КВАНТОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСЕ С УЧЕТОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

УСТИНОВ С.С.

Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова

WAVELET DOMAIN IMAGE QUANTIZATION WITH CONSIDERATION OF IMAGE STATISTIC POSSIBILITIES

USTINOV S.S.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

Аннотация.*Исследованы статистические модели, описывающие статистику коэффициентов изображения в вейвлет-базисе. Предложено использование обобщенного гиперболического распределения для описания статистики коэффициентов вейвлет-преобразования изображений. Дана оценка методов квантования, используемых при кодировании со сжатием и взаимосвязь порога квантования с параметрами шума квантования в пространственной области.*

Annotation.*Statistical models of digital wavelet transform coefficients are analyzed. Using Generalized Hyperbolic Distribution is proposed for description of wavelet coefficient statistics. Quantization methods are analyzed. Relation between quantization noise parameters and threshold value established.*

Введение

При выборе метода и параметров квантования при использовании алгоритмов сжатия таких какJPEG2000, EZW, SPIHT и другие зачастую используется так называемый прямой метод оценки, который заключается в выполнении алгоритма сжатия с использованием того или иного метода квантования и его параметров, с последующей оценкой полученного изображения либо путем субъективного оценивания либо по различным метрикам примерами которых могут служить PSNR, EPSNR и многие другие. Иными словами в принятой существующей практике не учитываются статистические свойства изображения представленного спектральном виде.

Статистическая модель

При учете статистических свойств изображения при квантовании важнейшей статистической характеристикой является плотность распределения изображения представленного спектральными коэффициентами. В ряде работ были предложены различные статистические модели, описывающие плотности распределения вейвлет коэффициентов изображения. Поскольку вейвлет преобразование является подвидом кратномасштабныхпреобразований, то может существовать два подхода для описания закона распределения коэффициентов: первый заключается в поиске закона распределения для всего вейвлет образа, второй заключается в поиске закона распределения для каждой составляющей (вертикальной, горизонтальной и диагональной) каждого уровня декомпозиции.

Первый подход был предложен Стефаном Маллом в [6], и автором было предложено использование симметричного экспоненциального распределения в качестве модели описывающей плотность распределения коэффициентов. Однако при подобном описании не может быть учтен факт, что квантование коэффициентов на более высоком уровне декомпозиции порождает большие ошибки, что связано увеличением числа выполнения свертки при увеличении уровня декомпозиции при обратном вейвлет преобразовании.

Второй подход учитывает вышеупомянутое свойство, и был рассмотрен в работах [5], [6]. В данных работах было предложено использование распределения Лапласа для описания статистических свойств вейвлет коэффициентов для отдельной субполосы на заданном уровне декомпозиции.

$$P(x) = e^{-\left|\frac{x}{s}\right|^{p}}. \tag{1}$$

Однако при увеличении уровня декомпозиции, данная модель плохо описывает коэффициенты вейвлет преобразования, и нижняя граница Крамера-Рао увеличивается, что дает повод считать о неприемлемости использования распределения Лапласа для описания коэффициентов вейвлет преобразования науровнях декомпозиции больше 2ого.

В [4] было предложено использование распределения Стьюдента сосдвигом и масштабированием:

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)s\sqrt{np}}\left[\frac{n+\left(\frac{x-m}{s}\right)}{n}\right]^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (2)$$

Однако и у данной модели есть недостаток, данная модель плохо описывает распределение коэффициентов на первых уровнях декомпозиции.

Поэтому в данной статье предлагается использование обобщенного гиперболического распределения, частными случаями которого является и распределение Лапласа и распределение Стьюдента с сдвигом и масштабированием, и соответственно может быть использовано для описания на всех уровнях декомпозиции.

