УДК 621.39

ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

СТРЕЛКОВСКАЯ И.В., СОЛОВСКАЯ И.Н.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова (ОНАС)

TENSOR MODEL RESEARCHING OF QUEUEING NETWORK

STRELKOVSKAYA I.V., SOLOVSKAYA I.N.

Odessa national academy of telecommunications named after O.S. Popov (ONAT)

Аннотация. *Предложено использование тензорной модели для исследования характеристик сети массового обслуживания (СеМО), состоящей из систем массового обслуживания (СМО) M/M/1. Для анализа качественных характеристик СеМО обосновано использование тензорных методов оценки интенсивностей поступления заявок, коэффициентов загрузки и длительности обслуживания на примере сети из четырех СМО.*

Abstract. *Usage of tensor model to research queueing network (QN) characteristics that consists of queueing systems (QS) M/M/1 was proposed. To analyze quality QN characteristics the usage tensor valuation methods of request intensity, workload coefficients and service duration, on the example of four QS network model was explained and grounded.*

Постановка проблемы. Основным направлением развития телекоммуникаций сегодня является внедрение сетей нового поколения *Next Generation Network (NGN)*, архитектура которых обладает свойствами мультисервисности, многопротокольности и инвариантности к технологиям коммутации. Единая сетевая архитектура сетей *NGN* должна обеспечивать совместное использование сетевых ресурсов и требуемую пропускную способность с гарантированным качеством обслуживания *QoS (Quality of Service)* [1].

Одной из важнейших задач, способствующих формированию и реализации *NGN*, является оценка характеристик, которые позволяют анализировать качество обслуживания в сети в целом, а также в ее отдельных фрагментах. Исследование отдельных элементов сети *NGN*, представленных узлами коммутации с разными принципами построения, используемыми технологиями и алгоритмами распределения информации возможно с использованием различных моделей систем массового обслуживания (СМО), а их совокупности с определенной структурой взаимодействия между ними с целью оценки сетевых характеристик – с помощью моделей сети массового обслуживания (СеМО). Модели СеМО как математические модели телекоммуникационных сетей с пакетной коммутацией достаточно изучены и широко применяются для анализа сетевых и узловых качественных характеристик и являются эффективным механизмом аналитического моделирования. Однако, задача анализа реальных сетевых архитектур СеМО большой размерности достаточно громоздка и крайне затруднительна [2].

В данной работе предлагается исследование характеристик СеМО с использованием тензорных моделей. Исследование характеристик телекоммуникационных сетей с помощью тензорных моделей выполнено в работах Г.Крона, А.Е. Петрова, В.В. Поповского, А.В.Лемешко и др. [3,4,5,6,7,8]. С помощью тензорных методов, возможно, решать задачи одновременного исследования структурных характеристик сети и функциональных свойств систем. Использование тензорной модели при исследовании сети массового обслуживания представленной системами массового обслуживания позволит решить задачи оценки качества обслуживания при изменении параметров сети, при переходе от одной топологии к другой, прогнозирования состояния сети с учетом топологии и особенностей технологического построения коммутационных узлов.

Постановка задачи. Рассмотрим исходную структуру телекоммуникационной сети, представленную СеМО, состоящую из *n* систем массового обслуживания М/М/1, представленных узлами коммутации. Модель СМО М/М/1 предполагает, что на вход одноканальной системы, которая находится в стационарном режиме функционирования, поступает простейший (пуассоновский) поток заявок с интенсивностью λ, t - время обслуживания заявок распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ [2]. Основной характеристикой СМО М/М/1 является коэффициент загрузки $\rho = t \cdot \lambda$. Для исходной структуры СеМО необходимо определить качественные характеристики функционирования СМО.

