УДК 621.391.1

НОВЫЕ ДВОИЧНЫЕ РЕКУРСИВНЫЕ СВЁРТОЧНЫЕ КОДЫ

НИКОЛАЙЧУК Н.В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

RECURSIVE NEW BINARY CONVOLUTIONAL CODES

NIKOLAYCHUK N.V.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

Аннотация. *В статье представлены теоретические подходы и методы поиска двоичных рекурсивных кодов. Изложенные результаты данного поиска могут быть использованы для поиска рекурсивных кодов с более высокими скоростями, а также недвоичных кодов для каналов с многопозиционными сигналами.*

Abstract. *The article presents the theoretical approaches and methods to recursive binary search codes. Set out the results of this search can be used to search for recursive codes with higher speeds, as well as non-binary codes for channels with multi-position signals.*

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих статьях [1, 2] исследованы свойства нового класса свёрточных кодов: рекурсивных кодов (РСК). В работе [2] показано, что верхняя граница свободного расстояния рекурсивных кодов существенно превышает верхнюю границу для нерекурсивных кодов, широко используемых в телекоммуникационных системах, и обосновано целесообразность поиска новых рекурсивных кодов. Эта статья, представляя методику и результаты такого поиска, завершает публикацию цикла работ, посвященных свойствам РСК. Для поиска кодов использованы программы, разработанные в среде объектно-ориентированного визуального программирования *HPVEE* фирмы *Hewlet Packard.*

ПЕРЕБОРНЫЙ ПОИСК ПОРОЖДАЮЩИХ МНОГОЧЛЕНОВ РСК

Сведения о дистанционных характеристиках лучших двоичных нерекурсивных СК опубликованы в многочисленных справочных таблицах кодов [3…5]. К настоящему времени теория синтеза порождающих многочленов СК не разработана. Традиционным и широко используемым методом отыскания порождающих многочленов оптимальных кодов является переборный поиск [4]. Причем, способы организации такого поиска в каждом конкретном случае различны, определяются средой программирования и искусством программиста. В монографии [4] дано описание простого и легко реализуемого метода для переборного поиска порождающих многочленов СК, основанного на описанной в статье [2] концепции “*тест-пакета*”. Для переборного поиска многочленов оптимальных РСК с максимальным свободным расстоянием этот метод был доработан.

Для организации переборного поиска порождающих многочленов необходимо выполнение ряда условий:

1. Алгоритм перебора должен содержать блок вычисления параметра кода, по которому производится переборный поиск (например, свободное расстояние СК d_f).

2. Предполагается, что перебор производится вплоть до выполнения условий остановки перебора.

Должен быть сформулирован критерий остановки:

– критерий ($d_f = L$)–равенство расстояния заданной величине L. Такой критерий остановки поиска применим, когда известно ожидаемое расстояние $d_f = L$, но при этом возможен пропуск «лучшего» кода;

– критерий ($d_f > L$) – превышение расстоянием заданного порога L.

3.Должна быть обеспечена полнота перебора с гарантией отсутствия пропусков. Поскольку многие переборные методы требуют определенных затрат времени на производство вычислений, должны быть предприняты меры по сокращению времени вычислений.

Наиболее ответственной и трудоемкой в процедурах поиска кодов является реализация п.1– вычисление свободного расстояния РСК. Здесь использована описанная ранее в статье [2] концепция “тест-пакета”, которая базируется на известных положениях теории линейных свёрточных кодов:

1. *Дистанционные свойства* СК определяются решетчатой диаграммой кода. Набор двоичных весов путей на решетке характеризует спектр расстояний кода. Минимальный вес пути из набора путей, ответвляющихся от нулевого состояния и сливающегося далее также с нулевым состоянием определяет свободное расстояние СК d_f.

2. *Полное перечисление всех возможных путей* на диаграмме состояний возможно при условии действия на входе кодера всех вариантов кодируемой последовательности, полностью заполняющей регистр кодера.

