

ЦИФРОВЕ КОДУВАННЯ

УДК 621.391

ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ СВОБОДНОГО РАССТОЯНИЯ
ДВОИЧНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

НЕЗГАЗИНСКАЯ Н.В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

UPPER BOUNDARIES OF BINARY CONVOLUTIONAL
CODES FREE DISTANCE

NEZGAZINSKA N.V.

Odessa National Academy of Telecommunications named after O.S. Popov

Аннотация. На основе блочного представления сверточных кодов получены формулы для верхних границ свободного расстояния нерекурсивных и рекурсивных двоичных сверточных кодов. Показано, что величины свободного расстояния лучших известных двоичных сверточных кодов приближаются к своим верхним границам, что верхняя граница рекурсивных кодов превышает значения верхней границы нерекурсивных кодов и что между этими границами имеется значительное расстояние.

Abstract. On the basis of block presentation of convolutional codes formulas are got for the higher boundaries of free distance of non-recursive and recursive binary convolutional codes. It is shown that the sizes of free distance of the best known binary convolutional codes approach their higher boundaries, that higher bound of recursive codes exceeds the values of higher boundary of non-recursive codes and that between these boundaries there is considerable distance.

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей публикации [1] из цикла статей по сверточному кодированию были изложены основы теории нового класса сверточных кодов: рекурсивных сверточных кодов (РСК) и экспериментально установлено, что введение обратной связи в структуру кодера улучшает дистанционные свойства порождающих многочленов РСК. В теории кодирования изучение дистанционных свойств корректирующих кодов принято вести с использованием кодовых границ: верхних и нижних границ минимальных расстояний [2]. Наиболее важным параметром является верхняя граница (ВГ) минимального расстояния. Такой подход позволяет выявить и сравнить потенциальные возможности различных классов кодов и, в ряде случаев, служит основанием и стимулом для поиска новых кодов. При известной верхней границе совершенство найденных кодов оценивают по степени приближения свободного расстояния к пределу, который определяется величиной ВГ. В этой связи задача исследования ВГ РСК является актуальной для выявления потенциальных свойств рекурсивных кодов по сравнению с нерекурсивными кодами. Для получения верхних границ в статье использована идея Плоткина [7], широко используемая в теории блочных кодов [2]. Поскольку изучению свойств сверточных кодов способствует их блочное (пакетное) представление, в статье подробно представлена техника вывода верхней границы Плоткина для блочных кодов.

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ БЛОКОВЫХ КОДОВ

Как известно, двоичный линейный блочный код значности n с 2^k кодовыми словами порождается базисом из k линейно независимых векторов, которые образуют строки порождающей матрицы (n, k) кода [2]:

$$G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \mathbf{M} \\ g_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \mathbf{L} & g_{0,n} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \mathbf{L} & g_{1,n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ g_{k,0} & g_{k,1} & g_{k,2} & \mathbf{L} & g_{k,n} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В соответствии со свойством замкнутости линейных двоичных кодов сумма по модулю 2 двух произвольных кодовых слов есть также кодовое слово. Разобьем множество из 2^k всех возможных кодовых слов на произвольные пары $(\mathbf{v}_{(x)}, \mathbf{v}_{(y)})$. Всего таких пар будет 2^{k-1} . Сумма кодовых слов из каждой пары будет порождать новое кодовое слово $\mathbf{v}_{(x+y)} = (\mathbf{v}_{(x)} + \mathbf{v}_{(y)})$, которое, в силу замкнутости, будет принадлежать этому коду. Обратим внимание на символы таких слов, расположенные на произвольном месте с номером i ($0 < i < n$). В силу случайного выбора слов в состав пар $(\mathbf{v}_{(x)}, \mathbf{v}_{(y)})$ их символы на обозначенном месте могут совпадать, либо не совпадать. При совпадении во вновь образованном слове $\mathbf{v}_{(x+y)}$ на обозначенном месте будет расположен символ 0. В случае же несовпадения в слове $\mathbf{v}_{(x+y)}$ на обозначенном месте будет расположен символ 1. Общее количество слов с символами 0 и 1 на обозначенном месте будет составлять полное множество слов объема $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. В этом множестве будет всего $(2^k - 1)$ слов с ненулевым весом. Определим средний вес рассматриваемого столбца таких слов. Каждое слово (n, k) кода содержит n символов. Среди $(2^k - 1)$ слов с ненулевым весом встречаются 2^{k-1} слов, в которых в произвольном столбце с номером i ($0 < i < n$) имеется символ 1. Поскольку кодовые слова и местоположение рассматриваемого столбца выбираются случайно, можно полагать, что статистика символов во всех столбцах на длине кодового слова будет одинаковой. Тогда средний вес таких слов будет равен

