УДК 621.391

ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ СКЛАДНОЇ МЕРЕЖІ

КОЛОБОВ С.О., ЖУРАКОВСЬКИЙ Б.Ю., ОЛІЙНИК В.В.

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій

DETERMINATION OF MAXIMUM FLOW NETWORKS WITH COMPLEX

KOLOBOV S.O., ZHURAKOVSKY B.YO., OLIYNYK V.V.

State university of information-communication technologies

Анотація. *Пропонується алгоритм визначення максимального потоку в мережі, заснований на знаходженні шляху максимальної пропускної здатності із застосуванням апарату К – списків.*

Annotation. *The algorithm of determination of maximal thread in a network, based on finding of path of maximal carrying capacity with application of vehicle C – lists, is offered.*

У статті пропонується алгоритм визначення максимального потоку в мережі, заснований на знаходженні шляху максимальної пропускної здатності із застосуванням апарату К – списків [2, 3]

Задача про знаходження максимального потоку на графі (Y, U) (Y – множина вершин, U – множина дуг) з матрицею пропускних здатностей $R = |r_{iy}|$ $0 \le r_{iy} < \infty$ формується наступним чином.

Визначити матрицю $X = |x_{ij}|$ таким чином, щоб доставити

$$max\, v$$

при умовах

$$\sum X_{iy} - \sum X_{ji} = \begin{cases} v & i = s \\ -v & i = t \\ 0 & i \neq (s,t) \end{cases},$$

де S - джерело, t - стік

Нехай на графі існує шлях μ із i в j. Назвемо пропускною здатністю шляху μ величину

$$r_\mu = \min_{(l,r)\epsilon\mu} r_{0r}$$

Задача визначення шляху максимальної пропускної здатності (максимального шляху) на графі заключається у визначенні на графі такого шляху μ із пункту I в пункт t для якого r_μ максимальне.

Позначимо v_i пропускну здатність шляху максимальною пропускної здатності із i в t.

Тоді

$$v_i = max\,min(r_{ij}, v_j) \quad (1)$$

$$v_t = K \qquad (K > max\, r_{ij}) \quad (2)$$

Система рівнянь (1)-(2) нелінійна, тому для її рішення потрібно скористатись методом послідовних зближень.

Покладемо

$$v_i^{(0)} = r_{it} \qquad v_t^0 = K \tag{3}$$

$$v_i^{(K+1)} = \max_{j\neq i} min\left(r_i, v_j^{(K)}\right) \tag{4}$$

$$v_i^{(K+1)} = K \tag{5}$$

Докажемо схожість методу послідовних зближень. Перед усім зрозуміло, що додавання до шляху зайвої дуги не збільшує його пропускної здатності. Крім того, зрозуміло, що нульове зближення шукає оптимальний по пропускній здатності одноланковий шлях, перше зближення відшукує оптимальний, не більш, ніж дволанковий шлях, К-е зближення відшукує оптимальний не більш, ніж К-ланковий шлях і т.д. Тому маємо:

$$v_i^{(K+1)} \geq v_i^{(K)} \tag{6}$$

Крім того

$$v_i^{(K)} \leq max r_{ij} \tag{7}$$

для всіх К.

Із (6) і (7) випливає, що процес послідовних зближень сходиться, якщо тільки

$$\max r_{ij} < \infty \tag{8}$$

У випадку, коли (8) не виконується, змінимо матрицю пропускних здатностей, замінивши її нескінченні елементи величиною К і знайшовши К з умови

$$K > \max_{r_{ij}<\infty} r_{iy} \tag{9}$$

Можна покласти, наприклад, $K = \max_{r_{ij}<\infty} r_{ij} + 1$ Якщо у процесі розв'язання задачі ми отримаємо $v_i = K$, це буде означати, що із I в t існує шлях нескінченної пропускної здатності. Таким чином, не порушуючи загального, можна вважати матрицю пропускних здатностей конечною.

Для доказу єдинтства розв'язку (1) і (2) припустимо, що система (1)-(2) має два розв'язки V_i і v_i Нехай максимум різниці $|v_i - V_i|$ досягається на індексі К.

$$max|v_i - V_i| = v_k - V_k \tag{10}$$

В силу (I) маємо:

$$v_k = \max_{j\neq k} min(r_{ij}, v_j) \tag{11}$$

$$V_k = \max_{j\neq k} min(r_{ij}, V_j) \tag{12}$$

Нехай в (II) максимум досягається на індексі $l \neq K$ а в (12) на індексі$S \neq K$

$$v_k = \min r_{Kl} v_l \qquad (11')$$

$$V_K = min r_{KS} V_S \qquad (12')$$

Із (12) і (12') отримуємо $min r_{KS} V_S \geq min r_{Kl} V_l$

Тому маємо

$$v_K - V_K \leq min r_{Kl} v_l - min r_{Kl} V_l \qquad (13)$$

Може представитись два випадки

а) $min r_{Kl} v_l = r_{Kl}$;

б) $min r_{Kl} V_l = V_l$

У випадку а) маємо $v_K - V_K \leq r_{Kl} - r_{Kl} = 0$, що протирічить (10), у випадку б) маємо $v_K - V_K = \min r_{Kl} v_l - V_l \leq v_l - V_l$, що також протирічить (10). Єдність доказано.

