

УДК 631.391

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОСТОЯННЫХ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ  
ВОЛНОВОДЕ ПРИ ЦИФРОВОМ ВЕЩАНИИ**

ИСЛАМОВ ИСЛАМ ДЖАМАЛ оглы

РАСУЛОВ РУСЛАН ДЖАВИТ оглы

Азербайджанский Технический Университет

**DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS PROPAGATION  
CONSTANTS OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A  
CIRCULAR WAVEGUIDE FOR DIGITAL BROADCASTING**

ISLAMOV ISLAM JAMAL oglu

RASULOV RUSLAN JAVIT oglu

Azerbaijan Technical University

***Аннотация.** Разработаны математических моделей постоянных распространения электромагнитных волн в круглом волноводе. Разработаны методы расчета электромагнитного поля в круглом волноводе как с однородным так, и с частичным диэлектрическим заполнением, моделирующем наличие активной среды.*

***Abstract.** The mathematical models for the propagation constants of electromagnetic waves in a circular waveguide. Methods for calculating electromagnetic field in a circular waveguide with a uniform way, and with partial dielectric filling modeling the presence of the active medium.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Изучение физических процессов, протекающих в сверхвысокочастотных устройствах (СВЧ), направленное на создание новых устройств, на увеличение мощности и укорочение длины волны генераторов и усилителей и построение моделей таких устройств в современных условиях является одним из приоритетных направлений развития телекоммуникации.

Одним из важных мест среди всех типов СВЧ устройств занимает сложные волноводы благодаря их высоким техническими и экономическим характеристикам. Это связано с расширением области использования таких устройств в физических исследованиях, с созданием новых типов передающих трактов, радиолокаторов миллиметрового диапазона, позволяющих существенно повысить точность определения координат целей и расширить возможности исследования космического пространства.

В последнее время, в связи с появлением новых областей применения сложных СВЧ устройств возрос интерес к изучению особенностей распространения электромагнитных волн в этих устройствах. В современных сложных СВЧ устройствах структуру электромагнитного поля формируют волноводы, в связи с чем необходимо ее знать и уметь рассчитывать поля в сложных волноводных структурах, поскольку стандартными типами волноводов интерес в промышленности и в науке не ограничивается. В ряде случаев необходимо использование иных видов систем, к которым можно отнести гребневые (Н- и Т-образные) волноводы и волноводы иных форм поперечного сечения.

Сложность геометрии и приближенное решение задачи о собственных числах и собственных функциях таких волноводов делает актуальной задачу электродинамического моделирования в них структур электромагнитных полей

существующих типов волн. Математическое моделирование представляет мощный инструмент анализа распространения волн в волноведущих системах. Такое исследование дает полную и исчерпывающую информацию о параметрах сложной волноводной структуры и характере распространения волн в ней. Одним из представителей таких типов волноводов является круглый волновод, разработка методики расчета параметров которого является задачей настоящей работы. Его применение связано как с возможностями использования таких систем в радиолокации так и для создания других типов устройств для канализации электромагнитной энергии.

Целью работы является разработка методов расчета, создание комплекса программ и анализа на их основе параметров электромагнитного поля в круглом волноводе как с однородным так, и с частичным диэлектрическим заполнением, моделирующем наличие активной среды.

**Разработка математических моделей.** Задачи определения постоянных распространения и построения структуры полей электромагнитных волн в круглом волноводе (рис. 1), сводится к необходимости решения однородного двумерного уравнения Гельмгольца

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + g^2 E_z = 0, \nabla_{\perp}^2 H_z + g^2 H_z = 0, \quad (1)$$

с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} E_z &= 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

заданными на контуре. При этом невозможно подобрать такую ортогональную систему координат и координатных поверхностей которой совпали бы с поверхностью волновода. В этом случае граничное условие будет иметь вид функции двух переменных, что делает невозможным полностью аналитическое решение краевой задачи и приводит к необходимости использования численных методов.

**Решение математических моделей.** Рассмотрим решение краевой задачи (1), (2) с использованием метода коллокации [1,2] и метода конечных разностей. В цилиндрической системе координат уравнения (1) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0, \quad (3a)$$