$$w_{\text{cp(БК)}} = n2^{k-1}/(2^k - 1). \quad (2)$$

Основная идея получения границы Плоткина основывается на известном положении из теории случайных чисел: при любом распределении вероятностей случайных чисел наименьшее число всегда меньше их математического ожидания (т.е., среднее является верхней границей наименьшего). Поскольку при случайном выборе ненулевых слов средний вес всегда больше минимального веса, значение среднего веса (2) может быть использовано для верхней оценки минимального веса (т.е. минимального расстояния блокового линейного (n, k) кода:

$$d_{\text{min}} \leq w_{\text{cp}} = n2^{k-1}/(2^k - 1). \quad (3)$$

В теории кодирования это выражение известно, как верхняя граница Плоткина минимального расстояния линейных двоичных блоковых кодов [7].

ПАКЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАБОТЫ КОДЕРА СК И МЕТОД “ТЕСТ-ПАКЕТА”

Основные параметры и методы описания нерекурсивных СК даны в предыдущей статье [1]. Дальнейшие рассуждения иллюстрируются примерами работы нерекурсивного кодера СК с порождающими многочленами (7,5) и длиной кодирующего регистра $K=3$. Структура кодера представлена на рисунке 1.

Информационные двоичные символы u поступают на вход регистра из K элементов памяти. Величину K называют длиной кодирующего регистра (ДКР). На выходах сумматоров по модулю 2 образуются кодовые символы $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$. Входы сумматоров соединены с определенными элементами памяти.

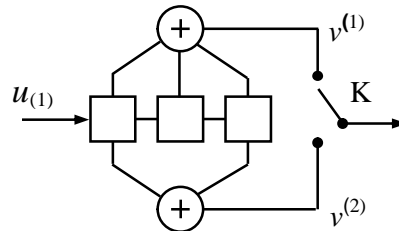


Рисунок 1 – Структура нерекурсивного кодера

Коммутатор K на выходе кодера устанавливает очередность посылки кодовых символов в канал. Полное представление кодовых последовательностей на выходе кодера СК дает решетчатая диаграмма, которая является разверткой во времени диаграммы состояний кодера [5]. После каждого перехода из одного состояния в другое происходит смещение на один шаг вправо. Пример решетчатой диаграммы показан на рисунке 2.