Для рассматриваемой математической модели СеМО, состоящей из *n* СМО М/М/1, выполним описание в *n*-мерном пространстве, размерность которого равна количеству ветвей в сети. В качестве системы координат положим совокупность независимых замкнутых и разомкнутых путей (контуров и пар узлов), проходящих по ветвям сети. Преобразование структуры сети с сохранением численности ветвей или переход от одной совокупности независимых путей к другой трактуем как преобразование системы координат. Каждый путь ввиду своей независимости определяет в рамках введенного пространства координатную ось, а каждая структура – свою систему координат. Для исходной топологической структуры СеМО, которая состоит из *n* узлов и *m* ветвей будет выполняться равенство [3,4]:

$$n = r + s, \tag{1}$$

где r - это количество независимых контуров, а s - количество независимых узловых пар, определяется выражением $s = m - \alpha$, где α - это количество несвязанных подсетей.

Использование тензорной модели позволяет получить решение поставленной задачи на основе решения ее некоторого «примитивного» аналога, для которого сохраняются структурные и функциональные инварианты. Согласно [3] такая сеть называется примитивной. Обычно, в качестве примитивной выбирается сеть, состоящая из отдельных разомкнутых ветвей [3,4]. Переход от разомкнутой структуры сети к соединенной структуре можно трактовать как переход к новой системе координат, т.е. переход от базиса e_i, $i = \overline{1,n}$ к базису $e_i^{'}$, $i = \overline{1,n}$ в выбранном пространстве-структуре.

Для описания сети в рассматриваемом *n*-мерном пространстве введем в рассмотрение две системы координат: исходную (соединенную) R, которая соответствует структуре моделируемой сети, и примитивную (разомкнутую) R'. При этом в первой системе координат координатными путями являются отдельные ветви сети, а во второй - независимые контуры и узловые пары. Согласно [3] для введенных систем координат существуют правила преобразования из одной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования *S*, которая составляется согласно структурной модели исходной СеМО и заданных направлений. Закон координатного преобразования из одной системы координат R к другой $R^{'}$ имеет вид [3,4]:

$$R = S \cdot R^{'} \tag{2}$$

Поэтому, применив тензорный метод для СеМО и используя понятие исходной и примитивной сети, возможно, получить выражение для определения характеристик исходной СеМО, задавая параметры для примитивной сети – СМО.

Для анализа математической модели СеМО, наряду с рассматриваемой структурой сети рассмотрим характеристики СМО М/М/1 [2]:

– коэффициент загрузки системы $\rho_i, i=\overline{1,n}$ представленный тензором P первой валентности,

– интенсивность поступления заявок $\lambda_i, i=\overline{1,n}$ представленную одновалентным тензором Λ,

– длительность обслуживания $t_j^{\alpha} = \begin{cases} t_j, & \alpha = j \\ 0, & \alpha \neq j \end{cases}$, $\alpha, j = \overline{1,n}$ - двухвалентным тензором T, где

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix},\ T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_n \end{pmatrix}.$$

Функциональные характеристики заданной исходной СМО М/М/1 согласно [2] в n-мерном пространстве выражаются уравнением в матричном виде:

$$\mathrm{P} = T \cdot \Lambda, \tag{3}$$

где P и Λ - матрицы размерности $n \times 1$ коэффициентов загрузки и интенсивности поступления заявок соответственно; T - диагональная матрица размерности $n \times n$, элементами которой являются длительности обслуживания заявок.

Используем в качестве инварианта выражение $\rho = t \cdot \lambda$, для каждого элемента сети в качестве воздействующей величины рассмотрим - интенсивность поступления заявок λ_i, а в качестве величины отклика – коэффициент загрузки ρ_j.

Эти величины для СМО М/М/1 связаны между собой следующим уравнением:

$$\rho_j = t_j^{\alpha} \cdot \lambda_{\alpha},\ \alpha, j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где α - индекс суммирования.

Пусть поступающий поток с одной и той же интенсивностью λ в примитивную одноканальную сеть вызовет при неизменной интенсивности обслуживания такую же загрузку ρ для сети, т.е. величина $\rho\lambda$ инвариантна при переходе от одной системы координат к другой, т.е.:

$$\rho_i \lambda_i = \rho'_i \lambda'_i \ \ i = \overline{1,n} \tag{5}$$

где ρ'_i и λ'_i - коэффициент загрузки и интенсивность поступления заявок для примитивной сети соответственно.