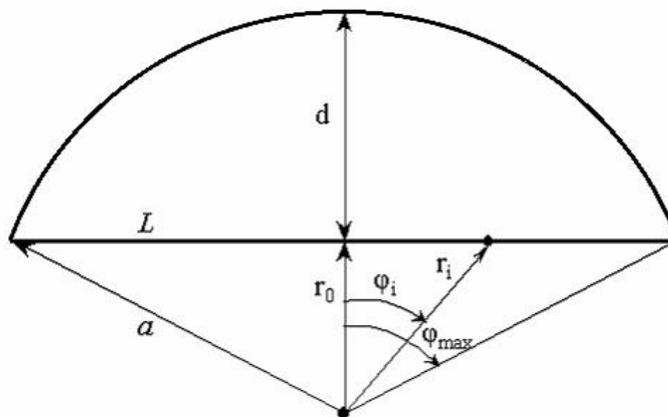


Рисунок 1 - Поперечное сечение круглого волновода

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + g^2 H_z = 0, \quad (3б)$$

где под  $E_z$  и  $H_z$  понимаются  $E_z = E_z(r, \varphi)$  и  $H_z = H_z(r, \varphi)$  соответственно. Решение этих уравнений методом разделения переменных [3,6], приводит к следующим выражениям:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [C_{Em} J_m(gr) + D_{Em} N_m(gr)] [A_{Em} \cos(m\varphi) + B_{Em} \sin(m\varphi)], \quad (4а)$$

$$H_z(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [C_{Em} J_m(gr) + D_{Em} N_m(gr)] [A_{Em} \cos(m\varphi) + B_{Em} \sin(m\varphi)], \quad (4б)$$

где  $J_m(gr)$  – функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода  $m$ -го порядка;  $N_m(gr)$  – функция Неймана или цилиндрическая функция второго рода  $m$ -го порядка;  $g$  – поперечное волновое число.

Из рис.1 видно, что его контур состоит из двух частей: дуги радиуса  $r = a$  и прямой линии  $L$ . Удовлетворяя граничным условиям (2) на границе  $r = a$  и учитывая, что они должны выполняются при любых  $\varphi$ , получим:

$$D_{Em} = -C_{Em} \frac{j_m(ga)}{N_m(ga)}, \quad (5а)$$

$$D_{Em} = -C_{Em} \frac{j'_m(ga)}{N'_m(ga)}, \quad (5б)$$

Тогда, вводя обозначения

$$Z_{Em}(gr) = J_m(gr)N_m(ga) - J_m(ga)N_m(gr), \quad (6а)$$

$$Z_{Hm}(gr) = J_m(gr)N'_m(ga) - J_m(ga)N'_m(gr), \quad (6б)$$

получим:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_{Em}(gr) [A_{Em} \cos(m\varphi) + B_{Em} \sin(m\varphi)], \quad (7а)$$

$$H_z(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_{Hm}(gr) [A_{Hm} \cos(m\varphi) + B_{Hm} \sin(m\varphi)]. \quad (7б)$$

Здесь постоянные  $C_{Em}/N_m(ga)$  и  $C_{Hm}/N'_m(ga)$  внесены в коэффициенты  $A_{Em}$  и  $B_{Em}$ ,  $A_{Hm}$  и  $B_{Hm}$  соответственно. Граничные условия (2) на границе  $L$  не могут быть удовлетворены аналитически. Воспользуемся методом коллокации [1,2], который заключается в следующем: параметры  $A_{Em}$  и  $B_{Em}$  для  $E$  волн или  $A_{Hm}$  и  $B_{Hm}$  для  $H$  волн выбираются так, чтобы функции (7а) и (7б) точно удовлетворяли граничным условиям (2а) и (2б) соответственно в дискретном ряде точек, принадлежащих границе  $L$ . Тем самым, они будут приближенно выполняются на всей границе  $L$ .

Методом коллокации для  $E$ -волн получены дисперсионные уравнения (8) и (9), решая которых можно получить значения поперечного волнового числа и следовательно, критические длины волн:

$$[Z_k(gr_i) \sin k\varphi] = 0, \quad (8)$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$  – индекс по строке;  $i = 1, 2, \dots, n$  – индекс по столбцу;  $n$  – количество точек на половине границы  $L$ ,

$$[Z_k(gr_i) \cos k\varphi_i] = 0, \quad (9)$$

где  $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Для Н-волн дисперсионные соотношения получены в виде

$$\left[ \cos(k+1)\varphi_i \left( gZ'_{Hk}(gr_i) - \frac{k}{r_i} Z_{Hk}(gr_i) \right) + \cos(k-1)\varphi_i \left( gZ'_{Hk}(gr_i) + \frac{k}{r_i} Z_{Hk}(gr_i) \right) \right] = 0, \quad (10)$$

$$\left[ \sin(k+1)\varphi_i \left( gZ'_{Hk}(gr_i) - \frac{k}{r_i} Z_{Hk}(gr_i) \right) + \sin(k-1)\varphi_i \left( gZ'_{Hk}(gr_i) + \frac{k}{r_i} Z_{Hk}(gr_i) \right) \right] = 0, \quad (11)$$

Получив из решения (10) и (11) значения поперечного волнового числа  $g$ , можем найти критические длины волн.