Задачу про визначення максимального потоку можна звести до задачі про визначення шляху максимальної пропускної здатності, тобто наступним чином: в заданій мережі визначається шлях максимальної пропускної здатності із I в t ; вздовж цього шляху назначається струм, рівний його пропускній здатності, після чого матриця пропускних здатностей мережі коректується наступним чином: пропускні здатності дуг, що входять в знайдений шлях, зменшуються на величину потоку вздовж цих дуг. Після цього процедура повторюється і т.д. Процес повторюється до тих пір, доки максимальна пропускна здатність шляху із I в t не стане рівною 0. Конечність матриці пропускних здатностей гарантує нам закінчення процесу після конечного числа кроків.

Для графів з великою кількістю вершин запропонований метод, як і раніше, що зустрічались в літературі [1], потребує запам'ятовування дуже великої кількості інформації, що дуже не зручно при розв'язанні таких задач на ПК. Тому пропонується використати K-спискове представлення графів і операції над K- списками для розв'язання даного алгоритму на ПК.

Зробимо формальне викладення алгоритму на мові K -списків. Нехай задана мережа:

$Y = [A, U]$, $R = \lfloor r_{ij} \rfloor$, джерело в I, стік в t,

де A - список вершин графа,
U - список дуг графа,
R - список пропускних здатностей дуг графа,
r_{ij} - елементи списку R

Визначимо шлях максимальної пропускної здатності наступним чином:

$$v_i = max\, min r_{ij} v_j \qquad (1')$$

$$v_t = K \qquad (2')$$

де v_j - елементи списку максимальних шляхів$(K-1)$ зближення.

Покладемо

$$v_i^{(0)} = r_{it} \;;$$

$$v_t^{(0)} = K \,.$$

Якщо $v_1^{(0)} = 0$ перейдемо до І-ої ітерації. Якщо $v_1^{(0)} \neq 0$ назначимо вздовж дуги $(1, t)$ потік, рівний $v_1^{(0)} = r_{1t}$ Нульовою ітерацією потоку буде $X^0 = \left[X_{ij}^{(0)}\right]$

$$X_{ij}^{(0)} = \begin{cases} r_{1t} & (i,j) = (1,t) \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

і змінимо список пропускних здатностей (операція віднімання списків).

$$R' = R - X^{(0)} .$$

Після цього переходимо до першої ітерації на мережі.

$$Y = [A, U]; \qquad R^{(1)} = R - X^{(0)} ;$$

$$V_l^{(0)} = 0 \,, \quad V_i^{(0)} = r_{it}^{(1)} , \quad V_t^{(0)} = K \quad .$$

Допустимо, що вже зроблено K ітерацій. Маємо

$$Y = [A, U]; \quad R^{(K)} = R - X^{(K)}; \quad v_1^{(K)} = 0; \; v_i^{(K)} \geq 0; \; v_t^{(K)} = K .$$

Побудуємо $V_i^{(K+1)}$. Якщо $V_l^{(K+1)} = 0$, $V_i^{(K+1)} = 0$ то процес закінчується.

В процесі кожної ітерації вздовж шляху μ на якому реалізується $V_i^{(K)} \neq 0$ визначаємо потік

$$X_\mu^{(K)} = \left[X_{ij\mu}^{(K)}\right], \text{ де}$$

$$X_{ij\mu}^{(K)} = \begin{cases} v_{1(K)} & (ij) \epsilon \mu \\ 0 & (ij) \bar{\epsilon} \, \mu \end{cases}$$

Таким чином, сумарний потік стає рівним

$$X^{(K+1)} = X^{(K)} + X_\mu^{(K+1)}$$

і корегуємо мережу

$$Y = [A, U] , \qquad R^{(K)} = R^{(K)} - X_{\mu 1}^{(K+1)} .$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. - М.: Мир, 1966. – 268 с.
2. Кулик В.Т. Алгоритмизация объектов управления. – К.: Наукова думка, 1968. – 144 с.
3. Муттер В.М. Основы помехоустойчивой телепередачи информации. – Л.: Энергоатом издат.,1990. – 288 с.