

УДК 621.391

**РЕКУРСИВНЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ ДЛЯ
НЕДВОИЧНЫХ СИГНАЛЬНО-КОДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

НЕЗГАЗИНСКАЯ Н.В.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

**RECURSIVE CONVOLUTIONAL CODES
FOR NONBINARY SIGNAL-TO-CODE STRUCTURES**

NEZGAZINSKAJA N.V.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

***Аннотация.** В статье представлены процедура и результаты поиска порождающих многочленов рекурсивных недвоичных сверточных кодов, предназначенных для использования в качестве внешних кодов в сигнально-кодовых конструкциях с внутренними сигналами многопозиционной фазовой модуляции.*

***Abstract.** The letter deals with procedure and search outcomes of generating polynomials of the recursive nonbinary recursive convolutional codes intended for using as external codes in signal-to-code designs with internal multilevel phase modulation signals are presented.*

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих статьях [1, 2] исследованы свойства нового класса сверточных кодов: рекурсивных кодов (РСК). В работе [2] показано, что верхняя граница свободного расстояния недвоичных рекурсивных кодов существенно превышает верхнюю границу для нерекурсивных кодов (НСК), широко используемых в качестве внешних кодов сигнально-кодовых конструкций (СКК) с внутренними многопозиционными ФМ сигналами и обоснована целесообразность поиска новых недвоичных РСК. Данная статья, следуя рекомендациям работы [2], содержит описание процедуры и результаты переборного поиска недвоичных РСК. Для поиска кодов использованы программы, разработанные в среде объектно-ориентированного визуального программирования HPVEE фирмы *Hewlet Packard*.

1. ПЕРЕБОРНЫЙ ПОИСК ПОРОЖДАЮЩИХ МНОГОЧЛЕНОВ РСК

Традиционным и широко используемым методом отыскания порождающих многочленов оптимальных кодов является переборный поиск. Причем, способы организации такого поиска в каждом конкретном случае различны, определяются средой программирования и искусством программиста. В монографии [3] дано описание простого и легко реализуемого метода переборного поиска порождающих многочленов СК, основанного на описанной в статье [1] концепции «тест-пакета». Для переборного поиска многочленов оптимальных РСК с максимальным свободным расстоянием этот метод был доработан. Для организации переборного поиска порождающих многочленов необходимо выполнение ряда условий:

1. Алгоритм перебора должен содержать блок вычисления параметра кода, по которому производится переборный поиск (например, свободное расстояние РСК D_E).

2. Предполагается, что перебор производится вплоть до выполнения условий остановки перебора. Возможно использование следующих критериев остановки:

2.1. *Критерий* ($D_E=L$)–равенство расстояния заданной величине L . Такой критерий остановки поиска применим, когда известно ожидаемое расстояние $D_E=L$, но при этом возможен пропуск «лучшего» кода;

2.2. *Критерий* ($D_E > L$) – превышение расстоянием заданного порога L .

2.3. *Критерий* [$L < D_E < (L + \Delta)$] – нахождение кода с расстоянием, расположенным в некотором интервале шириной Δ ниже заданного порога L . Критерий удобен для поиска кодов с расстоянием, достаточно близким к заранее известной верхней границе расстояния.

3. Должна быть обеспечена полнота перебора с гарантией отсутствия пропусков. Поскольку многие переборные методы требуют определенных затрат времени на производство вычислений, должны быть предприняты меры по сокращению времени вычислений. Наиболее ответственной и трудоемкой в процедурах поиска кодов является реализация п.1 – вычисление свободного расстояния РСК. Здесь использована описанная ранее в статье [1] концепция «тест-пакета», которая базируется на известных положениях теории линейных сверточных кодов:

- дистанционные свойства СК определяются решетчатой диаграммой кода. Набор весов путей на решетке характеризует спектр расстояний кода. Минимальный вес пути из набора путей, ответвляющихся от нулевого состояния и сливающегося далее также с нулевым состоянием, определяет свободное расстояние СК D_E ;

- полное перечисление всех возможных путей на диаграмме состояний возможно при условии действия на входе кодера всех вариантов кодируемой последовательности, полностью заполняющей регистр кодера;

