

УДК 621.391

ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ДИСТАНЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

НЕЗГАЗИНСКАЯ Н. В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

THE INFLUENCE OF A FEEDBACK ON DISTANCE PROPERTIES OF THE CONVOLUTIONAL CODES

NEZGAZINSKAJA N.V.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

Аннотация. В работе рассмотрены возможности введения обратной связи в структуру кодера сверточного кода (СК) с целью формирования рекурсивных сверточных кодов (РСК). Приведен анализ работы РСК. Экспериментально показана возможность улучшения дистанционных свойств СК за счет введения обратной связи.

Annotation. In the article the possibilities of introduction of the feedback to coder's structure for the purpose of formation recursive convolutional codes (RCC) are presented. The qualitative analysis of work of RCC is resulted.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сверточные коды (СК) широко применяются в современных цифровых телекоммуникационных системах для повышения помехоустойчивости передачи информации при действии различных помех [2-5]. Наиболее популярным является использование *нерекурсивных* сверточных кодов (НСК) в сочетании с алгоритмом декодирования А.Витерби. Вместе с тем, в последнее время особое внимание обращено на *рекурсивные* сверточные коды (РСК), ввиду их явного преимущества перед нерекурсивными кодами. Особый интерес к РСК проявляется при реализации турбо-кодов [6-8]. Анализ показывает, что переход к рекурсивным кодам за счет введения обратной связи позволяет существенно улучшить дистанционные свойства РСК в сравнении с НСК. В работе [1] изложен общий метод синтеза РСК с использованием рекурсивных порождающих многочленов. Вместе с тем, в известной нам литературе теория РСК не разработана и сведения об РСК ограничены публикацией структурных схем кодеров [5,6]. *Задача настоящей работы* – выяснить причины и дать оценку изменения характеристик порождающих многочленов РСК в сравнении с НСК. В статье используются известные определения характеристик НСК [1, разд.7.1], [2, разд.4.4]. Для численных исследований характеристик СК использованы программы, разработанные в пакете прикладных объектно-ориентированных програм *HPVEE* компании *Hewlett-Packard Co*.

1. ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОГОЧЛЕНЫ РЕКУРСИВНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Порождающие многочлены нерекурсивных СК представляют собой линейные дискретные цепи, составленные из тактируемых элементов памяти и весовых сумматоров. Структура рекурсивного порождающего многочлена приведена на рис.1б [1]. Она получена путем введения *цепи обратной связи* (показана пунктиром) в каноническую структуру нерекурсивного порождающего многочлена (рис.1а). Здесь: $G(D)$ –исходный нерекурсивный порождающий многочлен; $H(D)$ –многочлен цепи обратной связи рекурсивного порождающего многочлена. Видно, что символы обратной связи вводятся через сумматор, расположенный на входе первого элемента памяти регистра. Для нерекурсивной структуры на рис.1а порождающий многочлен можно записать как коэффициент передачи от входа к выходу структуры:

$$G(D) = \frac{V(D)}{U(D)}. \quad (1)$$

В то же время, для рекурсивной структуры на рис.1б можно записать следующие соотношения:

$$U_o(D)=U(D)+U_H(D), U_H(D)= U_o(D)H(D), U_o(D)=U(D)+ U_o(D)H(D), \\ U(D)= U_o(D)[1-H(D)], V(D)= U_o(D)G(D).$$

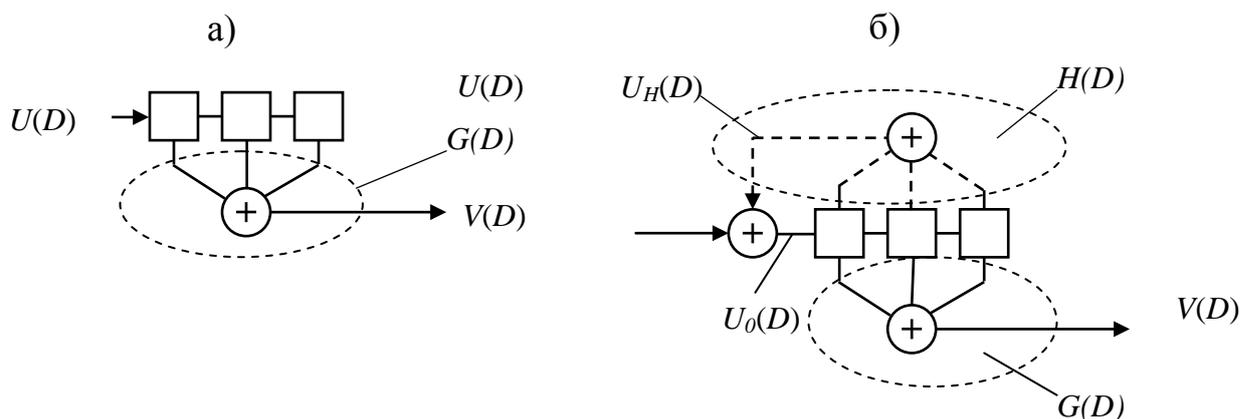


Рисунок 1 – Канонические структуры порождающих многочленов:
а) –нерекурсивного; б) – рекурсивного

Откуда следует выражение для передачи рекурсивного многочлена через нерекурсивный многочлен и многочлен обратной связи:

$$G_R(D) = \frac{V(D)}{U(D)} = \frac{G(D)}{1-H(D)}. \quad (2)$$

В соответствии с выражением (2) рекурсивный порождающий многочлен задается двумя многочленами: многочленом прямой связи ($G(D)$) и многочленом обратной связи ($H(D)$).

2. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Выясним влияние обратной связи на характеристики порождающих многочленов рекурсивных СК. Оно сводится к следующему:

2. Введение обратной связи радикально *изменяет* вид *порождающего многочлена* и, соответственно, вид *импульсной характеристики* кодера. Производя деление в (2), получаем полубесконечную последовательность:

3.

$$G_R(D) = \frac{G(D)}{1-H(D)} = G(D)+H(D)G(D)+H^2(D)G(D)+...+H^i(D)G(D)+...(i \rightarrow \infty) \quad (3)$$

Для выяснения «физического» смысла влияния обратной связи ограничимся в этом выражении первыми двумя членами последовательности:

$$G_R(D)=G(D)+H(D)G(D). \quad (4)$$

Структура, соответствующая этому выражению, показана на рис.2. Из выражений (3), (4) и рисунка 2 следует, что эквивалентная схема рекурсивного многочлена $G_R(D)$ имеет каскадную структуру, в которой, в соответствии с выражением (3), содержится большое число ветвей вида $H^l(D)G(D)$, наличие которых обусловлено введением обратной связи.

Свойство неограниченной протяженности порождающих многочленов рекурсивного кода, было отмечено, еще при выборе компонентных кодов для турбо-конструкций [6,8]. С учетом этого, кодовым последовательностям турбо-кода придавалась блоковая структура и, тем или иным способом, решался вопрос «усечения хвоста» кодовых последовательностей на выходах компонентных РСК в составе кодера турбо-кода [8].

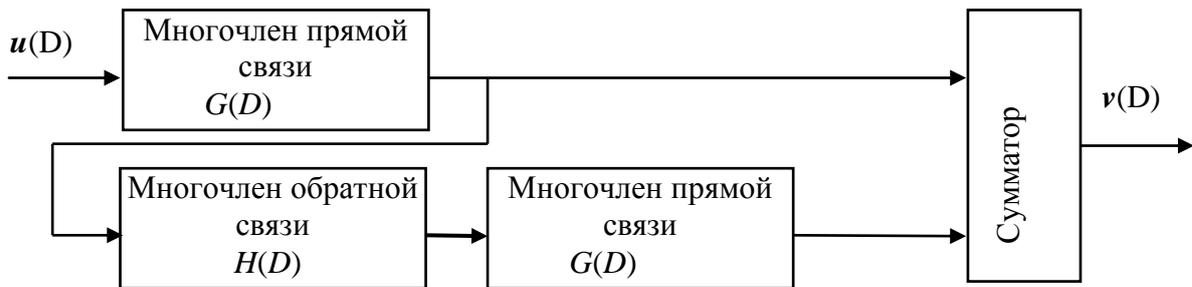


Рисунок 2 – Эквивалентная схема рекурсивного порождающего многочлена

Из выражений(3) и (4) следует, что при $H(D)=0$ рекурсивный порождающий многочлен совпадает с нерекурсивным:

$$G_R(D)=G(D).$$

2. Введение обратной связи изменяет вид последовательности на выходе кодера. Сказанное иллюстрируется характером изменения вида импульсной характеристики рекурсивного многочлена.

