

УДК 517.5:004.932

**МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ  
ДЛЯ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ**

ВОСТРОВ Г.Н., ГОДЫНСКИЙ М.Г., АТИЕ А.

Одесский национальный политехнический университет

**THE METHOD OF USE OF NON-SEPARABLE WAVELET BASES FOR IMAGE  
COMPRESSION**

VOSTROV G.N., GODYNSKY M.G., ATIE A.

Odessa National Polytechnic University

***Аннотация.** Проанализированы проблемы использования несепарабельных вейвлет-базисов, изучены особенности их характеристик. Представлен метод использования несепарабельных вейвлет-базисов для сжатия изображений.*

***Abstract.** The problems of the use of non-separable wavelet bases are analyzed; the features of their characteristics are investigated. A method of using non-separable wavelet bases for image compression is presented.*

Важным и перспективным методом развития информационных технологий, ориентированных на распознавание бинарных изображений по биортогональным вейвлетным базисам [1, 2]. Наиболее фундаментальные результаты были получены в работах [1, 2, 3]. В телекоммуникационных системах ключевой проблемой на первых этапах является расположение бинарных изображений по биортогональным классам функций. Математические алгоритмы построения таких алгоритмов сжатия с минимальной величиной потерь информации. Этой тематике обыкновенно уделяется большое количество работ. При этом всегда фундаментальной проблемой является задача выбора оптимального биортогонального базиса данного класса функциональных пространств с заданной метрикой. Несмотря на достаточно высокий уровень конструирования биортогональных вейвлетных базисов, проблема степени адекватности функциональных пространств с заданной мерой, она не позволяет с заданной точностью построить ортогональный вейвлетный базис. Приведено значительное количество задач сжатия изображений, когда мера пространства биортогональных вейвлетных базисов совершенно не соответствовала мере сжимаемого функционального пространства. Поиск биортогональных вейвлетных базисов для распознавания метрических функциональных пространств с максимальной мерой продолжается и в настоящее время. Следует признать, что некоторые проблемы сжатия функциональных пространств с заданной метрикой решались и решаются успешно в настоящее время.

Следует заметить, что спорность данной проблемы обусловило появление значительное многообразия базисных функций для сжатия изображения весьма различных классов. К ним можно отнести риджелеты, куравлеты, блоклеты и другие. Тем не менее, расширение классов биортогональных классов функций не позволили получить универсальный, биортогональный базис функции для распознавания.

Проблема синтеза новых классов биортогональных базисов по-прежнему носит ограничительный характер для статических изображений еще в силу и того обстоятельства, что отсутствуют конструктивно выбираемые меры потери информации которые могли бы гарантировать эффективные процедуры передачи информации не только относительно качества сжатия изображения, но относительно величиной потерь информации.

На протяжении последних 20 лет активно основным развивающимся направлением стало использование так называемых вейвлетов-базисов. Простейшим видом вейвлет-базиса для изображений является разделимый (сепарабельный) базис. Частым подходом при этом было использование либо схемы Маллы [1], либо тензорного произведения одномерных базисов [2]. Использование сепарабельного базиса является традиционным для современных кодеков, однако в работах [2, 3] было доказано, что значительно более эффективными [2, 3]. В данной работе показано, что разработка является использование систем вейвлет-фильтров, основанных на несепарабельных базисах.

Сам процесс сжатия будет основываться на использовании каскадного алгоритма дискретного вейвлет-преобразования [4]. Данный алгоритм опирается на формулы декомпозиции(1,2) и на формулы реконструкции (3):

$$c_k^j = \sum_{n \in Z} c_n^{j+1} \bar{h}_{n-2k} \quad (1)$$

$$d_k^j = \sum_{n \in Z} c_n^{j+1} \bar{g}_{n-2k} \quad (2)$$

$$c_k^{j+1} = \sum_{n \in Z} c_n^j h_{k-2n} + \sum_{n \in Z} d_n^j g_{k-2n} \quad (3)$$

где  $i, j, k \in Z$ ,

$c, d$  – вейвлет-коэффициенты,

$g, h$  – вейвлет-фильтры,

$\bar{g}, \bar{h}$  – фильтры, являющиеся зеркальными перестановками  $g$  и  $h$ ,

$$\bar{g}_n = (-1)^{1-n} \bar{h}_{1-n}.$$

Качество сжатия (определяемое на основе коэффициента сжатия и пикового отношения сигнала к шуму PSNR) при этом существенно зависит от выбора коэффициентов  $h_n$  фильтрующей маски.