Эти положения определяют структуру т.н. «тест-пакета», используемого для исследований дистанционных свойств СК. Метод «тест-пакета» основан на моделировании выходных последовательностей кодера при воздействии на его входе специальным образом сформированного тест-пакета, который обеспечивает «порождение» кодером всех возможных путей из начального нулевого состояния (000..00) в такое же нулевое состояние. Для гарантии перебора всех возможных путей центральная часть «тест-пакета» (активная часть случайная последовательность СП на интервале T) должна содержать все возможные комбинации входных символов. Для обеспечения полноты вариантов активной части пакета она формируется из потока случайных равновероятных независимых символов. В этом случае имеется гарантия полного перебора ненулевых путей на выходе кодера. В последующем производится анализ путей на выходе кодера с целью оценки распределения весов. Форма «тест-пакета» и временные диаграммы приведены на рис.1. Пакет содержит центральную «активную» часть СП длиной $T = Z2 - Z1$ символов, которая заполнена случайной последовательностью символов и окружена отрезками из нулевых символов. При подаче такого пакета на вход кодера на его выходе формируется последовательность кодовых символов, центральная часть которой содержит символы путей, соединяющих нулевые состояния кодера. Для определения весов анализируемых путей они подаются на накопитель (в виде интегратора со сбросом, реализуемого блоком аккумулятора пакета *HP VEE*). Аккумулятор накапливает значения символов анализируемого пути и сохраняет результат накопления до момента отсчета. Выход аккумулятора подается на блок анализа весов, реализуемого в пакете *HPVEE* на базе объекта *Distribution*. Работа аккумулятора должна быть согласована во времени с прохождением пакета через кодер: сброс производится в момент C , и отсчет веса пути производится в момент S . Отсчитанные значения весов путей подаются на схему анализа, в которой организовано определение минимального веса (в данном случае свободного расстояния). Для корректной работы программы необходимо выполнение следующих условий. Длительность тестовой последовательности T должна быть равна длине регистра кодера K . Моменты начала и окончания пакета определяются так: $Z1 < Z2$. Момент сброса аккумулятора установлен равным $C = 0$. Условие выбора момента отсчета S есть $Z2 < S$.

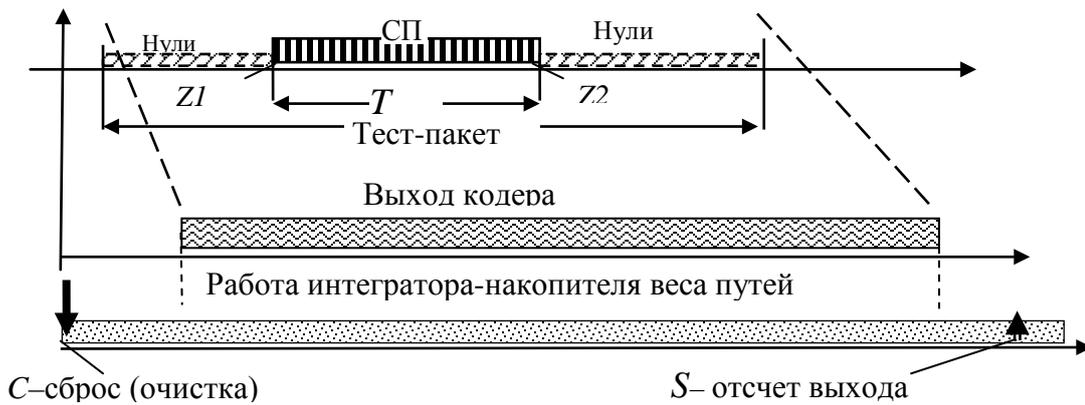


Рисунок 1 – Временные диаграммы работы метода «тест-пакета»

В целом, структура таких измерений, реализованная из блоков (объектов пакета *HP VEE*), показана на рисунке.2. Измерения производятся циклически. Интервал цикла (0,1 с) задается датчиком цикла измерений. При поиске кодов по критериям ($d_E > L$) и ($D_E = L$) для определения величины свободного расстояния d_f используется описанный выше метод тест-пакета. Генераторы многочленов прямой связи G и многочленов обратной связи H вырабатывают в начале каждого «тест-пакета» многочлены, выбираемые случайным образом из полных множеств этих многочленов. После остановки вычислительного процесса по выбранному критерию результаты поиска (G, H, d_f) выводятся на печать.

