УДК 621.396.93

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ БЛОЧНЫХ КОДОВ ДИСПЕРСИОННЫМИ МАТРИЦАМИ

БАЛУТА М.Ю.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

REPRESENTATION OF SPACE TIME BLOCK CODES BY DISPERSION MATRICES

BALUTA M.Y.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S.Popov

Аннотация. *В статье обоснован метод описания пространственно-временных блочных кодов дисперсионными матрицами. Использование этого метода позволяет конструировать новые эффективные коды.*

Abstract. *The dispersion matrices description method of space-time block codes is justified in the article. Using this method allows to design effective new codes.*

ВВЕДЕНИЕ

С увеличением спроса на беспроводные услуги связи возрастает необходимость повышения скорости передачи и надежности беспроводных систем связи. Использование множества антенн на приеме и передаче (MIMO) позволяет значительно повысить эффективность системы передачи в условиях многолучевого распространения сигнала без увеличения занимаемой полосы частот. Одним из способов улучшения параметров таких систем является использование пространственно-временных блочных кодов. В [1] Аламоути предложил простую схему кодирования, которая обеспечивает полный выигрыш за счет разнесения и при этом не требует знания характеристик канала на передаче. Но такая схема была применима только для двух передающих антенн. В последующем Тарок в работе [2] обобщил принцип кодирования для произвольного числа передающих антенн в классе ортогональных пространственно-временных блочных кодов (ОПВБК). Кроме обеспечения полного выигрыша за счет разнесения, такие коды также требуют реализации невысокой сложности детектора максимального правдоподобия на приеме, что делает их привлекательными для использования. Но такие коды позволяют повысить только надежность системы передачи и никак не повышают скорость передачи данных. В свою очередь Фосчини предложил в [3] алгоритмы V-BLAST и D-BLAST для повышения скорости передачи данных при использовании множества антенн на передаче. При этом такие алгоритмы не обеспечивают никакого повышения надежности системы передачи. Причиной таких крайностей является то, что изначально вопросы помехоустойчивости и пропускной способности MIMO систем рассматривались отдельно. При этом для разработки эффективных пространственно-временных кодов необходимо рассматривать оба вопроса вместе. Дисперсионная линейная модель [4] позволяет обобщить представление пространственно-временных кодов, одновременно учитывая показатели помехоустойчивости и пропускной способности MIMO систем. Таким образом, целью данной работы является представление пространственно-временных блочных кодов дисперсионными матрицами для дальнейшего конструирования эффективных пространственно-временных блочных кодов.

ЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ

Классическое представление передаваемой матрицы **X** пространственно-временно кода дисперсионными матрицами следующее

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}_i \Re(x_i) + \mathrm{j}\mathbf{B}_i \Im(x_i)), \tag{1}$$

где $\{\mathbf{A}_i\}$ и $\{\mathbf{B}_i\}$ два набора дисперсионных матриц; $\mathbf{A}_i$ отождествляется с вещественной, а $\mathbf{B}_i$ с мнимой частью комплексного символа данных x_i.

В [5] было предложено использовать один набор дисперсионных матриц, который получается путем объединения двух наборов дисперсионных матриц $\{\mathbf{A}_i\}$ и $\{\mathbf{B}_i\}$, с целью дальнейшей оптимизации

$$\{\mathbf{C}_i\} = \{\mathbf{A}_i\} \cup \{\mathrm{j}\mathbf{B}_i\}. \tag{2}$$

Таким образом, линейная дисперсионная модель определяет передаваемые матицы как весовую сумму дисперсионных матриц $\mathbf{C}_i$, где весовые коэффициенты являются информацией, которую переносят символы x_i. Математически это выражается как

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{C}_i \,. \tag{3}$$

Набор дисперсионных матриц, удовлетворяющих

$$\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i^H = \mathbf{I} \;\; \forall i \;\text{ и }\; \mathbf{C}_i\mathbf{C}_j^H = -\mathbf{C}_j\mathbf{C}_i^H \;\; \forall i \neq j\,, \tag{4}$$

определяют ОПВБК [5].

Заметим, что любой набор дисперсионных матриц, удовлетворяющий условиям определения ОПВБК, называется обобщенной комплексной ортогональной конструкцией. Таким образом, существование ОПВБК связано с существованием комплексных ортогональных конструкций. Отметим также, что условия определения ОПВБК (4) охватывают все комплексные ортогональные конструкции.

НАБОРЫ ПОДПРОСТРАНСТВ ИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим наборы дисперсионных матриц, которые удовлетворяют условиям определения ОПВБК (4). Такие наборы могут быть представлены в канонической форме множеств. Первая дисперсионная матрица будет иметь вид

$$\mathbf{C}_1 = (\mathbf{I} \quad \mathbf{0}). \tag{5}$$

К такой форме удобно применить сингулярное разложение

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{U}_1(\mathbf{I} \quad \mathbf{0})\mathbf{W}_1^H \tag{6}$$

с унитарными матрицами $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{W}_1$, которые различаются по размеру, если матрица $\mathbf{C}_1$ не квадратная. Каноническая форма исходного набора дисперсионных матриц определяется с помощью этих унитарных матриц для всех дисперсионных матриц $\mathbf{C}_i = \mathbf{U}_1^H\mathbf{C}_i\mathbf{W}_1$. Отметим, что сингулярное разложение не уникально, таким образом, и каноническая форма также не уникальна.