Эти положения определяют структуру так называемого. “*тест-пакета*”, используемого для исследований дистанционных свойств СК. Метод тест-пакета основан на моделировании выходных последовательностей кодера при воздействии на его вход специальным образом сформированного тест-пакета, который обеспечивает “*порождение*” кодером всех возможных путей из начального нулевого состояния (000..00) в такое же нулевое состояние. Для гарантии перебора *всех возможных путей* центральная часть тест-пакета (*активная часть*– случайная последовательность СП на интервале *T*) должна содержать все возможные комбинации входных символов. Для обеспечения *полноты вариантов* активной части пакета она формируется из потока случайных равновероятных независимых символов. В этом случае имеется гарантия *полного перебора* ненулевых путей на выходе кодера. В последующем производится *анализ путей на выходе кодера* с целью оценки распределения весов.

Форма тест-пакета и временные диаграммы приведены на рис. 1. Пакет содержит центральную “*активную*” часть СП длиной *T=Z2–Z1* символов, которая заполнена случайной последовательностью символов и окружена *отрезками из нулевых символов*. Длина пакета равна ***P***. При подаче такого пакета на вход кодера на его выходе формируется последовательность кодовых символов, центральная часть которой содержит символы путей, соединяющих нулевые состояния кодера. Для определения весов анализируемых путей они подаются на накопитель (в виде интегратора со сбросом, реализуемого блоком аккумулятора пакета *HP VEE*). Аккумулятор накапливает значения символов анализируемого пути и сохраняет результат накопления до момента отсчета. Выход аккумулятора подается на блок анализа весов, реализуемого в пакете *HPVEE* на базе объекта *Distribution*. Работа аккумулятора должна быть согласована во времени с прохождением пакета через кодер: сброс производится в момент *C*, и отсчет веса пути производится в момент *S*.

Отсчитанные значения весов путей подаются на схему анализа, в которой организовано определение минимального веса (в данном случае свободного расстояния). Для корректной работы программы необходимо выполнение следующих условий.

Длительность тестовой последовательности *T* должна быть равна длине регистра кодера *K*. Моменты начала и окончания пакета определяются так: *Z1<Z2, Z2<P*. Момент сброса аккумулятора установлен равным *C = 0.* Условие выбора момента отсчета *S* есть *Z2<S<P*.

В целом, структура таких измерений, реализованная из блоков (объектов пакета *HP VEE*), показана на рис. 3. Измерения производятся циклически. Интервал цикла (1с) задается датчиком цикла измерений.

Рассмотрим методику оценки объема перебора. При поиске двоичных РСК с длиной кодирующего регистра *K* полный объем перебора равен числу вариантов коэффициентов порождающих многочленов прямой и обратной связи. Для скорости кода $R = 1/n$ (*n* многочленов прямой связи с *K* коэффициентами и один многочлен обратной связи с *K* коэффициентами) объем перебора составит $N = 2^{(n+1)K}$. Ясно, что полный перебор всех *N* вариантов длинных кодов становится громоздким и может занимать значительное время.

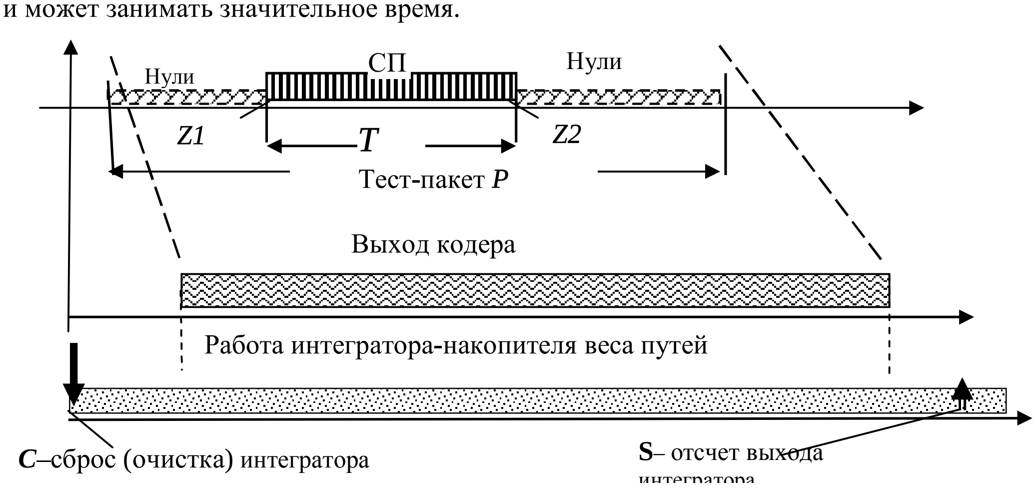

Рисунок 1 – Временные диаграммы работы метода «тест-пакета»