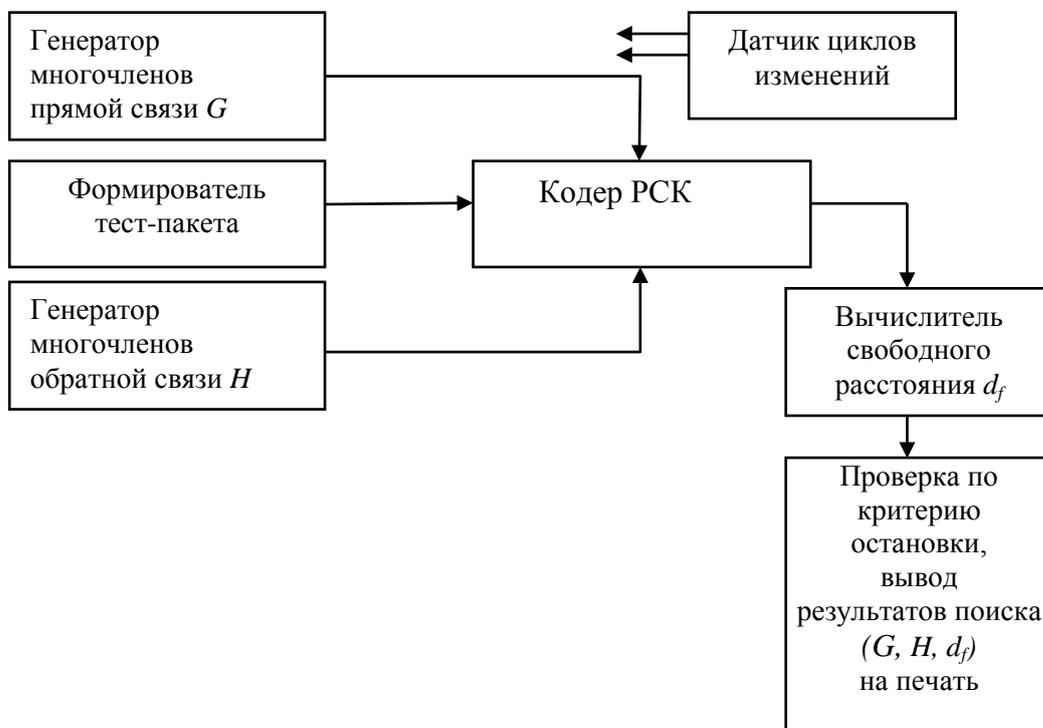


Рисунок 2 – Структура переборного поиска многочленов кода

2. КОДЫ СО СКОРОСТЬЮ $1/2$

По изложенной выше методике произведен переборный поиск порождающих многочленов недвоичных рекурсивных кодов со скоростью $1/2$. Для поиска кодов использован критерий остановки 2.3 (с порогом L , равным верхней границе), что гарантировало отыскание кодов со свободным расстоянием, близким по величине к верхней границе. Результаты приведены в таб. П.1 Приложения. Порождающие многочлены прямой связи $G1=(g^{(1)}_1, g^{(2)}_1, \dots, g^{(j)}_i, \dots, g^{(K)}_1)$, $G2=(g^{(1)}_2, g^{(2)}_2, \dots, g^{(j)}_2, g^{(K)}_2)$, и многочлен обратной связи $H=(h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(j)}, h^{(K)})$, для РСК сведены в единую запись $(G1, G2 // H)$, причем, значения многочленов приведены в арифметике, основание которой равно основанию алфавита кода $q=M$. Приняты такие обозначения индексов коэффициентов многочленов: нижний индекс i – номер выхода кодера ($i=1,2$), верхний индекс $j=(1..K)$ обозначает номер отвода от соответствующего разряда регистра кодера. В записи кодов без обратной связи НСК многочлен обратной связи $H=0$. Приведены также экспериментальные верхние границы для свободного расстояния РСК, определенные по правилам, изложенным в работе [2].