Для трех шагов вейвлет-преобразования были построены фильтры

$H_0 H_1 H_2$  (приведены в приложении к статье) таким образом, что  $H_k = (k = 0, 1, 2)$  состоит из коэффициентов, обладающих (4) следующей симметрией:

$$h_{i,j}^k = h_{i-1-j}^k, h_{i,j}^k = h_{1-i,j}^k, h_{i,j}^k = h_{1-i,1-j}^k. \quad (4)$$

В силу чего, если известны  $g_{i,j}^k$  для  $i, j = 0, 1, \dots, 21, k = 0, 1, 2$ , то остальные коэффициенты определяются однозначно.

Фильтр  $H_0$  используется на первом шаге декомпозиции (при переходе с нулевого на первый уровень разделения частот), фильтр  $H_1$ , — при втором (с первого на второй), и фильтр  $H_2$  — на третьем (со второго на третий) соответственно.

Для разделения частот на каждом уровне с помощью полученных масок фильтров строится набор фильтров по следующим правилам:

$$G^{k,1} = g_{n,m}^{k,1}, \text{ где } g_{n,m}^{k,1} = (-1)^m h_{n-1,m}^k;$$

$$G^{k,2} = g_{n,m}^{k,2}, \text{ где } g_{n,m}^{k,2} = (-1)^n h_{n,m}^k;$$

$$G^{k,3} = g_{n,m}^{k,3}, \text{ где } g_{n,m}^{k,3} = (-1)^{n+m} h_{n-1,m}^k;$$

В результате использование построенных фильтров выглядит следующим образом.

Обозначим через  $c_{i,j}^{0,0}$  исходное значение цветовой компоненты для пикселя с номером  $(i, j)$  Используя последовательность коэффициентов  $h_{i,j}^0$ , проведём фильтрацию изображения на низкие  $c_{n,m}^{0,1}$ ; средние  $c_{n,m}^{1,1}, c_{n,m}^{2,1}$  и высокие  $c_{n,m}^{3,1}$  частоты в соответствии с формулами декомпозиции:

$$c_{n,m}^{0,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,0} h_{i-2n,j-2n}^0 \quad (5)$$

$$c_{n,m}^{k,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,0} g_{i-2n,j-2m}^{0,k} \quad (6)$$

где  $k=1,2,3$ .

В результате получим отфильтрованные высокие и низкие частоты изображения, разложенные в соответствующие четыре панели коэффициентов (рис. 1).

Для панели значений  $c_{n,m}^{0,1}$  применением те же формулы декомпозиции, заменив фильтр  $H_0$  на фильтры  $H_1$ ,  $G^{0,1}$  – на  $G^{1,1}$ ,  $G^{0,2}$  – на  $G^{1,2}$ ,  $G^{0,3}$  – на  $G^{1,3}$ :

$$c_{n,m}^{0,2} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} h_{i-2n,j-2m}^1 \quad (7)$$

$$c_{n,m}^{0,2} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} h_{i-2n,j-2m}^1 \quad (8)$$

где  $k=1,2,3$ .

$c_{n,m}^{0,1}$	$c_{n,m}^{2,1}$
$c_{n,m}^{1,1}$	$c_{n,m}^{3,1}$

Рисунок 1 – Распределение коэффициентов после первого уровня преобразования

Аналогично используем формулы декомпозиции для панелей средних и высоких частот.

После этого шага применяем еще раз формулы декомпозиции, но уже с маской  $H_2$ ,  $G^{2,1}$ ,  $G^{2,2}$ ,  $G^{2,3}$ . В результате получим 64 панели коэффициентов.

Далее все коэффициенты упорядочиваются по убыванию, и данные квантуются по равномерной шкале. Под квантованием понимается нелинейная операция, приводящая к сокращению объема передаваемых данных и, соответственно, к потере информации. В данном методе используется скалярное квантование, в котором каждый элемент  $u$  из множества коэффициентов квантуется индивидуально. Проквантованные коэффициенты обозначим через  $y_q = Q u$  где  $Q u$  — оператор квантования. Скалярное квантование переводит интервалы действительных чисел  $[q_i^k, q_{i+1}^k]$  в действительные числа:

для всех  $u$   $k$ , удовлетворяющих условию  $q_i^k \leq u < q_{i+1}^k$ , где  $i$  — уровень квантования,  $k$  — шаг квантования. Далее квантованные значения кодируются методом RLE и методом арифметического кодирования.

Последовательно применяя скалярное квантование, метод сжатия по Хаффману и метод арифметического кодирования, и получаем результирующий файл данных.