Очевидно, что полученный набор по-прежнему удовлетворяет условиям определения ОПВБК. Отметим также, что такое преобразование сохраняет все существенные свойства ПВБК.

Представление обычных ортогональных конструкций (случай квадратных дисперсионных матриц) ОПВБК в их канонической форме подразумевает, что все дисперсионные матрицы $\mathbf{C}_i$ кроме $\mathbf{C}_1$ косоэрмитовы и унитарны. Таким образом, существует спектральное (собственное) разложение

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{U}_i \begin{pmatrix} \mathrm{j}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathrm{j}\mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{U}_i^H \;\; \forall i \neq 1, \tag{7}$$

где $\mathbf{U}_i$ унитарная матрица.

Матрицы $\mathbf{C}_i$ строятся только из двух собственных значений. Эти собственные значения должны быть мнимые, т.к. дисперсионная матрица должна быть косоэрмитовой. При этом абсолютное значение должно быть единицей, т.к. матрицы унитарны. Таким образом, это приводит к выбору или j или –j для собственных значений.

В зависимости от размерности дисперсионных матриц, как минимум одно собственное значение будем иметь геометрическую кратность больше 1. Отметим, что все существующие ОПВБК имеют оба собственных значения одинаковой геометрической кратности (что в дальнейшем и будем считать).

Если собственные значения имеют геометрическую кратность больше 1, то они определяются собственным подпространством вместо собственного вектора.

Для создания собственного подпространства, разобьем

$$\mathbf{U}_i = (\mathbf{U}_i^+ \quad \mathbf{U}_i^-) \tag{8}$$

на 2 части. $\mathbf{U}^+$ представляет собой собственное подпространство, которое связано с собственным значением j (соответственно, $\mathbf{U}^-$ связано с -j). Рассмотрим следующую измененную версию $\mathbf{U}_i$:

$$\mathbf{U}_{i,\text{изм}} = \mathbf{U}_i \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Psi}^- \end{pmatrix} = (\mathbf{U}_i^+\mathbf{\Psi}^+ \quad \mathbf{U}_i^-\mathbf{\Psi}^-), \tag{9}$$

где $\mathbf{\Psi}^+$ и $\mathbf{\Psi}^-$ унитарные матрицы одинакового размера. При этом дисперсионная матрица $\mathbf{C}_i$ останется неизменной. Таким образом, $\mathbf{U}_i^+\mathbf{\Psi}^+$ дает другой базис того же подпространства, поскольку $\mathbf{\Psi}^+$ унитарна. Применяя произвольные, но унитарные $\mathbf{\Psi}^+$, можно охватить все возможные ортогональные базисы того же подпространства. Уникальным представлением подпространства будет

$$\mathbf{P}_i^+ = \mathbf{U}_i^+\mathbf{U}_i^{+H} = \mathbf{U}_{i,\text{изм}}^+\mathbf{U}_{i,\text{изм}}^{+H}, \tag{10}$$

которое называется матричным проецированием. Отметим, что $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$ являются дополняющими подпространствами, т.е. $\mathbf{U}_i^{+H}\mathbf{U}_i^- = \mathbf{0}$.

Из приведенных выше соображений получаем выражение $\mathbf{I} = \mathbf{U}_i^+\mathbf{U}_i^{+H} + \mathbf{U}_i^-\mathbf{U}_i^{-H} = \mathbf{P}_i^+ + \mathbf{P}_i^-$, которое дает прямое соответствие между $\mathbf{P}_i^+$ и дисперсионной матрицей $\mathbf{C}_i$:

$$\mathbf{C}_i = \mathrm{j}(2\mathbf{P}_i^+ - \mathbf{I}) \quad \forall i \neq 1 \tag{11}$$

Таким образом, набор дисперсионных матриц связан с уникальным набором подпространств. В математической терминологии, эти подпространства обозначаются точками на Грассманиановом многообразии $G(l,k)$.

СВОЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВ, КОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮТ ДИСПЕРСИОННЫЕ МАТРИЦЫ

Не смотря на отмеченную выше связь между ОПВБК и набором подпространств, не все наборы подпространств дадут наборы дисперсионных матриц, описывающие допустимые ОПВБК. Таким образом, необходимо определить необходимые и достаточные свойства наборов подпространств, которые бы определяли наборы дисперсионных матриц, соответствующие ОПВБК.

