

УДК 621.391

## ПЕРФОРИРОВАННЫЕ РЕКУРСИВНЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ

НЕЗГАЗИНСКАЯ Н.В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

## PUNCTURED RECURSIVE CONVOLUTIONAL CODES

NEZGASINSKAJA N. V.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

*Аннотация.* Разработан метод повышения скорости сверточных кодов путем перфорации символов на выходе кодера. Экспериментально определена верхняя граница свободного расстояния перфорированных сверточных кодов. Приведены результаты переборного поиска порождающих многочленов перфорированных рекурсивных кодов.

*Abstract.* The method for the raising of convolutional codes velocity by puncturing of symbols on a coder exit is developed. The upper bound of free distance of the punctured recursive codes is experimentally defined. Outcomes of reboric search of the generator polynomials for the punctured recursive codes are given.

## ВВЕДЕНИЕ

Частотная эффективность применения сверточных кодов (СК) в телекоммуникационных системах зависит от скорости кода. К примеру, при скорости  $R=1/2$  необходимо двухкратное расширение полосы частот канала для передачи как информационных так и дополнительных символов. В то же время, попытки повышения частотной эффективности за счет увеличения скорости кода приводят к ухудшению его дистанционных свойств, т.е. к снижению помехоустойчивости декодирования СК. Поэтому при выборе параметров кода отыскивают разумный компромисс, в результате чего во многих системах с кодированием широко используют СК со скоростями  $2/3$  и  $3/4$ . Как известно, использование рекурсивных сверточных кодов (РСК) позволяет существенно улучшить дистанционные свойства кодов и, соответственно, повысить помехоустойчивость декодирования. В статье [1] исследованы свойства рекурсивных кодов. Там же методом переборного поиска найдены рекурсивные порождающие многочлены, позволяющие синтезировать рекурсивные коды со скоростями  $R=1/n$  ( $n$ —целое). В то же время, реализация декодеров Витерби на скорости кода  $1/2$  оказывается наиболее простой. Именно поэтому многие производители телекоммуникационного оборудования используют специализированные БИС кодеков СК со скоростью  $1/2$ , выпускаемые западными фирмами. В этих условиях представляется актуальными задача разработки метода повышения скорости РСК с использованием удобных для реализации «базовых» кодов со скоростями  $1/2$  и задача поиска новых высокоскоростных РСК по критерию максимума дистанционных свойств. В теории кодирования поиск новых кодов обычно производится в условиях, когда известна верхняя граница свободного расстояния. Степень приближения величины свободного расстояния найденного кода к верхней границе позволяет судить о совершенстве этого кода.

Целью настоящей работы является разработка метода повышения скорости РСК, а также поиск порождающих многочленов РСК, оценка приближения дистанционных свойств новых РСК с высокой скоростью к верхней границе расстояния.

## 1. МЕТОД ПЕРФОРАЦИИ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Для повышения скорости СК используем метод «перфорации» (*puncturing*), изложенный в книге [2]. Перфорация состоит в периодическом удалении некоторых символов в кодовых последовательностях на выходе кодера и замене удаленных символов

произвольным символом  $X$ , который по каналу не передается. Это позволяет повысить скорость кода за счет ухудшения его дистанционных свойств (т. е. произвести *обмен* повышения скорости на уменьшение свободного расстояния). Процедура перфорации поясняется следующим алгоритмом. Перфорации обычно подвергаются «базовые» коды со скоростью  $R=1/2$  (количество входов кодера  $k=1$  и число выходов  $n=2$ ). Алгоритм Витерби для декодирования таких кодов достаточно легко реализуется. Декодер Витерби дополняется блоком обнаружения и вставки символа  $X$ . Присутствие этого символа в кодовых последовательностях не меняет их взаимные дистанционные свойства, поскольку символ перфорации расположен в сравниваемых кодовых последовательностях в одном и том же месте. В момент проступления на вход кодера «базового» кода каждого информационного символа на выходах кодера формируются кодовые символы  $G1$  и  $G2$ . Перенумеруем информационные символы на входе кодера и определим правила работы перфоратора в виде таб. 1 и таб. 2. Наименование правила перфорации определяется длиной *цикла перфорации*  $m$ . Как видно из таб.1 при  $m=2$  (правило  $m-2$ ) последовательность номеров информационных символов разбивается на пары. Причем, информационным символам с нечетными номерами (расположенным в начале каждого цикла) соответствует пара символов ( $G1, G2$ ) на выходах кодера. Далее, информационные символы с четными номерами порождают пару ( $G1, X$ ), в которой символ  $G2$  заменен символом  $X$ . Подобное правило применимо при  $m=3$  (правило  $m-3$ , см. таб.2). Видно, что в каждом из этих примеров  $m$  символам на входе кодера соответствует  $(2m+1)$  кодовых символов на выходе кодера, что и определяет скорость перфорированного кода

$$R_{\text{перф}} = m / (2m + 1). \quad (1)$$

Выбирая длину цикла перфорации, можно получить различные значения скоростей кодов: при  $m=2$ ,  $R_{\text{перф}}=2/3$  и т. д. Простой подсчет показывает, что практически важную скорость  $R_{\text{перф}}=3/4$  можно получить последовательным применением процедур  $m-2$  и  $m-3$  ( $m-2 \& m-3$ ).