Для восстановления закодированного изображения используются формулы реконструкции. По заданным значениям  $c_{n,m}^{0,3}$ ,  $c_{n,m}^{1,3}$ ,  $c_{n,m}^{2,3}$ ,  $c_{n,m}^{3,3}$  вычисляется  $c_{n,m}^{0,2}$   $c_{n,m}^{0,2}$  согласно формуле:

$$c_{n,m}^{0,2} = \sum_{i,j} c_{n,m}^{0,3} h_{n-2i,m-2j}^3 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,3} g_{i,j}^{p,3} g_{n-2i,m-2j}^{p,3} \quad (9)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

Аналогично находим  $c_{n,m}^{0,1}$ :

$$c_{n,m}^{0,1} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,2} h_{n-2i,m-2j}^2 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,2} g_{i,j}^{p,2} g_{n-2i,m-2j}^{p,2} \quad (10)$$

и  $c_{n,m}^{0,0}$ :

$$c_{n,m}^{0,0} = \sum_{i,j} c_{i,j}^{0,1} h_{n-2i,m-2j}^1 + \sum_{p=1}^3 \sum_{i,j} c_{i,j}^{p,1} g_{i,j}^{p,1} g_{n-2i,m-2j}^{p,1}, \quad (11)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

По этой же схеме находятся значения  $c_{n,m}^{1,2}, c_{n,m}^{2,2}, c_{n,m}^{3,2}$  и др.

Общая схема алгоритма на рис. 2.



Рисунок 2 – Схема сжатия на основе несепарабельных вейвлет-базисов.

Стоит так же отметить, что для уменьшения влияния границ изображения с левого и верхнего краев продолжается четным образом и замыкается на противоположный край. При этом для расчетов изображение преобразовывается из RGB в YCbCr по формулам:

$$Y = \frac{1}{23} (7R + 2B + 14G);$$

$$C_b = \frac{4}{23} (R + 3B + 2G);$$

$$C_r = \frac{4}{69} (8R + B + 7G).$$

После восстановления компонентов YCbCr цветовая гамма преобразовывается обратно в палитру RGB:

$$R = Y + \frac{3}{2} C_r;$$

$$G = Y - \frac{1}{4} (C_b + 3C_r);$$

$$B = Y + \frac{7}{4} C_b.$$

Метод был протестирован на ряде изображений. Некоторые результаты приведены далее в таблице.



*а)*

*б)*

*в)*

Рисунок – 3 а) Исходное изображение № 1; б) сжатое изображение № 1 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 1 предлагаемым методом



*а)*

*б)*

*в)*

Рисунок – 4 а) Исходное изображение № 2; б) сжатое изображение № 2 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 2 предлагаемым методом



*а)*

*б)*

*в)*

Рисунок – 5 а) Исходное изображение № 3; б) сжатое изображение № 3 методом JPEG2000; в) сжатое изображение № 3 предлагаемым методом

Восстановление функции по ее узлам регулярной решетки относится к классическим задачам теории аппроксимации. Продолжительное время классическими методами восстановления функции использовались алгебраические и тригонометрические полиномы и сплайны основной, которых являлась теория вейвлет функций. Процесс восстановления на основе средних значений оставался наименее исследованным разделом теории приближений.

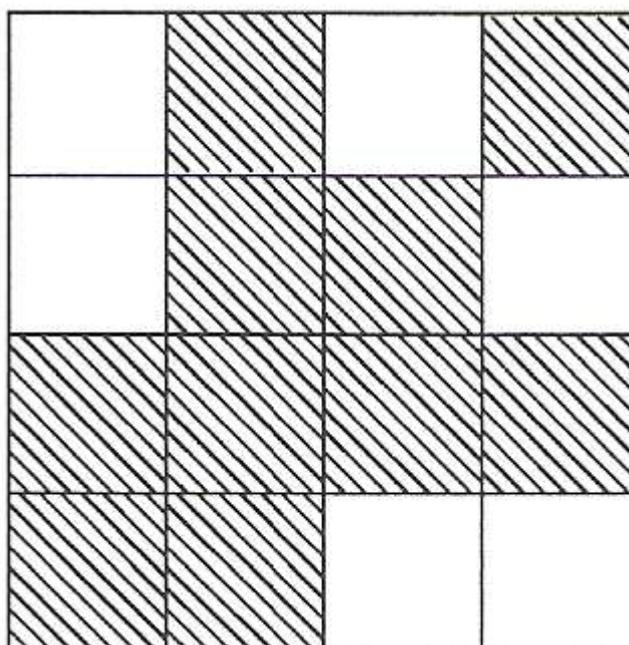
В работе [4] Лигун А.А. Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых, Киев, издание Института математики НАН Украины, 1997г. Впервые была поставлена задача линейного

метода восстановления двумерных линейных функций по их значениям элементов правильных квадрат решетки, основанной на расслоении двумерных данных. В работе было доказано, что построенный оператор восстановления совокупности двумерных данных является линейным оператором сумматорного типа с базовой функцией имеющей малый носитель. Доказано, что базисные функции, представленные в виде линейной комбинации сжатых в два раза и смещенных тех же базисных функций, что позволяет использовать их в качестве масштабирующих функций в кратномасштабном анализе[1]. При этом возникает возможность использовать их для постоянного кодирования процесса сжатия и восстановления данных.