Рассмотрим отношение между двумя произвольными подпространствами $\mathbf{U}_i^+$ и $\mathbf{U}_j^+$. Т.к. $\mathbf{U}_i^+$ и $\mathbf{U}_j^+$ являются лишь представителями подпространств (т.к. представление подпространства не уникально), то можно выбрать в качестве базиса обоих подпространств произведение матриц

$$\mathbf{\Psi}_{ij}^{+H}\mathbf{U}_i^{+H}\mathbf{U}_j^+\mathbf{\Psi}_{ji}^+ = \cos(\mathbf{\Phi}_{ij}), \tag{12}$$

которая является диагональной матрицей с положительными элементами. $\mathbf{\Psi}_{ij}^+$ и $\mathbf{\Psi}_{ji}^+$ унитарные матрицы, которые должны определяться надлежащим образом (выбираются такими, чтобы выполнялось выражение (12)). Таким образом, выражение (12) является сингулярным разложением $\mathbf{U}_i^{+H}\mathbf{U}_j^+$. Сингулярные значения, как известно, будут косинусами основных углов $\mathbf{\Phi}_{ij}$ между двумя рассматриваемыми подпространствами.

Разложение в (12) также применимо для дополняющих подпространств. Так как произведение таких матриц связано с проецированием подпространств друг на друга (матричное произведение дополняющих подпространств дает диагональные значения синусов основных углов), то в результате получим

$$\mathbf{\Psi}_{ij}^H\mathbf{U}_i^H\mathbf{U}_j\mathbf{\Psi}_{ji} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{\Phi}_{ij}) & -\sin(\mathbf{\Phi}_{ij}) \\ \sin(\mathbf{\Phi}_{ij}) & \cos(\mathbf{\Phi}_{ij}) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{\Psi}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}_{ij}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Psi}_{ij}^- \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{\Psi}_{ji} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}_{ji}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Psi}_{ji}^- \end{pmatrix} \tag{14}$$

с надлежащим выбором унитарных $\mathbf{\Psi}_{ij}^{+}, \mathbf{\Psi}_{ij}^{-}, \mathbf{\Psi}_{ji}^{+}, \mathbf{\Psi}_{ji}^{-}$. Разложение (13) также известно как косинус-синус разложение. В итоге, для определения свойств подпространств, перепишем $\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j^H$ как функции основных углов

$$\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j^H = \mathbf{C}_i\mathbf{C}_j^H\mathbf{U}_i\mathbf{U}_j^H = \mathbf{U}_i\left(\begin{pmatrix} \mathrm{j}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathrm{j}\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{U}_i^H\mathbf{U}_j\begin{pmatrix} -\mathrm{j}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathrm{j}\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{U}_j^H\mathbf{U}_i\right)\mathbf{U}_i^H =$$

$$= \mathbf{U}_i\mathbf{\Psi}_{ij}\begin{pmatrix} \cos(2\mathbf{\Phi}_{ij}) & \sin(2\mathbf{\Phi}_{ij}) \\ -\sin(2\mathbf{\Phi}_{ij}) & \cos(2\mathbf{\Phi}_{ij}) \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}_{ij}^H\mathbf{U}_i^H. \quad (15)$$

Поскольку произведение $\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j^H$ для любых двух дисперсионных матриц должно быть косоэрмитовым для ОПВБК, то с учетом (15) должно выполняться следующее условие для основных углов

$$\cos(2\mathbf{\Phi}_{ij}) = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Это приводит к условию

$$\mathbf{\Phi}_{ij} = \frac{\pi}{4}\mathbf{I} \quad \forall i \neq j. \quad (17)$$

Тогда набор дисперсионных матриц $C = \{\mathbf{I}, \mathrm{j}(2\mathbf{U}_2^{+}\mathbf{U}_2^{+H} - \mathbf{I}), \mathbf{K}, \mathrm{j}(2\mathbf{U}_n^{+}\mathbf{U}_n^{+H} - \mathbf{I})\}$ определяет ОПВБК.

ВЫВОДЫ

В работе было проведено математическое представление пространственно-временных блочных кодов дисперсионными матрицами, представлены условия определения ОПВБК дисперсионными матрицами. Представление наборов дисперсионных матриц в канонической форме множеств позволило связать дисперсионные матрицы с точками на Грассманиановом многообразии, которые соответствуют уникальным наборам подпространств $\mathbf{P}_i^{+}$. Определены необходимые и достаточные свойства наборов подпространств, которые определяют наборы дисперсионных матриц, соответствующих ОПВБК.

Полученные результаты дают возможность конструировать новые пространственно-временные блочные коды, одновременно учитывающие показатели надежности и скорости передачи информации, что и является целью дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1 1 Alamouti S.M. A simple transmit diversity technique for wireless communications / Alamouti S.M. // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 1998. – Vol. 16. – P. 1451-1458 .

2 Tarokh V. Space-time block codes from orthogonal designs / Tarokh V., Jafarkhani H., Calderbank // IEEE Transactions on Information Theory – July, 1999. – Vol. 45, №. 5. – P. 1456-1467 .

3 Foschini G.J. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas / Foschini G.J. // Bell Labs Syst. Tech. J. – Autumn, 1996. – P. 41-59 .

4 Hassibi B. High-rate codes that are linear in space and time / Hassibi B., Hochwald B. M. // IEEE Transactions on Information Theory – July, 2002. – Vol. 48, №. 7. – 1804-1824 pp.

5 Pietsch C. Coherent Space Time Block Codes from Sets of Subspaces / Pietsch C – Neu-Ulm. – October, 2008. – 148 p.