Обобщенное гиперболическое распределение

Случайные числа с обобщенным гиперболическим распределением могут быть получены путем сложения двух случайных величин с различными распределениями в приведенном виде:

$$Y=m+gV+s\sqrt{V}X\ , \qquad (3)$$

где m и g – вещественные числа и $s>0$. Случайные величины X и Y независимы, случайная величина X имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией равной $s=1$, а V имеет обобщенное обратное Гауссово распределение[1] с плотностью

$$f_{GIG}(x;l,c,y)=\frac{c^{-l}\left(\sqrt{cy}\right)^{l}}{2K_l\left(\sqrt{cy}\right)}x^{l-1}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x}+y\,x\right)}, \qquad (4)$$

где $K_l(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{l-1}e^{-\frac{x}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)}dy,\ x>0$ –модифицированная функция Бесселя, и параметрами удовлетворяющими следующим требованиям:

$$\begin{cases} c>0,\ y\geq 0 \text{ при } l<0; \\ c>0,\ y>0 \text{ при } l=0; \\ c\geq 0,\ y>0 \text{ при } l>0. \end{cases}$$

Условное распределение $Y|V$ имеет нормальное распределение со средним равным $m+gV$ и дисперсия s^2V:

$$Y|V\sim N_d\left(m+gV,s^2V\right). \qquad (5)$$

Если случайная величина V имеет обратное обобщенное Гауссово распределение, то в результате Y имеет обобщенное гиперболическое распределение. В случае если $g=0$ то плотность обобщенного гиперболического распределения является симметричным и обращается в эллиптическое распределение, в противном случае оно не является эллиптическим.

Плотность распределения обобщенного гиперболического распределения [2] описывается формулой:

$$\begin{aligned} f_x(l,a,b,d,m)&=a(l,a,b,d)\left(d^2+(x-m)^2\right)^{\frac{(l-0.5)}{2}}\times \\ &\times K_{l-0.5}\left(a\sqrt{d^2+(x-m)^2}\right)e^{b(x-m)}, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $a(l,a,b,d)$ – нормализующая константа, определяющаяся по формуле:

$$a(l,a,b,d)=\frac{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{2p}\,a^{l-0.5}d^l K_l\left(d\sqrt{a^2-b^2}\right)}. \tag{7}$$

При этом функция $f_x(l,a,b,d,m)$ дифференцируема при условии, что значения параметров распределения принимают значения:

$$\begin{cases} d>0,\ |b|\le a \ \text{при}\ l<0; \\ d>0,\ |b|<a \ \text{при}\ l=0; \\ d\ge 0,\ |b|<a \ \text{при}\ l>0. \end{cases}$$

И связь между параметрами обобщенного гиперболического распределения l,a,b,d,m и параметрами обобщенного обратного распределения Гаусса l,c,y можно определить, если выполнить замену переменных $b=\frac{g}{s^2}$, $d=\sqrt{cs}$, $a=\sqrt{\frac{y}{s^2}+b^2}$

Оценка параметров обобщенного гиперболического распределения

Аппроксимация закона распределения вейвлет коэффициентов обобщенным гиперболическим распределением представляет собой достаточно сложную задачу, поскольку оптимизация выполняется в пятимерном пространстве, причем функция правдоподобия имеет множество локальных максимумов, что значительно усложняет задачу аппроксимации численными методами, а в аналитическом виде на данный момент не найдено решение задачи подбора параметров распределения.

В качестве методов, которые могут быть использованы для аппроксимации обобщенного гиперболического распределения является подкласс методов ЕМ которые были представлены Рубіном і Демпстером [3]

В основе ЕМ метода лежит метод максимального правдоподобия, который был предложен Фишером 1912 году, в котором выполняется аппроксимация не самого закона распределения а функции правдоподобия. Для обобщенного гиперболического распределения функция правдоподобия $L(l,a,b,d,m)$ определяется как

$$L(l,a,b,d,m)=\ln\left(f_x(x;l,a,b,d,m)\right), \tag{8}$$

где $f_x(x;l,a,b,d,m)$ определяется как**Ошибка! Закладка не определена.**.