Рассмотрены все методы, порожденные операторами от 6 до 12 порядка.

Всего таких методов 72.

В качестве примера приведём результат, соответствующий аппаратуре  $A_{10}$ .



Геометрическая апертура  $A_{10}$

Выбирая в качестве тестовых функций мономы  $x^v y^\mu$  ( $0 \leq v, \mu \leq 3$  и пары  $v=4, \mu=1$  и  $\mu=4, v=1$ ) приходим к функционалу (12), где

$$\beta^{10} = a_{i,j}^{10} \Big|_{i,j=1}^2 = \frac{1}{512} \begin{pmatrix} 0 & -21 & 0 & -3 \\ 0 & 102 & 34 & 0 \\ -50 & 409 & 102 & -21 \\ 10 & -50 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ниже приведены графики базисной функции и поточной нормы. Доказано что базисная функция является несепарабельным вейвлетом. Предложенная стратегия построения несепарабельных вейвлетов различного уровня и сложности. Алгоритмы в работе не рассматриваются в силу их алгоритмической сложности и отсутствия конструктивных методов выбора оптимальных методов и построения.

На рис. 5 приведены примеры изображений для сжатия которых использовался один из наиболее простых несепарабельных вейвлетов, которые приведены в качестве несепарабельных вейвлетов алгоритм построения которых имеет минимальную сложность.

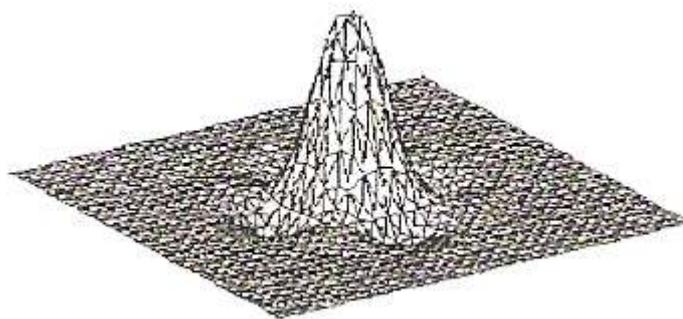


График функции  $\psi_4 = (A_1^{10}, \beta, x, y)$ .

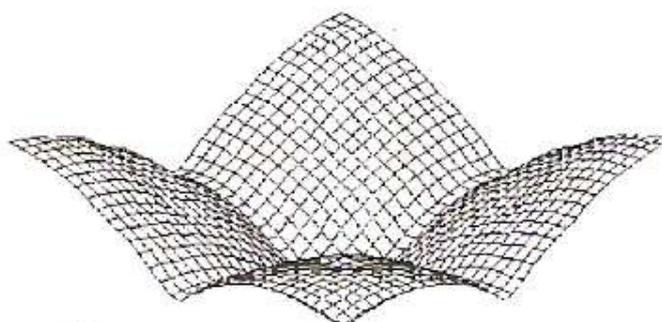


График функции  $N_6(A_1^{10}, \beta, x, y)$ .

Получены два класса несепарабельных вейвлетов и их применение для сжатия изображения. Из результатов видно, что несепарабельные вейвлеты позволяют достичь существенно более высокого качества сжатия изображений с минимальными потерями.

Результат сжатия тестовых изображений

№ изображения	Степень сжатия	Качество восстановленного изображения PSNR							
		JPEG2000				Предлагаемый метод			
		$Y$	$C_2$	$C_b$	$RGB$	$Y$	$C_2$	$C_b$	$RGB$
1	29,1	27,81	38,03	37,46	27,62	31,19	32,11	33,53	29,94
2	26,7	26,91	35,72	36,32	26,65	30,01	31,56	32,13	28,85
3	34,26	29,02	37,75	37,65	28,86	30,49	40,52	34,1	29,99

Таким образом, данный подход позволяет эффективно сжимать изображения различных размеров и может давать результаты, превосходящие известные мировые стандарты.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов / Малла С.. – М.: "Мир". – 2005. – С. 658.
- 2 Kovacevic J. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for  $R$ . sup. n. J. / Kovacevic J., Vetterli M. // IEEE Trans. Inform. Theory. – Vol. 38. – No. 2. – 1992. – P. 533–555.
- 3 Cohen A. Daubechies I. Non-separable dimensional wavelet bases / Cohen A. Daubechies I. // – Rev. Mat. Iberoamericana. – Vol. 9, no. 1. – 1993. – P. 51–137.
- 4 Воробьёв В.И., Грибунин, В.Г. Теория и практика вейвлет- преобразования / Воробьёв, В.И., Грибунин, В.Г. // – СПб.: ВУС. – 1999. – С. 204.