3. КОДЫ СО СКОРОСТЬЮ $2/3$ И $3/4$

Коды со скоростью $1/2$, представленные в предыдущем разделе, характеризуются достаточно высокой степенью избыточности. Применение корректирующих кодов с такой скоростью приводит к существенному снижению пропускной способности телекоммуникационных систем. В связи с этим в реальных системах рекомендуется использование кодов с более высокими скоростями ($2/3$ либо $3/4$). Для повышения скорости СК используем метод «перфорации» (*puncturing*), изложенный в книге [4]. Перфорация состоит в периодическом удалении некоторых символов в кодовых последовательностях на выходе кодера и замене удаленных символов произвольным символом X , который по каналу не передается. Это позволяет повысить скорость кода за счет ухудшения его дистанционных свойств (т. е. произвести обмен повышением скорости на уменьшение свободного расстояния). Процедура перфорации поясняется следующим алгоритмом. Перфорации обычно подвергаются «базовые» коды со скоростью $R=1/2$ (количество входов кодера $k=1$ и число выходов $n=2$). Алгоритм Витерби для декодирования таких кодов достаточно легко реализуется. Декодер Витерби дополняется блоком обнаружения и вставки символа X . Присутствие этого символа в кодовых последовательностях не меняет их взаимные дистанционные свойства, поскольку символ перфорации расположен в сравниваемых кодовых последовательностях в одном и том же месте. В момент поступления на вход кодера «базового» кода каждого информационного символа на выходах кодера формируются кодовые символы $G1$ и $G2$. Перенумеруем информационные символы на входе кодера и определим правила работы перфоратора в виде таб. 1 и таб. 2. Наименование правила перфорации определяется длиной цикла перфорации m . Как видно из таб.1 при $m=2$ (правило $m-2$) последовательность номеров информационных символов разбивается на пары. Причем, информационным символам с нечетными номерами (расположенным в начале каждого цикла) соответствует пара символов $(G1, G2)$ на выходах кодера. Далее, информационные символы с четными номерами порождают пару $(G1, X)$, в которой символ $G2$ заменен символом X . Подобное правило применимо при $m=3$ (правило $m-3$, см. таб.2). Видно, что в каждом из этих примеров m символам на входе кодера соответствует $(2m+1)$ кодовых символов на выходе кодера, что и определяет скорость перфорированного кода

$$R_{\text{перф}}=m/(2m+1). \quad (1)$$

Выбирая длину цикла перфорации, можно получить различные значения скоростей кодов: при $m=2$, $R_{\text{перф}}=2/3$ и т. д. Простой подсчет показывает, что практически важную скорость $R_{\text{перф}}=3/4$ можно получить последовательным применением процедур $m-2$ и $m-3$ ($m-2 \& m-3$).

Таблица 1 – Перфорация по правилу $m-2$

Номер инф. символа	1	2	3	4	5	6	7
Кодовые символы	G1 G2	G1 X	G1 G2	G1 X	G1 G2	G1 X	G1 G2
Циклы перфорации							

Таблица 2 – Перфорация по правилу $m-3$

Номер инф. символа	1	2	3	4	5	6	7
Кодовые символы	G1 G2	G1 G2	G1 X	G1 G2	G1 G2	G1 X	G1 G2
Циклы перфорации							

В табл. П2. Приложения приведены результаты переборного поиска порождающих многочленов перфорированных рекурсивных сверточных кодов (ПРСК). Как и в предыдущем разделе использован критерий останова 2.3.

Приложение

В приводимых ниже таблицах представлены результаты поиска порождающих многочленов РСК с максимальным квадратом свободного расстояния по Евклиду D_E^2 и скоростями $1/2, 2/3, 3/4$. Значения коэффициентов даны в арифметике с основанием, равным основанию кода $q=M$.