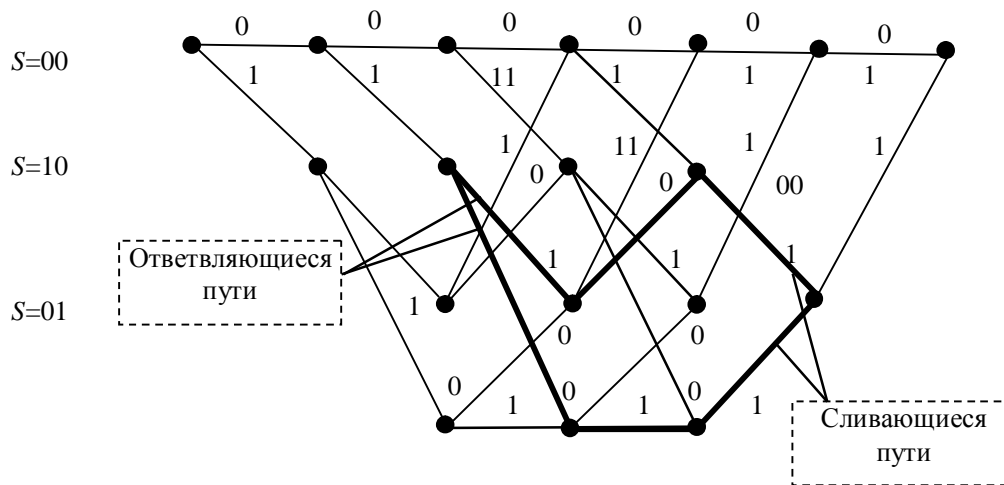


Рисунок 2 – К определению расстояния между путями

Помехоустойчивость декодирования зависит от дистанционных свойств кодовых последовательностей на выходе кодера. Для двоичных кодов расстояние между последовательностями оценивают в метрике Хэмминга. Степень различия между путями на решетчатой диаграмме определяется их *несовпадающими участками путей* на интервале между некоторыми состояниями. Подобная ситуация иллюстрируется диаграммой на рисунке 2, где жирной линией показаны участки несовпадения, которые начинаются с момента, когда ветви путей *ответвляются* от состояния 10, и далее эти участки путей *сливаются* в состоянии 01.

Для линейных кодов начальное и конечное состояния можно полагать равными нулю. Тогда, как отмечалось в статье [1], набор участков решетчатой диаграммы между нулевыми состояниями содержит исчерпывающую информацию о дистанционных свойствах СК. В частности, минимальный вес отрезков путей на рисунке 2 между левым и правым крайними нулевыми состояниями равен $w_{min} = 5$ и определяет свободное расстояние этого кода d_f . Рисунок 2 иллюстрирует пакетное представление работы кодера сверточного кода. Следует отметить, что, по мнению авторитетного руководства [3, п. 7.2.1], свёрточным кодам часто придают блочную структуру за счет присоединения к концу входной последовательности данных некоторого количества нулевых разрядов для “очистки” кодера. Подобную пакетную структуру придают также рекурсивным свёрточным кодам, входящим в состав турбо кодов [6]. Конструктивные методы “усечения хвоста” при формировании турбо кодов обсуждаются также в статье [8]. Как отмечалось в предыдущей статье [1] подобное пакетное представление лежит в основе метода экспериментального определения свободного расстояния (метода “тест-пакета”, подробно описанного в монографии [5, разд. 6.2]). Тест-пакет состоит из случайного набора двоичных символов, окруженного отрезками последовательностей из нулей. Начальная нулевая последовательность предшествует началу развития решетки. Заключительная последовательность из нулей обеспечивает “очистку” кодера. Минимальный вес реакции кодера на тест-пакет и есть свободное расстояние исследуемого кода.

ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ СВОБОДНОГО РАССТОЯНИЯ ДВОИЧНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Верхняя граница свободного расстояния двоичных нерекурсивных СК может быть получена на основе следующих соображений. Рассмотрим двоичный нерекурсивный СК со скоростью $1/n$, длиной кодирующего регистра K . Процессы заполнения памяти кодера “тест-пакетом” показаны на рисунке 3, где:

3,а – Форма пакета на входе кодера выбрана в соответствии с изложенным выше методом “тест-пакета”: пакет содержит окруженный нулевыми символами отрезок случайной последовательности длиной K двоичных символов, подаваемых на вход кодера;

3,б – Первоначально память кодера заполнена нулями. Показано начало “участка заполнения” регистра входными символами из $(K-1)$ тактов (по стрелке). В конце этого участка кодер может оказаться в состоянии, когда память кодера полностью заполнена (рисунок 3в). Протяженность участка заполнения равна $n(K-1)$ кодовых символов;

3,г – Участок очистки кодера (участок обнуления пакета), на котором S ненулевых символов пакета *покидают* кодер. На этом участке кодер генерирует отрезки путей, которые, являясь продолжениями путей на участке заполнения, приближают состояния кодера к полностью нулевому состоянию.