Задача сокращения объема в этом случае является родственной известной задаче сокращения объема вычислений при декодировании длинных свёрточных кодов. Конструктивное решение такой задачи в теории кодирования найдено в виде алгоритма последовательного декодирования [4]. В то же время, алгоритм последовательного декодирования есть вариант известного алгоритма ветвей и границ из теории трудоемкости вычислительных алгоритмов, приспособленного для решения задачи последовательного декодирования СК. Используем идеи метода ветвей и границ.

Пусть процесс поиска кода по критерию ($d_f > L$) изображается рис. 2. Показаны затраты времени но полный перебор *N*. Искомый код с максимальным свободным расстоянием d_{fmax} (отмечен штриховкой) находится в пределах этого интервала *N*. Обнаружение этого кода возможно на основе *последовательного просмотра* кодов *одного за другим*, начиная с начала. Процесс просмотра прекращается, когда свободное расстояние кода d_f превысит заранее заданный порог *L*. Затем данные о найденном многочлене кода выводятся на печать. Вообще говоря, время N_i до обнаружения кода с d_{fmax} всегда меньше, либо равно времени полного перебора *N* (искомый код может находиться на правом конце интервала *N*), но некоторые значения N_i могут быть меньше *N*, что позволяет надеяться на то, что в *среднем* затраты времени на поиск будут меньше *N*, чем и привлекает такой способ организации процесса поиска. Степень *экономии* можно оценить аналитически. Пусть в каждом из моментов «*испытания кода*» условие ($d_f > L$) выполняется с вероятностью p_i. Считая события выполнения неравенства ($d_f > L$) равновероятными ($p_i = const$), определим среднюю длину интервала до момента отыскания оптимального кода. Из рис.2 следует, что до момента обнаружения (отмечен штриховкой) с вероятностью p_i происходят моменты “необнаружения” с вероятностью ($1-p_i$). Нетрудно показать, что вероятность пакета событий длиной N_i, начинающегося от начала эксперимента (i=0) и оканчивающегося обнаружением в момент N_i при малых p_i равна $P_{N_i} = (1-p_i)^{(N_i-1)} p_i \approx p_i$, а средние затраты времени на обнаружение оптимального кода определяются усреднением

$$N_{cp} \approx \sum_{i=0}^{N} p_i N_i = p_i \sum_{i=0}^{N} i = p_i \sum_{i=0}^{N} i = p_i \frac{N(N-1)}{2}$$ и для $p_i=1/N$ имеем $N_{cp}=(N-1)/2$.

Тогда выигрыш от сокращения времени поиска кода в среднем составит $E=N/N_{cp}=2N/(N-1)$. При больших значениях *N* средний выигрыш равен $E=N/N_{cp}=2$, т.е. среднее время поиска вдвое меньше максимального времени.