Таблица П.1 – Характеристики РСК со скоростью $R=1/2$ в составе СКК с многопозиционными сигналами ФМ- M

ДКР K	Класс кода	Порождающие многочлены [G1,G2//H]	Верхняя граница СР \hat{D}_E^2	СР D_E^2
Объем ансамбля $M = 4$				
3	РСК	2,2,1; 3,3,1//1,3,1	12,16	11,3
4	РСК	3,1,1,0; 1,1,1,1//3,3,0,2	15,3	14,0
5	РСК	2,1,1,2,0; 1,0,2,0,1//1,0,2,1,2	17,23	15,31
6	РСК	3,3,3,2,2,2,2; 1,1,0,3,0//0,3,3,1,3,2	23,16	21,52
Объем ансамбля $M = 8$				
3	РСК	7,7,1; 2,5,0//1,1,2	17,7	16,9
4	РСК	1,1,6,2; 2,7,7,7//1,1,6,5	18,19	17,45
5	РСК	6,6,2,2,2; 0,0,2,1,6//3,1,3,1,3	20,52	19,38
6	РСК	6,6,5,2,2,5; 7,3,4,3,3,2//0,3,0,5,4,1	24,16	22,42
Объем ансамбля $M = 16$				
3	РСК	3,3,14,15,15,5; 2,14,2,8,6,14, //4, 15, 1, 2, 13, 0	18,9	16,9

4	РСК	1,1,14,15,15; 12,10,12 //11, 5, 2, 12, 14	19,83	17,31
5	РСК	1,1,14,4;10,12,11,11,8,4 //2,11,0, 12, 10	21,59	19,17
6	РСК	12, 12, 4,8,8,0; 5,5,5,12,12,11,3 //1,10, 6, 15, 4, 13	26,01	24,11

Таблица П.2 – Характеристики высокоскоростных перфорированных РСК со скоростями $R=2/3$, $3/4$ в составе СКК с многопозиционными сигналами ФМ-8

ДКР <i>K</i>	Класс кода	Порождающие многочлены $G1,G2//H$	Метод перфорации	Свободное расстояние D_E^2
Скорость кода $R = 2 / 3$				
3	ПРСК	1,1,0; 1,1,6//5,6,2	<i>m-2</i>	11,07
4	ПРСК	1,1,1,6; 2,7,2,5//2,1,2,6	<i>m-2</i>	12,93
5	ПРСК	4,4,3,6,6; 6,4,7,3,5//1,4,1,6,1	<i>m-2</i>	14,21
6	ПРСК	6,6,1,7,7,3; 0,6,1,5,3,1 //3,2,2,4,1,4	<i>m-2</i>	18,82
Скорость кода $R = 3 / 4$				
3	ПРСК	5,5,7; 0,2,5 //407	<i>m-2 & m-3</i>	10,8
4	ПРСК	2,2,3,2; 4,5,2,0//7,7,5,5	<i>m-2 & m-3</i>	14,9
5	ПРСК	4,4,7,7,7; 2,0,0,2,7//4,5,4,4,2	<i>m-2 & m-3</i>	14,7
6	ПРСК	0,0,0,7,7,4; 3,3,7,5,6,7 //2,6,2,7,7,5	<i>m-2 & m-3</i>	17,94

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе приведены результаты переборного поиска порождающих многочленов двоичных рекурсивных сверточных кодов, предназначенных для использования в качестве внешних кодов сигнально-кодовых конструкций с внутренними сигналами многопозиционной фазовой модуляции. По величине свободного расстояния найденные коды приближаются к верхним пределам, установленным в работе [2].

2. Сравнение эффективности СКК с внешними рекурсивными и нерекурсивными кодами показывает значительные преимущества конструкций с рекурсивными кодами, которые при равной удельной скорости обеспечивают более высокие значения свободного расстояния (т.е. дополнительный энергетический выигрыш).

3. Найденные рекурсивные коды рекомендуются для использования в составе эффективных СКК перспективных телекоммуникационных систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Банкет В.Л. Метод синтеза рекурсивных сверточных кодов / В.Л. Банкет, Н.В. Незгазинская // Цифрові технології. – 2009. – № 5. – С. 5-17.
- Банкет В.Л. Верхние границы свободного расстояния двоичных кодов в каналах с многопозиционной ФМ / В.Л. Банкет, Н.В. Незгазинская. //Цифрові технології. – 2010. – №X. – С. X-XX.
- Банкет В.Л. Сигнально-кодовые конструкции в телекоммуникационных системах. – О.: Феникс, 2009. – 180 с.
- Кларк Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк., Дж. Кейн / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.