоподібний трафік, показник Херста, розподіли Парето та Вейбулла, методи розрахунку якості обслуговування, імовірність очікування обслуговування.

Аннотация. Оценка характеристик качества обслуживания (QoS) в одноканальной системе с бесконечной очередью пакетной сети связи часто сводится к определению показателя Херста самоподобного трафика, после чего по формуле Норроса рассчитывается среднее количество пакетов в системе и все другие характеристики. Показатель Херста можно определить методом R/S-статистики на основе реальных измерений характеристик трафика или из функций вероятностных распределений, описывающих этот трафик. Однако, известные формулы расчета показателя Херста, показывающие зависимость его от параметров вероятностного распределения трафика не точны. Предложен метод повышения точности расчета характеристик QoS в пакетной сети связи за счет более точного нахождения коэффициента самоподобности трафика или показателя Херста в зависимости от параметров вероятностной функции распределения интервала времени между пакетами. Для случая, когда в трафике интервал времени между пакетами описывается распределениями Парето или Вейбулла, получены новые формулы расчета коэффициента самоподобности трафика на основе параметра формы этих распределений. После более точного определения показателя Херста таким способом, далее рассчитывается среднее количество пакетов в системе по формуле Норроса, а после этого из предложенной аппроксимации функции распределения состояний системы рассчитывается вероятность ожидания обслуживания пакета. С повышением точности расчета показателя Херста повышается и точность расчета самих характеристик качества обслуживания. Имитационное моделирование подтвердило корректность данных методов расчета характеристик QoS в системе с самоподобным трафиком. При этом расхождение результатов моделирования и расчета не превышает 5% при изменении загрузки системы в диапазоне 0,3 < ρ < 1 и изменении значений показателя Херста 0,5 < *H* < 0,9.

Ключевые слова: самоподобный трафик, показатель Херста, распределения Парето и Вейбулла, методы расчета качества обслуживания, вероятность ожидания обслуживания.

Abstract. Estimation of the service quality (QoS) characteristics in a single-channel system with an infinite queue of the packet network often reduces to determining the Hurst exponent of self-similar traffic, after which on the Norros formula calculates the average number of packets in the system and all other characteristics. The Hurst exponent can be determined by *R*/*S*-statistics method based on actual measurements of traffic characteristics or from probability distribution functions describing this traffic. However, the well-known formulas for calculating the Hurst exponent, which show its dependence on the parameters of the probability distribution of traffic, are not accurate. A method is proposed for improving the accuracy of calculating QoS characteristics in a packet communication network by more accurately finding the traffic self-similarity coefficient or the Hurst exponent depending on the parameters of the probability distribution function of the time interval between packets. In case when, in traffic, the time interval between packets is described by Pareto or Weibull distributions, new formulas have been obtained for calculating the traffic self-similarity factor based on the shape parameter of these distributions. After a more accurate determination of the Hurst exponent in this way, the average number of packets in the system is then calculated using the Norros formula, and then from the proposed approximation of the system state distribution function, service waiting probability of packet to calculate. With an increase in the accuracy of calculating the Hurst exponent, the accuracy of calculating the service quality characteristics also increases. Simulation modeling confirmed the validity of these methods for calculating QoS characteristics in a system with self-similar traffic. In this case, the discrepancy between the results of modeling and calculation does not exceed 5% when the system load changes in the range of 0.3 < ρ < 1 and the value of the Hurst exponent is 0.5 < *H* < 0.9.

Key words: self-similar traffic, the Hurst exponent, quality of service calculation methods, Pareto and Weibull distributions, service waiting probability.

Характеристики якості обслуговування (QoS) у будь-якій телекомунікаційній системі, яка представлена як система масового обслуговування (СМО), залежать від схеми системи, правил обслуговування вимог, які надходять до системи, та найбільшою мірою від типу трафіка, що утворюється потоком вимог системи. У пакетних мережах зв’язку застосовують математичну модель самоподібного трафіка, де інтервал часу між пакетами описується розподілами Парето або Вейбулла [1]. Зі зростанням ступеня самоподібності пакетного трафіка характеристики QoS у системі суттєво погіршуються порівняно з обслуговуванням, наприклад, пуассонівського трафіка, але для такого трафіка не існує достовірної методики розрахунку характеристик якості обслуговування. Ступінь самоподібності трафіка визначається показником Херста *H*, називаним іноді коефіцієнтом самоподібності.