Численный расчет уравнений (8) и (9), а также (10) и (11), показал, что при увеличении числа точек корни, как правило, сходятся к какому-то определенному значению. Отклонение от этой тенденции наблюдается только при малых значениях  $r_0/a$ , что, очевидно, связано с сильным возрастанием, по абсолютной величине, функции Неймана при малых значениях аргументов. На рис. 2 и 3 приведены зависимости корней уравнений (8), (9), (10) и (11) от относительного размера круглого волновода  $r_0/a$ . Экстраполируя графики на область  $r_0/a \rightarrow 0$ , получаем сходимость решений круглого волновода, так как: для  $E$ -волн, корень  $\bar{g}_{c1}$  асимптотически приближается к корню  $E_{11}$  - волны (3,832),  $\bar{g}_{s1}$  - к корню  $E_{21}$  волны (5,52), а  $\bar{g}_{c2}$  - к корню  $E_{31}$  - волны (6,38), а  $\bar{g}_{s2}$  к корню  $E_{41}$  - волны (7,588); для  $H$ -волн, корень  $\bar{g}_{c1}$  асимптотически приближается к корню  $H_{21}$  - волны (3,054),  $\bar{g}_{c2}$  - к корню  $H_{01}$  - волны (3,832),  $\bar{g}_{s1}$  - к корню  $H_{11}$  - волны (1,841),  $\bar{g}_{s2}$  - к корню  $H_{31}$  - волны (4, 201).

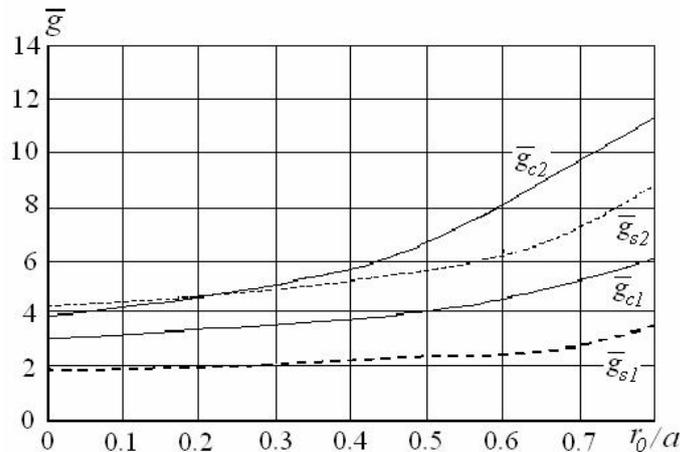


Рисунок 2. График зависимостей корней уравнений (8) и (9) от размера круглого волновода

При увеличении числа узлов в конечно-разностном методе различие корней в сравнении с методом коллокации уменьшатся. В отличие от метода коллокации, оказывающегося сильно неустойчивым при малых аргументов, метод конечных разностей позволяет производить расчет вплоть до  $r_0/a = 0$ . Решение уравнения краевой задачи (1),(2) методом конечных разностей дает сходные результаты. Отличие в прогнозировании сходимости в случае  $E$ -волн обусловлено неизбежными погрешностями экстраполяции.

## ВЫВОДЫ

1. Численные эксперименты показали, что метод конечных разностей более применим для проведения расчетов в случае приближения к полукруглому волноводу и дает хорошие результаты по расчету волновых чисел, однако, не позволяет судить о типах волн с точки зрения симметрии их полей.

2. При решении задачи (1), (2) методом коллокации после численного определения волновых чисел и коэффициентов разложения в ряд, на выходе получается аналитическое выражение, являющееся аппроксимацией истинного решения, что является несомненным достоинством метода.

3. Полученные аналитические формулы более удобны для дальнейших расчетов, поскольку для получения все более детального распределения полей и мощности в волноводе, нет необходимости увеличивать число точек, по которым производится решение краевой задачи.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Е. А. Численные методы . М: Наука. Гл. ред. Физ.-мат.лит., 1987, 248 с.
2. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы/ Пер. с англ. Под. общ. ред. И.Г. Арамановича. М: Наука, 1966,724 с.
3. Тихинов А.Н. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. М: Наука, 1966,724 с.
4. Шеин А. Г. Распространение электромагнитных волн в сегментных волноводах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы.-2001.-Т.4,№2.с.37-41.
5. Заргано Г.Ф., Земляков В.В., Синявский Г.П. Электродинамическое моделирование электромагнитных полей в четырехребневом прямоугольном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы.-2003.-Т.6,№4.-с.19-24.