Метод ЕМсостоит в итеративном повторении шагов максимизации функции правдоподобия $L(l,a,b,d,m)$. Во время выполнения итерации nглавной целью является максимизация:

$$L(l_n,a_n,b_n,d_n,m_n)>L(l_{n+1},a_{n+1},b_{n+1},d_{n+1},m_{n+1}). \tag{9}$$

Максимизация выполняется в два шага:

1. Определение условного математического ожидания $E_{w|X,l_n,a_n,b_n,d_n,m_n}\left(\ln\left(g(X,w|\,l_n,a_n,b_n,d_n,m_n)\right)\right)$.
2. Максимизация полученного выражения по отношению к параметрам распределения l,a,b,d,m.

Этапы 1, 2 выполняются до тех пор, пока $L(l_{n+1},a_{n+1},b_{n+1},d_{n+1},m_{n+1})-L(l_n,a_n,b_n,d_n,m_n)<e$,где e - порог точности алгоритма.

Квантование

При сжатии изображений с использованием вейвлет преобразования практически во всех алгоритмах сжатия используют следующие виды квантования [7],или комбинации данных методов:

Равномерное квантование, при котором квантование вейвлет коэффициентов можно представить в виде выражения

$$S_{кв}=round\left(\frac{S}{l}\right), \tag{10}$$

где $S_{кв}$ – квантованные значения вейвлет-коэффициентов, S – исходные значения вейвлет-коэффициентов, l – параметр квантования. Квантование вейвлет-коэффициентов осуществляется путем деления на параметр квантования l, и последующим округлением до ближайшего целого.

Грубая пороговая обработка, при которой значения вейвлет-коэффициентов, модуль которых меньше порогового значения l приравнивают к нулю.

$$S_{кв} = \begin{cases} S, \text{ при } |S| > l\ ; \\ 0, \text{ при } |S| \le l\ . \end{cases} \tag{11}$$

Мягкая пороговая обработка, которую можно описать следующим выражением:

$$S_{кв} = sign(S) \cdot \max(0, |S| - l). \tag{12}$$

Статистические характеристики шума квантования

Важной при анализе методов сжатия является связь между параметрами и методом квантования спектральных составляющих с шумом квантования в пространственной области.

В результате моделирования были получены результаты взаимосвязейразличных методов квантования.Был определен закон распределения шума квантования вейвлет коэффициентов полученный для изображения в пространственной области.

Пример эмпирической плотности представлено на рисунке1

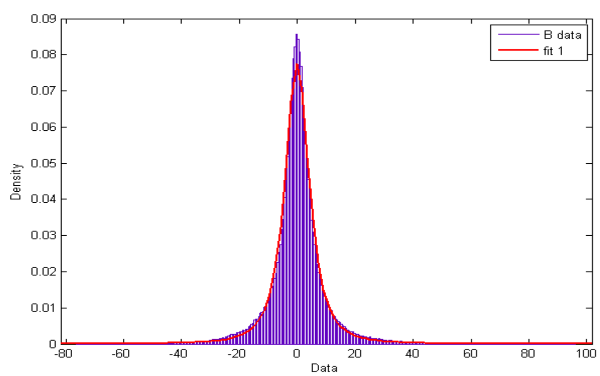


Рисунок 1–Пример эмпирической плотности распределения шума квантования в пространственной области

Для описания закона распределения шума квантования можно использовать распределение Стьюдента с масштабированием и сдвигом (2), что представляет собой частный случай обобщенного гиперболического распределения

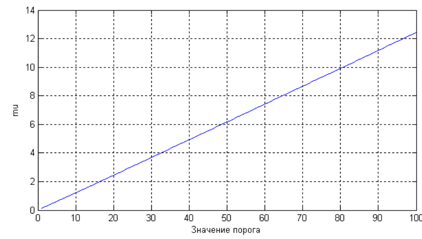
Также были получены данные, полученные путем квантования с различным порогом квантования, и зависимость параметров распределения в зависимости от порога квантования. Результаты показаны на рисунке 2 для использования мягкого квантования и на рисунке 3 при использовании грубого квантования.

Что может быть использовано для предсказания ухудшения качества при использовании субъективных оценок, и связи с существующими метриками, характеризующими качество изображений.