Оцінка характеристик якості обслуговування в одноканальній системі з нескінченною чергою пакетної мережі зв’язку часто зводиться до визначення показника Херста самоподібного трафіка, після чого за формулою Норроса розраховується середня кількість пакетів у системі та всі інші характеристики. Показник Херста можна визначити методом *R*/*S*-статистики на основі реальних вимірів характеристик трафіка або з функцій імовірнісних розподілів, що описують цей трафік. Проте, відомі формули розрахунку показника Херста, які показують залежність його від параметрів імовірнісного розподілу трафіка не є точними. Є метод підвищення точності розрахунку характеристик якості обслуговування в пакетній мережі зв'язку з самоподібним трафіком за рахунок більш точного знаходження коефіцієнта самоподібності або показника Херста в залежності від параметрів імовірнісної функції розподілу інтервалу часу між пакетами [2, 3]. Для випадку, коли в самоподібному трафіку інтервал часу між пакетами описується розподілами Парето або Вейбулла, отримано нові формули розрахунку коефіцієнта самоподібності трафіка на основі параметра форми цих розподілів. Після більш точного визначення показника Херста у такий спосіб, далі розраховується середнє значення кількості пакетів у системі за формулою Норроса, а після цього із запропонованої в роботі апроксимації функції розподілу станів системи розраховуємо імовірність очікування обслуговування пакета.

Метою даної статті є оцінка точності розрахунку показника Херста та імовірності очікування обслуговування пакетів самоподібного трафіка.

Для самоподібного трафіка пакетних мереж зв'язку інтервал часу між надходженнями пакетів описується імовірнісними розподілами з так званим «довгим хвостом», до яких відносяться розподіли Парето та Вейбулла.

Густина розподілу Парето задається функцією:

$$f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1},$$

де a – параметр форми; b – мода розподілу (мінімальне значення випадкової величини x). Причому, при $a \le 2$ дисперсія нескінченна (одна з умов самоподіпобності).

Густина розподілу Вейбулла задається функцією:

$$\lambda_0 a x^{a-1} e^{-\lambda_0 x^a},$$

де a – параметр форми; λ_0 – коефіцієнт масштабу.

Основним параметром розподілу в обох імовірнісних розподілах є параметр форми a (*shape parameter*), який, як прийнято вважати [1], знаходиться з показником Херста H у такій залежності:

$$H_P = \frac{3-a}{2} \text{ – за розподілу Парето;} \quad (1)$$

$$H_W = \frac{2-a}{2} \text{ – за розподілу Вейбулла.} \quad (2)$$

При цьому зміна параметра форми a від 1 до 2 за розподілу Парето (P) та від 0 до 1 за розподілу Вейбулла (W) мала б давати значення показника Херста в межах H = 0,5…1, що й необхідно для самоподібного процесу. Однак, імітаційним моделюванням [3] встановлено і методами математичної статистики за допомогою критерію узгодженості Пірсона χ^2 доведено, що реально ці співвідношення такі:

$$H_{P\_new} = a^{-0,78} \text{ – за розподілу Парето;} \quad (3)$$

$$H_{W\_new} = 1{,}2e^{-9a} + 0{,}5 \text{ – за розподілу Вейбулла.} \quad (4)$$

Таким чином, для розрахунку показника Херста достатньо знати тільки параметр форми *a* розподілів Парето або Вейбулла, що описують даний трафік, і не треба обчислювати для цього трафіка дуже складним способом, наприклад, методом абсолютних моментів або методом *R*/*S*-статистики, коефіцієнт самоподібності або показник Херста. З використанням реальних залежностей коефіцієнта *H* від параметра форми *a* розподілів Парето або Вейбулла (3) та (4) підвищується точність розрахунку показника Херста і, як наслідок, потому точність розрахунку характеристик QoS за формулою Норроса підвищується ще більш суттєво. Приклад результатів розрахунку та моделювання для трафіка, генерованого за розподілом Вейбулла, надано у табл. 1 та 2.

Таблиця 1 – Показник Херста трафіка за розподілу Вейбулла з параметром форми a = 0,3

Показник Херста, *H*	**Завантаження системи, ρ**						
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Моделювання, H	0,595	0,599	0,596	0,584	0,584	0,579	0,587
Формула (2), H_w	**0,850**						
Похибка, %	42,8	41,9	42,6	45,5	45,5	46,8	44,8
Формула (4), H_{w_new}	**0,591**						
Похибка, %	-0,7	-1,3	-0,8	1,1	1,1	2,0	0,7

З табл. 1 видно, що інтенсивність трафіка не впливає на властивості самоподібності трафіка і розрахунки показника Херста за формулою (4) є на порядок точніше, ніж за формулою (2). Така сама залежність є й для формул (1) та (3).

У табл. 2 надано приклад розрахунку та результатів моделювання для трафіка, генерованого за розподілом Вейбулла за постійною інтенсивністю навантаження ρ = 0,7.