Таблица 1 – Перфорация по правилу  $m-2$

|                    |          |         |          |         |          |         |          |
|--------------------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|
| Номер инф. символа | 1        | 2       | 3        | 4       | 5        | 6       | 7        |
| Кодовые символы    | $G1\ G2$ | $G1\ X$ | $G1\ G2$ | $G1\ X$ | $G1\ G2$ | $G1\ X$ | $G1\ G2$ |
| Циклы перфорации   |          |         |          |         |          |         |          |

Таблица 2 – Перфорация по правилу  $m-3$

|                    |          |          |         |          |          |         |          |
|--------------------|----------|----------|---------|----------|----------|---------|----------|
| Номер инф. символа | 1        | 2        | 3       | 4        | 5        | 6       | 7        |
| Кодовые символы    | $G1\ G2$ | $G1\ G2$ | $G1\ X$ | $G1\ G2$ | $G1\ G2$ | $G1\ X$ | $G1\ G2$ |
| Циклы перфорации   |          |          |         |          |          |         |          |

## 2. ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ СВОБОДНОГО РАССТОЯНИЯ ПЕРФОРИРОВАННЫХ РСК

Сведения о верхней границе Хеллера для свободного расстояния сверточных кодов приведены в монографии [3, форм.(3.10)]. Данные о верхних границах свободного расстояния рекурсивных кодов в литературе отсутствуют. В этих условиях была поставлена задача экспериментального определения зависимости верхней границы свободного расстояния перфорированных РСК от длины кодирующего регистра при фиксированной скорости кода. Исследования, как и переборный поиск порождающих многочленов РСК выполнялись с использованием программ, разработанных в пакете прикладных объектно-ориентированных программ *HPVEE* компании *Hewlett-Packard Co.*

Для организации экспериментальных исследований использована описанная ранее в статье [1] концепция тест-пакета, которая базируется на известных положениях теории линейных сверточных кодов:

1. *Дистанционные свойства* СК определяются решетчатой диаграммой кода. Набор двоичных весов путей на решетке характеризует спектр расстояний кода. Минимальный вес пути из набора путей, ответвляющихся от нулевого состояния и сливающегося далее с нулевым состоянием, определяет свободное расстояние СК  $d_f$ .

2. *Полное перечисление всех возможных путей* на диаграмме состояний возможно при условии действия на входе кодера всех вариантов кодируемой последовательности, полностью заполняющей регистр кодера.

Эти положения определяют структуру т.н. «тест-пакета», используемого для исследований дистанционных свойств СК. Метод тест-пакета основан на моделировании выходных последовательностей кодера при воздействии на его входе специальным образом сформированного тест-пакета, который обеспечивает «порождение» кодером всех возможных путей из начального нулевого состояния (000..00») в такое же нулевое состояние. Для гарантии перебора *всех возможных путей* центральная часть тест-пакета должна содержать все возможные комбинации входных символов. Для обеспечения *полноты вариантов* активной части пакета она формируется из потока случайных равновероятных независимых символов. Это гарантирует *полный перебор* ненулевых путей на выходе кодера.

При исследовании верхних границ перфорированных двоичных РСК кодовые последовательности базовых СК проходят через блок перфорации, реализующий заданное правило перфорации в соответствии с описанным выше алгоритмом. В структуру программного обеспечения эксперимента входят генератор тест-пакета, генераторы двоичных случайных чисел, используемых в качестве коэффициентов порождающих многочленов прямых и обратной связей РСК, вычислитель расстояния Хэмминга  $d$ . Общая конфигурация структуры измерений описана в [3, рис.6.6]. В результате прохождения тест-пакета через кодер РСК на его выходе формируется поток случайных чисел, каждое из которых определяет величину расстояния Хэмминга  $d$  отрезка пути на решетчатой диаграмме кодера от полностью нулевого пути. Минимальное значение этих случайных чисел и есть свободное расстояние исследуемого РСК. Прохождение тест-пакетов через кодер организовано в виде циклов. На каждом цикле измерений с номером  $i$  ( $0 < i < L$ ) производится вычисление величины расстояния  $d_{(i)}$ , которое зависит случайным образом от структуры пакета и значений порождающих многочленов. Далее производится вычисление среднего расстояния

$$d_{\text{(средн)}} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L d_{(i)} \quad (2)$$

на всем множестве циклов измерений объема  $L$ . Для определения верхней границы свободного расстояния используется известное из теории вероятностей положение о том, что при любом распределении вероятностей случайных чисел их среднее значение всегда больше наименьшего числа. Т.е. среднее (2) является верхней границей свободного расстояния

$$d_f \leq d_{\text{(ВГ)}} = d_{\text{(средн)}} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^L d_{(i)} \quad (3)$$

В таблице 3, таблице 4 отдельной графой даны результаты измерений значений верхних границ РСК в зависимости от длины кодирующего регистра при различных законах перфорации, которые обеспечивали повышение скорости РСК до значений 2/3 и 3/4.