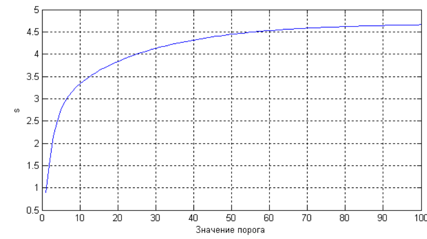
Выводы

Предложено использование обобщенного гиперболического распределения для описания различных процессов протекающих в кодерах изображений со сжатием, использующие спектральные преобразования, в одном базисе.

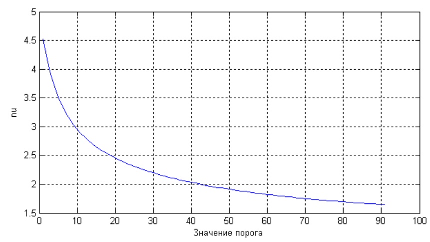
Предложено использование ЕМ алгоритма при оценке параметров обобщенного гиперболического распределения.



а)

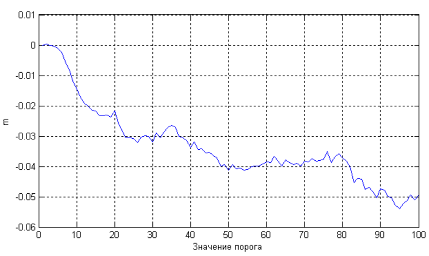


б)

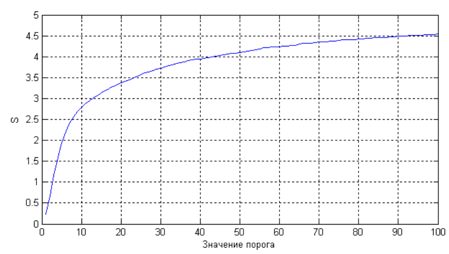


в)

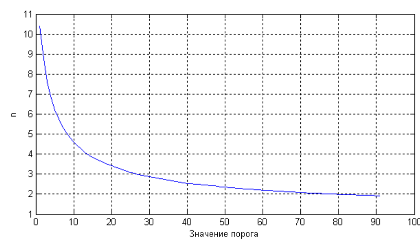
Рисунок 2 – Параметры распределения шума квантования при мягком квантовании
а) параметр μ, б) параметр σ, в) параметр υ



а)



б)



в)

Рисунок 3 – Параметры распределения шума квантования при грубом квантовании
а) параметр μ, б) параметр σ, в) параметр υ

Литература

[1] Seshadri, V. (1997). "Halphen's laws". in Kotz, S.; Read, C. B.; Banks, D. L.. Encyclopedia of Statistical Sciences, Update Volume 1. New York: Wiley. pp. 302–306

[2] Ying Chen, Wolfgang H ¨rdle, and Seok–Oh Jeong. Nonparametric Risk Management with a Generalized Hyperbolic Distributions, volume 1063 of Preprint / Weierstra ß–Institut f ̈ru Angewandte Analysis und Stochastik. WIAS, Berlin, 2005.

[3] Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm A. P. Dempster; N. M. Laird; D. B. Rubin *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* , Vol. 39, No. 1. (1977), pp. 1-38

[4] K.L. Lange, R.J.A. Little and J.M.G. Taylor. "Robust Statistical Modeling Using the t Distribution." Journal of the American Statistical Association 84, 881-896, 1989 # W.N. Venables and B.D. Ripley, Modern Applied Statistics with S (Fourth Edition), Springer, 2002

[5] E. P. Simoncelli and E. H. Adelson, “Noise removal via Bayesian wavelet coring,” in Proc. 3rd Int. Conf. Image Processing, Lausanne, Switzerland, Sep. 1996, vol. I, pp. 379–382.

[6] S. G. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation,” IEEE Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674–693, Jul. 1989.

[7] Donoho D.L. (1994) Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. Biometrika, 81, 425-455

[8] Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. Maximum likelihood data from incomplete data via the EM algorithm // J. R. Statis. Soc. Ser. B., 1977, 39, P. 1-38.