Тогда выражение (5) можно представить в тензорном виде:

$$\rho'_j = t_{\alpha j} \cdot \lambda'_\alpha, \ \alpha, j = \overline{1, n}. \tag{6}$$

где α - индекс суммирования.

Аналогично (3) для системы координат примитивной сети коэффициент загрузки СМО M/M/1 выражается уравнением в матричном виде:

$$\mathrm{P}' = T' \cdot \Lambda', \tag{7}$$

где P' и Λ' соответственно компоненты ковариантных векторов загрузки и интенсивностей сети в примитивной системе координат, T - компоненты тензора второй валентности, который инвариантен относительно изменения системы координат.

Согласно обобщению Крона [3] уравнение, справедливое для всех координатных систем заданной размерности и определяющее правила координатного преобразования от системы координат отдельных ветвей сети к системе координат исходной сети будет инвариантно и имеет вид для вектора коэффициента загрузки P:

$$\mathrm{P} = S^t \cdot \mathrm{P}', \tag{8}$$

где S^t - транспонированная матрица преобразования перехода от примитивной системы координат к исходной, $\mathrm{P}' = \begin{pmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \dots \\ \rho'_n \end{pmatrix}$ - ковариантный вектор загрузки в примитивной системе координат.

Аналогично (8) запишем закон преобразования для вектора интенсивности поступления заявок Λ:

$$\Lambda = S^t \cdot \Lambda', \tag{9}$$

где S^t - транспонированная матрица преобразования перехода от примитивной системы координат к исходной, $\Lambda' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \dots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$ - ковариантный вектор интенсивности поступления заявок в примитивной системе координат.

Для тензора T, проекции которого в каждой системе координат имеют вид матрицы $n \times n$, при изменении координатной системы изменяются как [3,4,7]:

$$T = S^t \cdot T' \cdot S, \tag{10}$$

где S^t - транспонированная матрица преобразования перехода от одной системы координат к другой, T' - матрица длительностей обслуживания в примитивной сети, а S - матрица преобразования перехода от одной системы координат к другой.

Рассмотрим применение изложенной методики для исходной структуры СеМО, которая состоит из n=4 СМО М/М/1 (рис. 1).

Для рассмотрения введем мнимую ветвь для образования замкнутых контуров K_1 и K_2, показанную на рис. 1 штрихпунктирной линией и произвольно зададим направления контурных интенсивностей $\lambda_{\kappa 1}$ и $\lambda_{\kappa 2}$. Размерность пространства-структуры $n = 4$, количество ветвей $m = 5$, а число независимых замкнутых контуров равно K_1 и K_2 с соответствующей интенсивностью $\lambda_{\kappa 1}$ и $\lambda_{\kappa 2}$ равно $r = 2$.