3. РЕКУРСИВНЫЕ ПЕРФОРИРОВАННЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ

Результаты поиска порождающих многочленов рекурсивных кодов (РСК) со скоростями  $2/3$ ,  $3/4$  приведены в таб.3 и таб.4. В этих же таблицах даны сведения о нерекурсивных перфорированных кодах (НСК) с такими же скоростями по справочным данным книги [2]. Порождающие многочлены представлены в восьмеричной форме записи. При этом запись многочленов РСК вида  $(G1, G2//H)$  дает представление о многочленах  $(G1, G2)$  прямой связи базового кода. Затем следует форма многочлена обратной связи  $H$ . Нерекурсивные коды представлены записью вида  $(G1, G2//0)$ , в которой многочлен обратной связи  $H=0$ . Для рекурсивных кодов указаны экспериментальные значения верхних границ свободного расстояния, определенные в предыдущем разделе.

Таблица 3–Характеристики сверточных кодов со скоростью  $R=3/4$

| Длина кодирующего регистра $K$ | Класс кода | Порождающие многочлены базовых кодов $(G1, G2//H)$ | Правило перфорации | Свободное расстояние $d_f$ | Верхняя граница $d_{(вг)}$ |
|--------------------------------|------------|--|--------------------|----------------------------|----------------------------|
| 3                              | РСК        | (400,620//007)                                     | $m-2 \& m-3$       | 8                          | 10                         |
| 3                              | НСК        | (7,5//0)   | $m-2 \& m-3$       | 3                          | –                          |
| 4                              | РСК        | (144,010//023)                                     | $m-2 \& m-3$       | 4                          | 6                          |
| 4                              | НСК        | (15,17//0)   | $m-2 \& m-3$       | 4                          | –                          |
| 5                              | РСК        | (033,321//101)                                     | $m-2 \& m-3$       | 8                          | 11                         |
| 5                              | НСК        | (31,33//0)   | $m-2 \& m-3$       | 4                          | –                          |
| 6                              | РСК        | (255,602//120)                                     | $m-2 \& m-3$       | 4                          | 5                          |
| 6                              | НСК        | (57,65//0)   | $m-2 \& m-3$       | 4                          | –                          |
| 7                              | РСК        | (244,364//124)                                     | $m-2 \& m-3$       | 7                          | 8                          |
| 7                              | НСК        | (171,133//0)                                       | $m-2 \& m-3$       | 6                          | –                          |
| 9                              | РСК        | (033,321//101)                                     | $m-2 \& m-3$       | 10                         | 13                         |

Верхние границы для НСК в справочных данных [2] отсутствуют.

Таблица 4 – Характеристики сверточных кодов со скоростью  $R=2/3$

| Длина кодирующего регистра $K$ | Класс кода | Порождающие многочлены базовых кодов $(G1, G2//H)$ | Правило перфорации | Свободное расстояние $d_f$ | Верхняя граница $d_{(вг)}$ |
|--------------------------------|------------|--|--------------------|----------------------------|----------------------------|
| 3                              | РСК        | (400,620//007)                                     | $m-2$              | 4                          | 6                          |
| 3                              | НСК        | (7,5//0)   | $m-2$              | 3                          | –                          |
| 4                              | РСК        | (144,010//023)                                     | $m-2$              | 4                          | 6                          |
| 4                              | НСК        | (15,17//0)   | $m-2$              | 4                          | –                          |
| 5                              | РСК        | (033,321//101)                                     | $m-2$              | 8                          | 11                         |
| 5                              | НСК        | (31,33//0)   | $m-2$              | 4                          | –                          |
| 6                              | РСК        | (255,602//120)                                     | $m-2$              | 6                          | 7                          |
| 6                              | НСК        | (37,25//0)   | $m-2$              | 4                          | –                          |
| 7                              | РСК        | (300,113//132)                                     | $m-2$              | 9                          | 10                         |
| 7                              | НСК        | (171,133//0)                                       | $m-2$              | 6                          | –                          |
| 8                              | РСК        | (033,321//101)                                     | $m-2$              | 9                          | 13                         |
| 9                              | РСК        | (033,321//101)                                     | $m-2$              | 13                         | 15                         |

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. *В статье для повышения скорости рекурсивных сверточных кодов использован простой в реализации метод «перфорации» кодовых последовательностей.*
2. *Выполнен переборный поиск порождающих многочленов префорированных рекурсивных сверточных кодов, свободное расстояние которых достигает верхней границы.*
3. *Новые рекурсивные коды по величине свободного расстояния оказываются лучше известных нерекурсивных кодов с той же скоростью и рекомендуются для применения в высокоскоростных телекоммуникационных системах.*

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Банкет В.Л. Метод синтеза рекурсивных сверточных кодов / В.Л. Банкет, Н.В. Незгазинская // Цифрові технології. – 2009. – № 5. – С. 5-17.
2. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Пер. с англ. –М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
3. Банкет В.Л. Сигнально-кодовые конструкции в телекоммуникационных системах. - О.: Феникс, 2009.– 180 с.
4. ViterbiA.J. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication // N.Y.: Addison-Wersley Publ. Company.- 1995. – P. – 240.