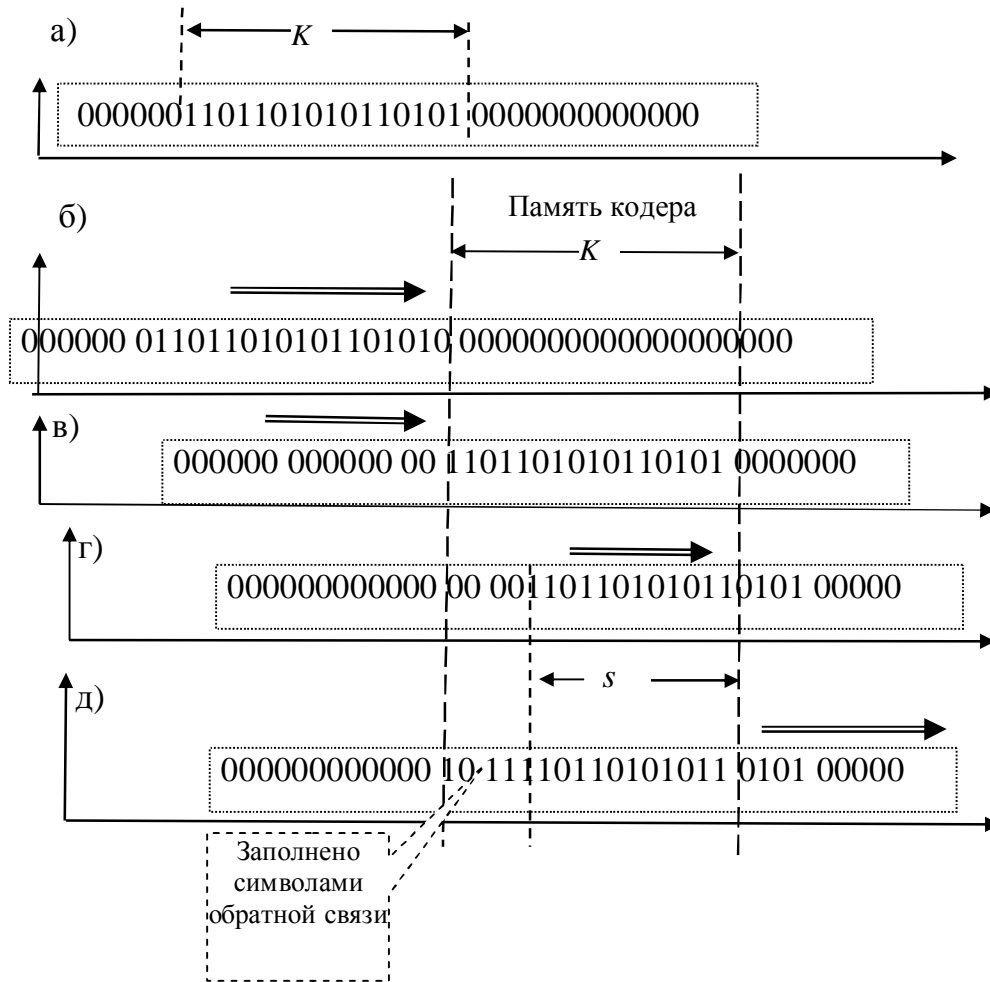


Рисунок 3 – Работа кодеров СК без обратной связи и с ОС

Фрагмент решетчатой диаграммы, соответствующий этим процессам, показан на рисунке 4. Участки путей, приводящие состояния кодера в нулевое состояние, показаны пунктиром. Общее количество путей, возвращающихся в нулевое состояние, определяется остатком s входных символов в памяти кодера (рисунок 3г). Соответственно, число путей, вышедших из нулевого состояния, и вернувшихся в полностью нулевое состояние будет 2^s . В силу случайности символов входного пакета, количество символов s , покидающих память кодера, также является случайным. В общем случае величина s удовлетворяет неравенству: $1 \leq s \leq K$. Таким образом, общая протяженность путей на выходе кодера между нулевыми состояниями, с учетом протяженности “участка заполнения” $((K-1)$ входных символов) и “участка очистки” (s входных символов) составляет $[n(K-1+s)]$ кодовых символов. Как видно из рис. 4, все последовательности символов на выходе кодера образуют множество отрезков путей между полностью нулевыми состояниями кодера, т.е., фактически, *они составляют блочный код*.