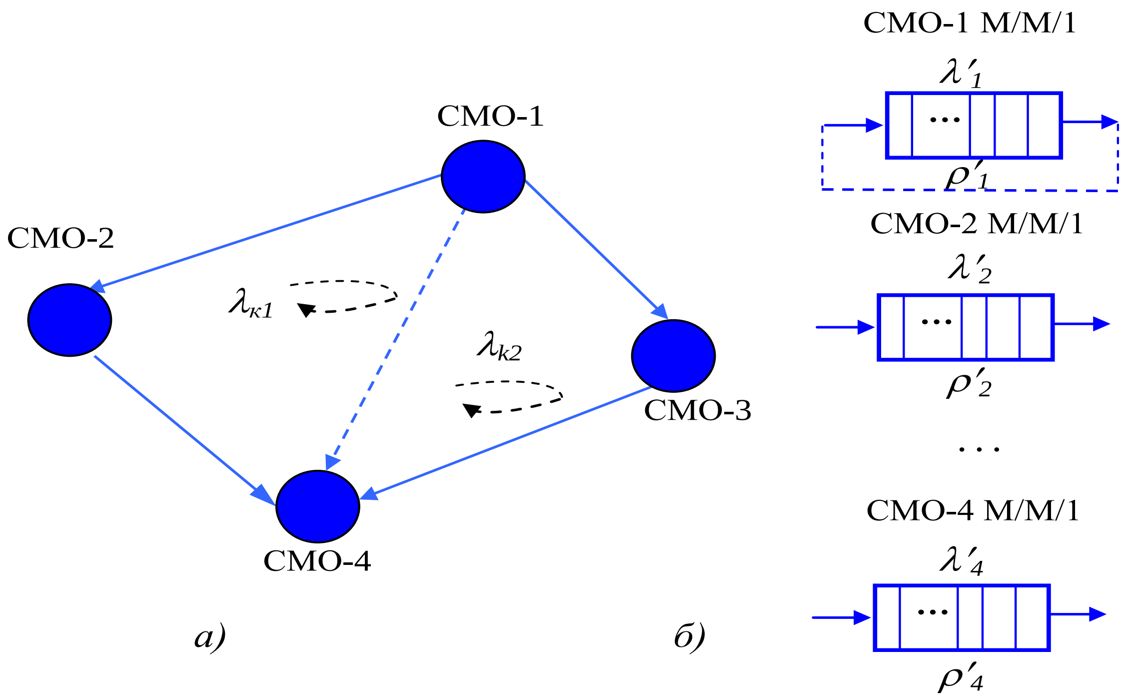

Рисунок 1 - Структурная модель

а) исходной (соединенной) СеМО и б) примитивной (разомкнутой) СМО

Пусть заданы длительности обслуживания примитивной сети с помощью матрицы T', которая представляет собой тензор второй валентности, инвариантный относительно изменения системы координат:

$$T' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

Значения интенсивностей поступления заявок в примитивной сети Λ' задано ковариантным вектором:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \\ \ldots \\ \lambda'_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Для систем координат независимых контуров K_1 и K_2 сети необходимо найти:

– значения коэффициентов загрузки $P_к = \begin{pmatrix} \rho_{к1} \\ \rho_{к2} \end{pmatrix}$, где $\rho_{к1}$ и $\rho_{к2}$ - коэффициенты загрузки контуров K_1 и K_2 соответственно;

– значения длительностей обслуживания $T_к = \begin{pmatrix} t_{к1} & 0 \\ 0 & t_{к2} \end{pmatrix}$, где $t_{к1}$ и $t_{к2}$ - длительности обслуживания в контурах K_1 и K_2 соответственно;

– значения интенсивностей поступления заявок $\Lambda_к = \begin{pmatrix} \lambda_{к1} \\ \lambda_{к2} \end{pmatrix}$, где $\lambda_{к1}$ и $\lambda_{к2}$ - интенсивности поступления заявок в контурах K_1 и K_2 соответственно.

Для систем координат исходной структуры СеМО необходимо найти:

– значения интенсивности поступления заявок заданной сети $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda'_4 \end{pmatrix}$, где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 - интенсивности поступления заявок СМО-1,2,3,4 соответственно;

– значения коэффициентов загрузки заданной исходной структуры сети $P = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix}$, где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 - коэффициенты загрузки СМО-1,2,3,4 соответственно;

Структурная модель рассматриваемой сети массового обслуживания может быть представлена матрицей связности перехода от одной системы координат к другой, которая записывается в виде:

$$\begin{array}{r c} & \begin{matrix} K_1 & K_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{СМО}-1 \\ \text{СМО}-2 \\ \text{СМО}-3 \\ \text{СМО}-4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (13)$$