Пусть исходный нерекурсивный многочлен имеет вид

$$G(D)=g_0D+g_1D+g_2D^2+\dots+g_KD^K.$$

Тогда соответствующая ему импульсная характеристика будет

$$g(D)=g_0D+g_1D+g_2D^2+\dots+g_KD^K.$$

Выберем форму многочлена обратной связи

$$H(D)=h_0D+h_1D+h_2D^2+\dots+h_LD^L.$$

Предполагается, что, в общем случае, формирование символов в цепи обратной связи производится с использованием части элементов памяти регистра ($L \leq K$). Тогда импульсная характеристика с учетом обратной связи в соответствии с формулой (4) будет:

$$g_R(D)=g(D)+H(D)g(D)=g(D)+(g_0D+g_1D+g_2D^2+\dots+g_KD^K)(h_0D+h_1D+h_2D^2+\dots+h_LD^L).$$

Анализ произведения многочленов в этом выражении показывает, что умножение на многочлен обратной связи $H(D)$ играет роль своеобразной «задержки» (точнее, набора

задержек с весовыми коэффициентами h_i .) К примеру, если в многочлене обратной связи содержится только ненулевой член старшей степени

$$H(D)=D^L,$$

импульсная характеристика

$$g_R(D)=g(D)+g(D)D^L=g(D)+(g_0D^L+g_1D^{(1+L)}+g_2D^{(2+L)}+\dots+g_KD^{(K+L)})$$

содержит исходный нерекурсивный член $g(D)$ и дополнительный *запаздывающий* член, смещенный на L тактов. В целом, при произвольной форме многочлена обратной связи $H(D)$ картина формирования импульсной характеристики будет иметь вид, показанный на рис.3. В рассмотренном выше примере импульсная характеристика рекурсивного многочлена «растягивается» до величины $(K+1+L)$ тактов. Если выбрать «длинный» многочлен обратной связи (например, выбрать $L=K$), то получим практически *двухкратное растяжение*. Это явление можно трактовать как «искусственное» увеличение «памяти» кода при неизменной длине «физической» памяти регистра K , которая определяет сложность декодирования по алгоритму Витерби. Именно это обстоятельство служило основанием выбора РСК в качестве компонентных кодов для реализации турбо-кодирования, когда основным критерием выбора кода было формирование достаточно длинного кода при приемлемой сложности декодирования.

Кроме этого эффекта, введение обратной связи может приводить к изменению дистанционных свойств рекурсивного кода за счет *наложения* многочленов прямой и обратной связи в сумме (3). Такая область «*интерференции*» показана на рис.3. Количественная оценка влияния интерференции может быть получена путем моделирования.

3. *Введение обратной связи увеличивает среднее расстояние между кодовыми последовательностями на выходе кодера.* Это подтверждается данными экспериментальных исследований, приведенными в таб. 1. Для сравнения взяты порождающие многочлены стандартных нерекурсивных СК с различными скоростями R и длинами кодирующих регистров K , сведения о которых приведены в справочных таблицах [5]. Как известно, дистанционные свойства двоичных линейных СК можно оценивать по величине минимального веса Хэмминга последовательностей на выходе кодера. Кроме этого, можно дать верхнюю оценку минимального веса. В эксперименте на вход структуры рекурсивного многочлена (рис.2) подавался пакет случайных равновероятных символов, окруженный нулями. Длина пакета устанавливалась таким образом, чтобы он полностью заполнял регистр кодера. В этом случае была гарантия того, что испытуемый кодер порождает все возможные варианты выходных последовательностей. Далее подсчитывался вес Хэмминга каждого варианта выходных последовательностей.