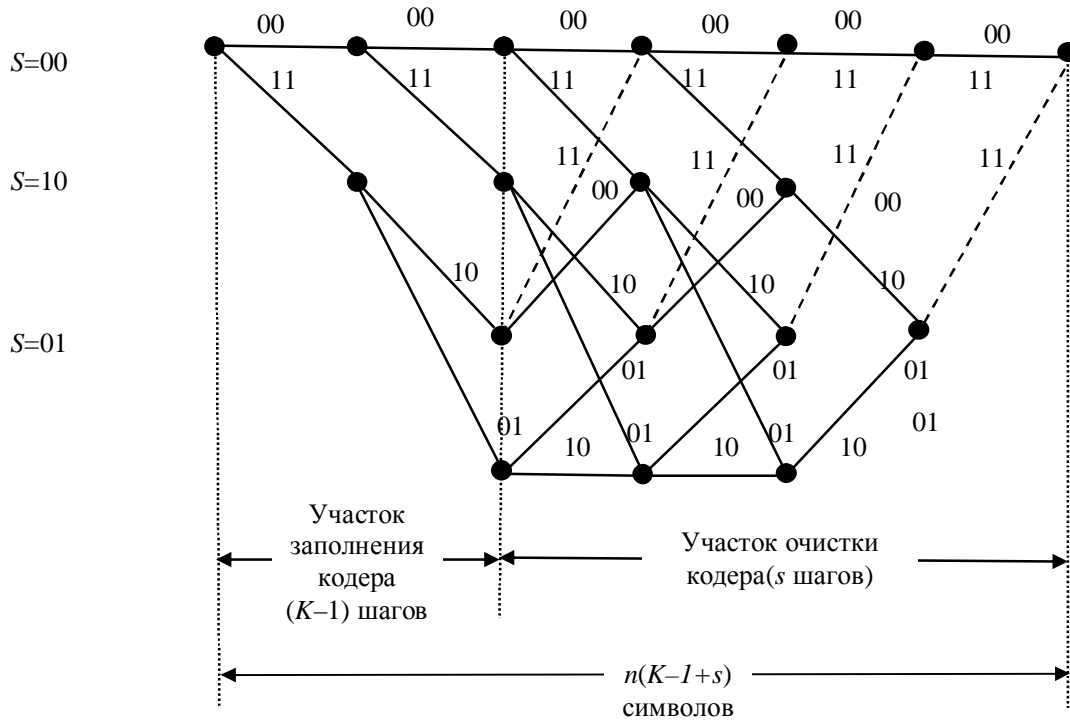


Рисунок 4 – Результаты прохождения “тест-пакета” через кодер

Длина такого эквивалентного блочного кода $[n(K-1+s)]$ будет случайной. Минимальный вес этих путей и есть свободное расстояние сверточного кода. Всего различных вариантов путей при таком рассмотрении будет равно 2^s . Для определения среднего веса этого множества отрезков путей применим изложенную выше в разделе 1 процедуру усреднения:

1. Общее количество разных комбинаций эквивалентного блочного кода равно 2^s (s – случайное).
2. Количество пар складываемых комбинаций будет 2^{s-1} .
3. Число ненулевых комбинаций эквивалентного кода равно (2^s-1) .
4. Длина комбинаций эквивалентного блочного кода $[n(K-1+s)]$ (n – знаменатель скорости кода).

Подставляя эти данные в формулу (2), получаем средний вес:

$$w_{cp(CK)} = n(K-1+s) \left[\frac{2^{s-1}}{2^s-1} \right]. \quad (4)$$

Используя изложенную ранее технику получения верхней границы Плоткина, верхнюю границу свободного расстояния двоичных линейных нерекурсивных сверточных кодов можно представить так:

$$d_{f \max(HCK)} \leq w_{cp(HCK)} = \min_{1 \leq s \leq K} \left\lfloor n(K-1+s) \frac{2^{s-1}}{2^s-1} \right\rfloor \quad (5)$$

В этом выражении знак $\lfloor X \rfloor$ означает целое число, не превышающее данное число.