Таблиця 2 – Показник Херста трафіка з інтенсивністю ρ = 0,7 за розподілу Вейбулла

Показник Херста, *H*	**Параметр форми розподілу, *a***						
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Моделювання, H	0,699	0,578	0,564	0,529	0,524	0,515	0,511
Формула (2), H_w	0,900	**0,850**	0,800	0,750	0,700	0,650	0,600
Похибка, %	28,7	47,1	41,8	41,8	33,6	26,2	17,4
Формула (4), H_{w_new}	0,708	**0,591**	0,543	0,523	0,515	0,512	0,511
Похибка, %	1,3	2,2	-3,7	-1,1	-1,7	-0,5	0

З табл. 2 випливає суттєва різниця між реальною та використовуваною тепер лінійною залежністю коефіцієнта самоподібності *H* від параметра форми *a* розподілу Вейбулла або різниці між реальною та поточною лінійною залежністю показника Херста *H* на параметр форми *a* розподілу Вейбулла для системи fBM/D/1/∞. Використання реальних функціональних залежностей *H* і *a* дає змогу покращити точність розрахунку характеристик якості обслуговування на порядок. Це дозволяє розраховувати характеристики якості обслуговування самоподібного трафіка, описаного розподілом Вейбулла або Парето в одноканальній системі fBM/D/1/∞ з дискретним часом обслуговування пакетів набагато простіше. Ця простота пояснюється тим, що для розрахунку необхідно знати лише параметр форми *a* розподілу Вейбулла або Парето і немає необхідності обчислювати для трафіка коефіцієнт самоподібності (показник Херста) досить складним і трудомістким шляхом, наприклад, за допомогою методу *R*/*S*-статистики [3].

Оцінка характеристик QoS у СМО виконується на основі математичного опису реакції системи на вхідний потік пакетів. За реакцію системи розуміють її стани, які математично описуються імовірнісною функцією розподілу кількості зайнятих каналів та місць очікування. У випадку пуассонівської моделі потоку стани системи описуються одним із відомих розподілів Ерланга [2]. Знаходження функції розподілу станів системи при більш складних моделях потоків – це дуже важка задача, і тому аналогічних рішень нема.

За довільного потоку пакетів у системі імовірність очікування P_w обслуговування пакету можна розрахувати з імовірнісного розподілу станів системи або кількості пакетів у системі *в моменти надходження нових пакетів* r_k, де k – кількість пакетів, за формулою:

$$P_w = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \ . \tag{5}$$

Отже, у випадку самоподібного трафіка з розподілом інтервалу часу між моментами надходження пакетів за законами Парето або Вейбулла розрахунок імовірності очікування обслуговування можливий з функції розподілу станів системи в моменти надходження нових пакетів r_k, яка достатньо якісно узгоджується із апроксимуючою функцією B_i:

$$B_i = \frac{\rho}{N}\exp\left(-\frac{\rho}{N} i\right), \tag{6}$$

де ρ – загрузка системи ($0{,}3 < \rho < 1$); N – середня кількість пакетів у системі.

Тому, відповідно до виразів (5) і (6) імовірність очікування обслуговування пакета в одноканальній системі з нескінченною чергою типу $fBM/D/1/\infty$ визначиться так [4, 5]:

$$P_w = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \approx \sum_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho}{N}\exp\left(-\frac{\rho}{N} k\right). \tag{7}$$

Отже, визначивши коефіцієнт Херста, розраховуємо середнє значення кількості пакетів у системі N за формулою Норроса [2], а після з апроксимацією (6) за формулою (7) розраховуємо імовірність очікування обслуговування пакета P_w. Далі за відомими співвідношеннями [1] розраховуються: середня кількість пакетів у черзі Q, середній час перебування пакетів у системі T і затримки пакетів у системі W. Після цього розраховуємо середній час затримки пакетів у вхідному буфері t_q [2].

У табл. 3 надано результати обчислення та моделювання трафіка за розподілом Вейбулла з параметром форми $a = 0{,}2$ та показником Херста $H = 0{,}71$.

Імовірність очікування обслуговування отримана шляхом розрахунку та імітаційного моделювання з відносною похибкою розрахунку не більше 1% протягом усього діапазону зміни коефіцієнта використання ρ = 0,1 ... 0,9.