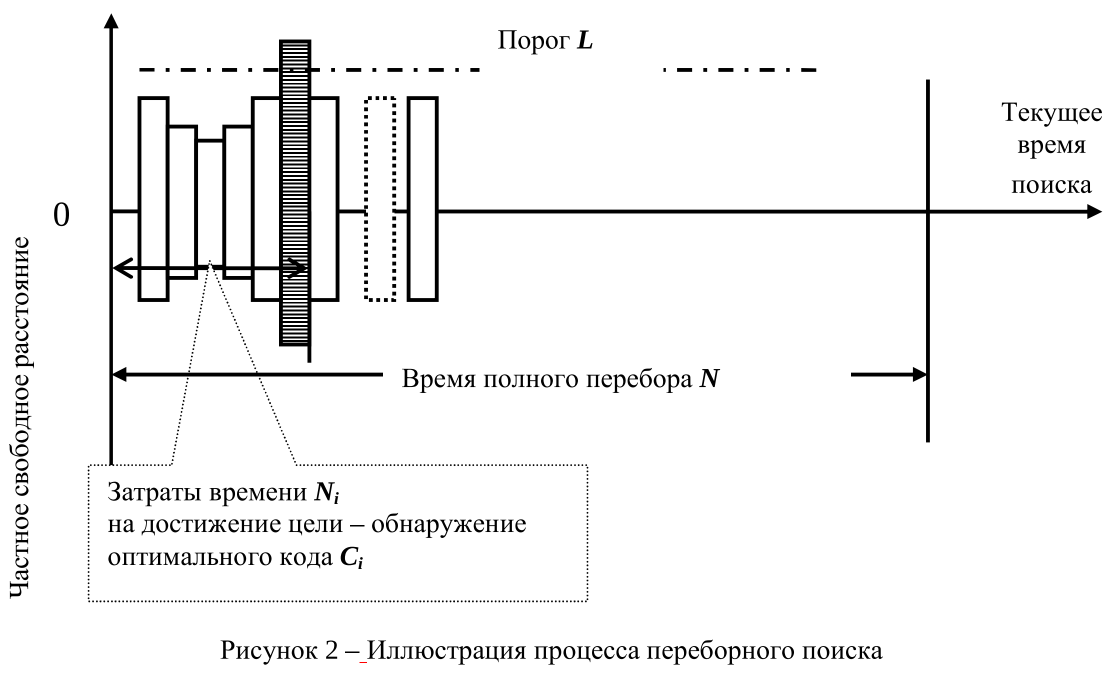

Рисунок 2 – Иллюстрация процесса переборного поиска

Остается вопрос о выборе порога L. Используя известное положение о том, что для любых распределений случайной величины максимальное значение всегда больше среднего, можно рекомендовать в качестве порога L выбирать среднее значение искомого расстояния, выполнив для его определения «*прогон*» всего вычислительного процесса на длине интервала N, но без фиксации порождающих многочленов, что занимает значительно меньшее время.

Рисунок 3 – Структура переборного поиска многочленов кода

Приведенные оценки остаются справедливыми и для случая поиска кодов с заданной величиной расстояния по критерию ($d_f = L$).
Описанный алгоритм поиска отображается структурой, представленной на рис.3. При поиске кодов по критериям($d_f > L$) и ($d_f=L$) для определения величины свободного расстояния d_f используется описанный выше метод тест-пакета. Генераторы многочленов прямой связи G и многочленов обратной связи H вырабатывают в начале каждого тест-пакета многочлены, выбираемые случайным образом из полных множеств этих многочленов. После остановки вычислительного процесса по выбранному критерию результаты поиска (G, H, d_f) выводятся на печать.

РСК СО СКОРОСТЬЮ 1/2

Таблица 1 – Свёрточные коды со скоростью ½

Длина кодирующего регистра K	Класс кода	Порождающие многочлены ($G1$,$G2$//H)	Свободное расстояние d_f	Верхняя граница свободного расстояния $d_{f\,max}$
3	РСК	(4,6//1)	5	5
3	НСК	(7,5//0)	5	5
4	РСК	(140,10//02)	6	7
4	НСК	(17,25//0)	6	6
5	РСК	(020,320//100)	8	9
5	НСК	(35,23//0)	7	8
6	РСК	(250,600//120)	10	11
6	НСК	(75,53//0)	8	8
7	РСК	(244,364//124)	12	13
7	НСК	(171,133//0)	10	10
8	РСК	(300,112//132)	13	15
8	НСК	(371,247//0)	10	11
9	РСК	(033,321//101)	15	17
9	НСК	(753,561//0)	12	12

По изложенной выше методике произведен переборный поиск порождающих многочленов двоичных рекурсивных кодов со скоростью $^1/_2$. Результаты приведены в табл.1. Порождающие многочлены прямой связи *G1, G2* и многочлен обратной связи *H* для РСК сведены в единую запись (*G1, G2// H*), причем, значения многочленов даны в восьмеричном представлении. Для сравнения с табличными нерекурсивными кодами в таб.1 приведены справочные данные о лучших двоичных НСК [5]. В записи НСК многочлен обратной связи H = 0. Приведены также верхние границы для свободного расстояния сравниваемых классов кодов (НСК и РСК), вычисленные по формулам (5), (6) из работы [2].

НЕРЕКУРСИВНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ СВЁРТОЧНЫЕ КОДЫ

Таблица 2 – Сравнительные характеристики свёрточных кодов

Номер кода	ДКР, K	Класс кода	Порождающие многочлены, ($G1$,$G2$//H)	Свободные расстояния, d_f	Показатель сложности, S	АЭВК Θ, (дБ)
1	6	РСК	(250,600//120)	10	64	6,02
2	7	НСК	(171,133//0)	10	128	6,02
3	7	РСК	(244,364//124)	12	128	7,78

Данные поиска РСК из табл.1 позволяют сравнить их с нерекурсивными (*стандартными)* НСК, сведения о которых помещены в справочниках [3, 4, 5]. Наибольший интерес представляет сравнение с нерекурсивным кодом со скоростью $R = {}^1/_2$ и порождающим многочленом(133,171//0), который был найден Р. Оденвальдером (*R. Odenwalder)* на заре эры активного освоения техники свёрточного кодирования. Этот код вошел во многие стандарты спутниковой и космической связи [5] и получил статус «*Planetary Standard Code*» (стандартный код для планетных исследований), и в настоящее время широко используется во многих телекоммуникационных системах. Западными компаниями выпускается ИМС кодека этого кода. Результаты такого сравнения приведены в таб.2. В этой же таблице приведены данные о сложности реализации алгоритма Витерби (структурная сложность кодовой решетки: число состояний решетчатой диаграммы), которая вычисляется по формуле (5) из статьи [1] $S=2^K$. При известной величине свободного расстояния d_f можно определить асимптотический энергетический выигрыш (АЭВК) $\Theta = 10\lg R\ d_f$ (дБ), который определяет величину энергетического выигрыша от применения помехоустойчивого свёрточного кодирования при малой ошибке декодирования и широко используется для сравнения эффективности применения кодов [4]. Приведенные данные подтверждают перспективность практического применения рекурсивных кодов. Найден короткий РСК (250,600//120) (код №1) с показателем сложности S = 64 , который обеспечивает величину свободного расстояния d_f = 10, сопоставимую с расстоянием стандартного НСК (код №2 с показателем сложности S=128), но при меньшей длине кодирующего регистра. Более того, удалось отыскать РСК (код №3). со свободным расстоянием, которое превышает расстояние НСК при сопоставимой сложности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В опубликованных ранее статьях цикла [1, 2] выполнены исследования структурных и дистанционных свойств нового класса свёрточных кодов: рекурсивных свёрточных кодов. В классе рекурсивных кодов удается улучшить дистанционные характеристики за счет охвата структуры кодера обратной связью. Введение обратной связи улучшает верхнюю границу свободного расстояния рекурсивных кодов.

Результаты переборного поиска порождающих многочленов подтверждают существенные преимущества рекурсивных кодов по сравнению с нерекурсивными.

Теоретические подходы и методы поиска рекурсивных кодов, изложенные с статьях цикла [1, 2] могут быть использованы для поиска рекурсивных кодов с более высокими скоростями, а также недвоичных кодов для каналов с многопозиционными сигналами.

ЛИТЕРАТУРА

1 Банкет В.Л., Рекурсивные свёрточные коды/ В.Л. Банкет, Н.В. Незгазинская // Зв'язок. – 2010. – № 4. – С. 68.

2 Незгазинская Н.В. Верхние границы свободного расстояния двоичных свёрточных кодов// Цифровые технологии. – 2012. – № 11. – С. 104

3 Кларк Дж., Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: / Дж. Кларк, Дж. Кейн // Пер. с англ.– М. :Радио и связь. 1987. – 392 с.

4 Банкет В.Л. Сигнально-кодовые конструкции в телекоммуникационных системах. Одесса: Феникс, 2009.– 180 с.

5 Viterbi A.J. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication. N.Y.: Addison – Wesley Publ. Company, 1995. – 240 p.