Таблица 1 – Сравнение среднего веса Хэмминга, обеспечиваемого компонентными порождающими многочленами с обратной связью и без нее

Исходные стандартные нерекурсивные СК [5]: Скорость $R=1/3, K=3$, порождающие многочлены $G=(5,7,7)$; Скорость $R=1/3, K=4$, порождающие многочлены $G=(13,15,17)$; Скорость $R=1/3, K=5$, порождающие многочлены $G=(25,33,37)$; Скорость $R=1/3, K=6$, порождающие многочлены $G=(47,53,75)$. Скорость $R=1/2, K=6$, порождающие многочлены $G=(53,75)$.											
Средний вес Хэмминга, обеспечиваемый компонентными порождающими многочленами с обратной связью и без нее											
G	5	7	13	15	17	25	33	37	47	53	75
K	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6
РСК: d_c $p(РСК)$	3,08	3,79	2,05	2,82	3,33	3,74	4,85	4,36	5,74	6	5,54
НСК: d $cp(НСК)$	2,79	2,67	1,92	2,67	2,41	3,18	3,69	4,05	5,03	5,18	4,69

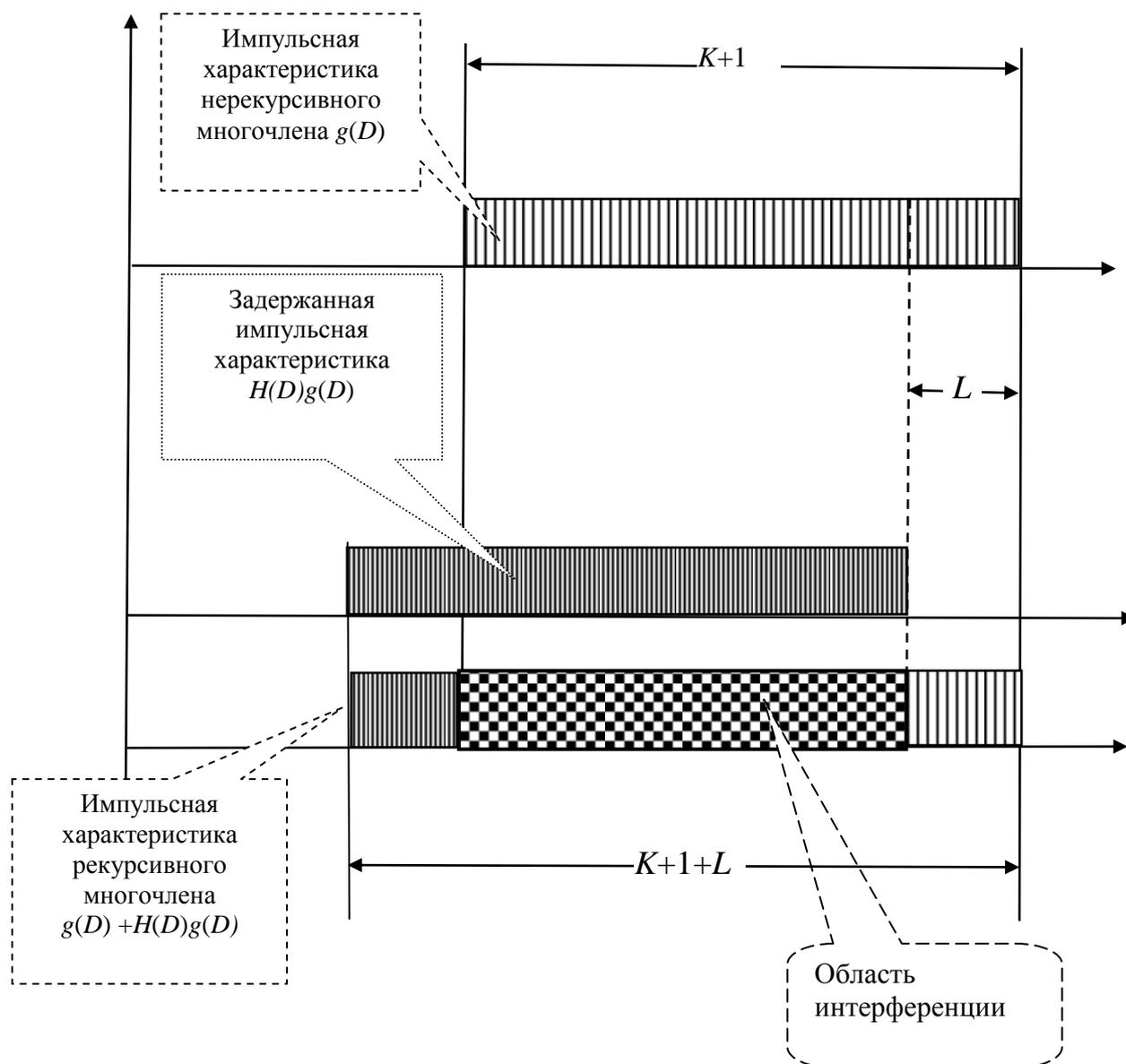


Рисунок 3 – Формирование импульсной характеристики рекурсивного многочлена

В силу случайного характера входных последовательностей, значения весов откликов кодера оказывались также случайными. Затем оценивался средний вес d_{cp} на длине $5K$, которая соответствовала минимальному значению рекомендованной длины памяти декодера Витерби [2, с.137] $((5-10)K)$.

Известно, что при любом распределении вероятностей случайных чисел их среднее значение всегда больше минимального значения. Это позволяет утверждать, что измеренное значение d_{cp} может быть использовано в качестве *верхней оценки* минимального веса откликов кодера и, соответственно, минимального расстояния кода. Первоначально оценивалась верхняя граница $d_{cp(НСК)}$ весов последовательностей на выходе НСК с многочленами $G(D)$ исходных стандартных нерекурсивных СК (без обратной связи). Затем подобный эксперимент повторялся при включенной обратной связи и случайном выборе многочлена обратной связи $H(D)$. Видно, что при использовании обратной связи средний вес $d_{cp(РСК)}$ оказывается выше среднего веса кодов без обратной связи $d_{cp(НСК)}$. Это означает, что

дистанционные свойства исходных стандартных нерекурсивных СК могут быть улучшены за счет введения обратной связи.

Результаты эксперимента показаны на рис.4. Они подтверждают преимущества РСК по сравнению с НСК.