Таблиця 3 – Моделювання трафіка за розподілом Вейбулла

Навантаження, ρ	**Імовірність очікування, P_w**			
	Моделювання	**Розрахунок за формулою (7)**	**Відносна похибка, %**	**Максимальне / Середнє, *N***
0,1	0,89648	0,90182	0,6	105/0,86
0,2	0,94171	0,94067	-0,1	176/3,01
0,3	0,96322	0,96150	-0,2	247/7,22
0,4	0,97672	0,97516	-0,2	419/15,6
0,5	0,98493	0,98383	-0,1	580/30,6
0,6	0,99048	0,98953	-0,1	831/57,2
0,7	0,99434	0,99366	-0,1	1395/108
0,8	0,99723	0,99690	-0,1	2414/258
0,9	0,99873	0,99852	-0,08	4217/596

У табл. 4 надано результати розрахунку та моделювання трафіка за розподілом Парето з параметром форми a = 1,55 та показником Херста H = 0,71.

Імовірність очікування обслуговування, яка отримана шляхом розрахунку та імітаційного моделювання, майже однакова з відносною похибкою розрахунку не більше 1% протягом усього діапазону зміни коефіцієнта використання ρ 0,1 ... 0,9. Чим більше значення показника H та завантаженості ρ, тим вища точність.

Таблиця 4 – Моделювання трафіка за розподілом Парето

Навантаження, ρ	**Імовірність очікування, P_w**			
	Моделювання	**Розрахунок за формулою (7)**	**Відносна похибка, %**	**Максимальне / Середнє, *N***
0,1	0,25585	0,75523	195,2	8/0,12
0,2	0,45917	0,75000	63,3	13/0,29
0,3	0,61759	0,75774	22,7	20/0,57
0,4	0,73881	0,7822	5,8	26/1,0
0,5	0,82984	0,82215	-1,0	41/1,9
0,6	0,89796	0,87321	-2,8	67/3,72
0,7	0,94516	0,92254	-2,4	129/7,93
0,8	0,97598	0,96441	-1,2	308/21,4
0,9	0,99424	0,99111	-0,3	720/95,6

Тут прийнятна точність розрахунку отримується лише тоді, коли коефіцієнт використання $\rho > 0,3$. Якщо значення $H > 0,7$, точність розрахунку буде прийнятною протягом всього діапазону зміни ρ. Якщо значення $H < 0,7$, навіть для розподілу Вейбулла, точність буде гіршою і таким самим чином, як у випадку з Парето. З табл. 3 та 4 випливає, що для однакових значень H існують різні характеристики QoS для розподілів Вейбулла та Парето. Імітаційне моделювання підтвердило коректність даних методів розрахунку характеристик QoS у системі з самоподібним трафіком. При цьому розходження результатів моделювання і розрахунку не перевищує 5% при зміні загрузки системи в діапазоні $0,3 < \rho < 1$ (при $\rho \geq 0,6$ похибка менше 2%) і зміні значень показника Херста $0,5 < H < 0,9$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Крылов В.В. Теория телетрафика и её приложения / В.В. Крылов, С.С. Самохвалова – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.: ил.
2. Ложковський А.Г. Нові методи теорії телетрафіка / Ложковський А.Г. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2018. – 80 с.
3. Lozhkovskyi A.G. Dependence approximation of the Hurst coefficient on the traffic distribution parameter / A.G. Lozhkovskyi, Ye.V. Levenberg // Information & Telecommunication Sciences. – 2017. – № 2. – P.18-22.
4. Lozhkovskyi A.G. Estimating the service waiting probability in a single-channel system with self-similar traffic / A.G. Lozhkovskyi, Ye.V. Levenberg // Збірник наукових праць ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2018. – № 1. – P. 22-26.
5. Lozhkovskyi A.G. Calculation the packets average delay time in storage buffer of the single-channel system with self-similar traffic / A.G. Lozhkovskyi, Ye.V. Levenberg // Computational problems of electrical engineering. – 2017. – Vol. 7, № 2.– P. 87-91.

REFERENCES:

1. V. Krylov and S. Samokhvalova, The theory of teletraffic and its applications, St. Petersburg, Russia: BHV-Petersburg, 2005. (Russian).
2. Lozhkovskyi A.G. New methods of teletraffic theory / Odesa: O.S. Popov ONAT, 2018. (Ukrainian).
3. Lozhkovskyi A.G. and Levenberg Ye.V. Dependence approximation of the Hurst coefficient on the traffic distribution parameter / Information & Telecommunication Sciences, №2, P.18-22, 2017.
4. Lozhkovskyi A.G. and Levenberg Ye.V. Estimating the service waiting probability in a single-channel system with self-similar traffic / Scientific Papers of O.S. Popov ONAT, №1, P. 22-26, 2018.
5. Lozhkovskyi A.G. and Levenberg Ye.V. Calculation the packets average delay time in storage buffer of the single-channel system with self-similar traffic / Computational problems of electrical engineering, Vol. 7, №2, P. 87-91, 2017.

DOI 10.33243/2518-7139-2019-1-1-80-86