Верхняя граница свободного расстояния двоичных рекурсивных сверточных кодов определяется так. Рассматривая работу кодера рекурсивного кода можно установить, что за счет подачи на вход регистра кодера символов по цепи обратной связи протяженность участка очистки памяти кодера увеличивается до величины ($s=K$) (см. рисунок 3,д). Применяя для этого случая формулу (5), получаем верхнюю границу свободного расстояния рекурсивных кодов:

$$d_{f \max(PCK)} \leq w_{cp(PCK)} = \left\lfloor n(2K-1) \frac{2^{K-1}}{2^K-1} \right\rfloor. \quad (6)$$

Результаты расчетов значений верхних границ $d_{fmax(НСК)}$ и $d_{fmax(РСК)}$ в зависимости от ДКР K по формулам (5) и (6), соответственно, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Верхние границы свободных расстояний РСК и НСК ($R=1/2$)

Класс кода	ДКР $K \rightarrow$	3	4	5	6	7	8	9	10
	Свободное расстояние								
РСК	$d_{fmax(РСК)}$ форм. (5)	5	7	9	11	13	15	17	18
НСК	$d_{fmax(НСК)}$ форм. (6)	5	6	8	8	10	11	12	13
НСК	$d_f(НСК)$ табл. коды[4]	5	6	7	8	10	10	12	12

В этой же таблице приведены сведения о величинах свободных расстояний $d_f(НСК)$ лучших табличных нерекурсивных кодов, опубликованных в монографии [4]. Видно, что по дистанционной характеристике свободному расстоянию лучшие известные двоичные нерекурсивные коды приближаются к верхней границе $d_{fmax(НСК)}$. Вместе с тем, до значений верхней границы рекурсивных кодов имеется определенный “запас”.

ВЫВОДЫ

1 В статье на основе блочного представления сверточных кодов получены формулы для верхних границ свободного расстояния нерекурсивных и рекурсивных двоичных сверточных кодов.

2 Величины свободного расстояния лучших известных двоичных сверточных кодов приближаются к своим верхним границам.

3 Верхняя граница рекурсивных кодов превышает значения верхней границы нерекурсивных кодов. Как видно из данных таблицы 1 между этими границам имеется значительное расстояние.

4 Большой “запас” до верхней границы рекурсивных кодов является основанием для проведения поиска новых рекурсивных сверточных кодов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банкет В.Л. Рекурсивные сверточные коды // Банкет В.Л., Незгазинская Н.В. Зв’язок, 2010. – № 4. – С. 68–71
2. Питерсон У. Коды, исправляющие ошибки / Питерсон У., Уэлдон Э.: пер. с англ.; Под ред. Добрушина Р. Л. и Самойленко С. И. – М.: Мир, 1976. –380 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б. – [2-е изд., испр.]; пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. – 1104 с.
4. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication / Viterbi A.J. – N.Y. :Addison-Wersley Publ. Company, 1995. – 240 p.
5. Банкет В.Л. Сигнально-кодовые конструкции в телекоммуникационных системах / Банкет В.Л. – Одесса: Феникс, 2009. – 180 с.
6. Berrou C. The Ten-Year-Old Turbo Codes are Entering into Service / Berrou C. – IEEE Communications Magazine. Vol.41. – No. 8. – August 2001.– P. 110–116.
7. Plotkin P. Binary codes with specified minimum distance / Plotkin P. – IEEE Trans. on Inform. Theory Vol. IT-6. – May 1960. – P. 445–450.
8. Банкет В. Л. Алгоритмы кодирования/декодирования турбокодов / Банкет В. Л., Прокопов С.Д., Постовой А.Г., Топорков Ф.В. – Зв’язок, 2004. – № 4. – С. 45–46.