Тогда базисная матрица перехода от одной системы координат к другой S имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Определим коэффициенты загрузки $\mathrm{P}_к$ контуров K_1 и K_2 согласно формуле (8):

$$\mathrm{P}_к = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1' \\ \rho_2' \\ \rho_3' \\ \rho_4' \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Находим тензор длительностей обслуживания в контурах K_1 и K_2, исходя из формулы (10)

$$T_к = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Найдем интенсивности поступления заявок $\Lambda_к$ контуров K_1 и K_2. Для этого выполним следующие преобразования. Загрузка в контурах K_1 и K_2 выражается формулой:

$$\mathrm{P}_к = T_к \cdot \Lambda_к \qquad (17)$$

Ввиду известных $\mathrm{P}_к$ и $T_к$, определим интенсивности поступления заявок $\Lambda_к$. Для этого умножим обе части равенства на $[T_к]^{-1}$ слева, где $[T_к]^{-1}$ - обратная матрица к матрице $T_к$:

$$[T_к]^{-1}\mathrm{P}_к = [T_к]^{-1} \cdot T_к \cdot \Lambda_к, \text{ т.е.}$$

$$\Lambda_к = [T_к]^{-1}\mathrm{P}_к \qquad (18)$$

Соответственно получив решение (18), возможно определить интенсивности поступления заявок Λ для исходной сети:

$$\Lambda = \Lambda_к{}^t \cdot S^t. \qquad (19)$$

$$\Lambda = (\lambda_{\kappa 1}\ \lambda_{\kappa 2})\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Соответственно находим коэффициенты загрузки P для исходной сети:

$$\mathrm{P} = \Lambda_{\kappa}{}^{t} \cdot S^{t} \cdot T \tag{21}$$

$$\mathrm{P} = (\lambda_{\kappa 1}\ \lambda_{\kappa 2})\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Тогда загрузка исходной сети согласно (5) равна:

$$\rho_{\alpha}\lambda_{\alpha} = \Lambda \cdot \mathrm{P}^{t},\ \ \alpha = \overline{1,4} \tag{23}$$

где α - индекс суммирования.

Полученные результаты дают возможность определять основные вероятностно-временные характеристики, определяющие качество функционирования СеМО: распределение вероятностей состояний каждой СМО, число заявок находящихся в системе, длину очереди заявок в каждой СМО, среднее время задержки и.т.д.

ВЫВОДЫ

1. Применение тензорной методологии для анализа характеристик сети массового обслуживания, представленной СМО М/М/1, позволило одновременно исследовать структурные и функциональные характеристики моделируемых систем и сети.

2. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности использования тензорных методов для анализа различных характеристик СеМО: распределения вероятностей состояний, средней длины очереди, времени задержки, вероятности потерь заявок и определения пропускных способностей СМО.

3. Полученные результаты для СеМО объединяющей простейшие СМО М/М/1 с применением тензорных методов, позволяют моделировать различные модели СМО в зависимости от характеристик поступающего потока заявок, длительности обслуживания, дисциплины обслуживания (с потерями, ожиданием, приоритетами и.т.д.) и различных структур коммутационных полей, что особенно важно при исследовании мультисервисных сетей обслуживающих различные виды трафика.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сети следующего поколения NGN / [А.В. Росляков, С.В. Ваняшин, М.Ю. Самсонов и др.]; под редакцией А.В. Рослякова. – М.: Эко-Трендз, 2008. – 424 с.
Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ./ Пер. И.И. Грушко. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

2. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 542 с.
3. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / [Поповський В.В., Сабурова С.О., Олійник В.Ф. та інш.]; за загальною редакцією В.В. Поповського. – Харків: Тов. «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.
4. Поповский В.В. Методы теории моделей в задачах анализа и синтеза телекоммуникационных сетей / В.В. Поповский, И.В. Стрелковская, Т.И.Григорьева // Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития: сб. научн. трудов 1-го Междунар. форума. – Харьков: АН ПРЭ, ХНУРЭ, 2002. – С. 400-401.
5. Поповский В.В. Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем / В.В.Поповский, А.В. Лемешко // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2002. – Вып. 125. – С. 156-164.
6. Лемешко А. В. Адаптация тензорных решений задачи многопутевой маршрутизации к дейтаграммным сетям / Лемешко А. В., Григорьева Т. И. // Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2003. – № 1. – С. 72-76.
7. Стрелковская И.В. Применение теории моделей и тензорного анализа при моделировании телекоммуникационных систем / И.В. Стрелковская, Т.И. Григорьева // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – 2007. – Вып. 148. – С. 102-106.