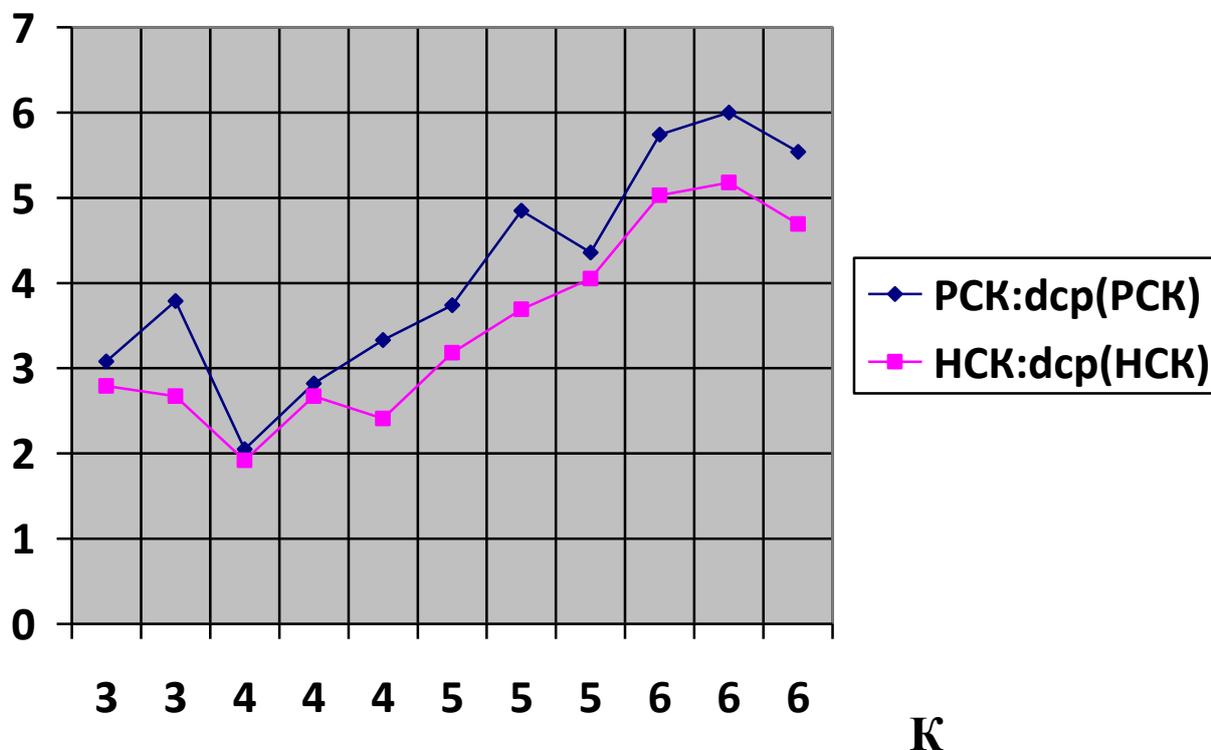


Рисунок 4 - Преимущества РСК по сравнению с НСК

Полученные экспериментальные результаты позволяют сделать следующие *замечания*. В радиотехнике известно множество поучительных примеров использования обратной связи для улучшения (и даже для изменения) свойств устройств. Например, охват отрицательной обратной связью электронных усилителей улучшает их линейность и частотные свойства. В то же время, используя положительную обратную связь, добиваются автогенерации колебаний. Причем, изменение параметров положительной обратной связи позволяет управлять характеристиками таких автогенераторов (частоты, фазы, например). В технике цифровых устройств известны генераторы псевдослучайных последовательностей (ПСП). Генератор ПСП есть регистр сдвигов со специально подобранной обратной связью, которая может быть условно трактована, как «положительная» обратная связь. В упоминаемых выше радиотехнических устройствах используется, как известно, отрицательная и положительная обратная связь. В случае двоичных кодов с метрикой Хэмминга оба вида связи эквивалентны, поскольку по алгебре двоичных чисел результаты сложения и вычитания совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Введение обратной связи в структуру нерекурсивного кодера изменяет вид импульсной характеристики кодера: импульсная характеристика «растягивается» и меняется ее весовой состав, обусловленный многочленами прямой и обратной связи.

2. Экспериментально установлено, что введение обратной связи приводит к увеличению верхней границы для минимального веса Хэмминга кодовых

последовательностей. В описанном выше эксперименте значения многочленов обратной связи выбирались случайным образом. При этом верхние границы минимальных весов последовательностей на выходе кодеров с обратной связью оказывались выше, нежели границы минимальных весов кодеров без обратной связи. Это может служить основанием для поиска «оптимальных» многочленов обратной связи, обеспечивающих при заранее выбранном многочлене прямой связи наибольший прирост веса Хэмминга.

3. Изложенное в п.2 может служить побуждением поиска порождающих многочленов (прямой и обратной связи) рекурсивных сверточных кодов. Обычно поиск производится методом переборного поиска по критерию максимума свободного расстояния при заданной скорости кода и длине кодирующего регистра.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банкет В.Л., Метод синтеза рекурсивных сверточных кодов / В.Л. Банкет., Н.В. Незгазинская / Цифрові технології. – 2009. – №5. - С. 5-17.
2. Скляр Б. Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение. / Пер. с англ. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
3. Банкет В.Л. Цифровые методы в спутниковой связи. / В.Л. Банкет, В. М. Дорофеев – М.: Радио и связь, 1988. – 240 с.
4. Кларк Дж., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1987. – 392 с.
5. Lin S., Costello. D. Error Control Coding: Fundamentals and Applications. Prentice – Hall Inc. N.Y. 1983 – 500 p.
6. Berrou C. The Ten-Year-Old Turbo Codes are Entering into Service // IEEE Communicatios Magazine. Vol. 41. No. 8. August 2001. pp.110 - 116.
7. Valenti M.C. and Sun J. The UMTS Turbo Code and Efficient Decoder Implementation Suitable for Software-Defined Radios // International Journal of Wireless Information Networks. Vol. 8, No. 4, October 2001. pp.203 - 215.
8. Банкет В. Турбо коды и их применение в телекоммуникационных системах / В.Л. Банкет, С.Д Прокопов, А.Г. Постовой, Ф.В. Топорков / Зв'язок. – 2004. – №3. - С. 45 - 47.