УДК 621.391

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ФАЗЫ НЕСУЩЕЙ ПРИ ДЕМОДУЛЯЦИИ СИГНАЛОВ ЦИФРОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

ИВАЩЕНКО П.В., ПЕРЕКРЕСТОВ И.С.

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

OPTIMAL ESTIMATES OF PHASE CARRIER DURING DEMODULATION OF DIGITAL MODULATION SIGNALS

IVASCHENKO P.V., PEREKRESTOV I. S.

Odessa national academy of telecommunications n.a. O.S. Popov

***Аннотация**. Произведен сравнительный анализ двух способов синхронизации, обеспечивающих максимально правдоподобную оценку символов в процессе демодуляции: подстройка фазы опорных колебаний и сдвиг по фазе сигнала, который демодулируется.*

***Summary**. A comparative analysis of two methods of synchronization is performed, ensuring the maximum likelihood estimate of symbols in the demodulation process: the phase of reference oscillations is adjusting and the phase of demodulated signal is shifting.*

Производительность современных систем передачи зависит от большого количества различных факторов, среди которых определяющими являются: эффективность кодеров источника и канала, применяемый вид модуляции. В современных цифровых системах передачи, используются эффективные методы модуляции. Проблема детектирования сигналов таких видов модуляции, заключается в обеспечении когерентной демодуляции.

На протяжении многих последних десятилетий задача когерентной демодуляции решалась на основе фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ). Системы, основанные на данном принципе, были детально проанализированы Дж. Дж. Стиффлером [2], В. Линдсейем, Э.Д. Витерби и другими. Однако, в последние годы, с появлением высокопроизводительных сигнальных процессоров, актуальным стал способ обеспечения когерентной демодуляции путем сдвига по фазе демодулируемого сигнала, который легко реализуется при цифровой обработке сигналов в демодуляторе и свободен от некоторых недостатков, свойственных ФАПЧ.

Целью данной работы является сравнение двух принципиально отличных друг от друга способов обеспечения когерентной демодуляции: 1) подстройка фазы опорных колебаний, 2) сдвиг по фазе сигнала, который демодулируется.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К сигналам, обеспечивающим эффективное использование ресурсов системы передачи, относятся, прежде всего, двумерные сигналы ФМ-M ($M \geq 4$), АФМ-M, КАМ-M. Их математическое описание – модулированный сигнал $s(t)$ представляет собой случайную последовательность детерминированных канальных символов, отображающих первичный цифровой сигнал и следующих через тактовый интервал T [1]:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i^{(k)}\left(t - kT\right), \tag{1}$$

где $s_i(t)$, $i = 0, \ldots, M-1$ – канальные символы;

$M = 2^n$ – канальных символов;

n – число бит, передаваемых канальным символом;

T – тактовый интервал – время, через которое передаются канальные символы;

$s_i^{(k)}(t-kT)$ – i-й канальный символ, передаваемый на k-ом тактовом интервале.

В случае двумерных сигналов ФМ-M ($M \geq 4$), АФМ-M, КАМ-M канальные символы описываются, например, при $k = 0$

$$s_i(t) = a_{0i}\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t + a_{1i}\sqrt{2}A(t)\sin 2\pi f_0 t, \quad i = 0,\ 1,\ldots,\ M-1, \tag{2}$$

где a_{0i} и a_{1i} – пара коэффициентов, отображающая $n = \log_2 M$ передаваемых бит в соответствии с модуляционным кодом.

$A(t)$ – функция, определяющая форму радиоимпульсов (канальных символов);

$\sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t$ и $\sqrt{2}A(t)\sin 2\pi f_0 t$ – косинусный и синусный импульсы-переносчики, из которых состоятся канальные символы;

f_0 – частота радиоимпульсов.

Определение канальных символов (2) можно переписать в виде

$$s_i(t) = A_i\sqrt{2}A(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_i\right), \quad i = 0, 1,\ldots, M-1, \tag{3}$$

где

$$A_i = \sqrt{a_{0i}^2 + a_{1i}^2}; \qquad \varphi_i = -\mathrm{arctg}\frac{a_{1i}}{a_{0i}} \tag{4}$$

амплитуда и фаза i-го канального символа.

Косинусный и синусный импульсы являются нормированными и образуют базис двумерного пространства канальных символов:

$$\left.\begin{aligned}\psi_0(t) &= \sqrt{2}A(t)\cos 2\pi f_0 t,\\ \psi_1(t) &= \sqrt{2}A(t)\sin 2\pi f_0 t.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При таком базисе канальные символы представляются

$$s_i(t) = \sum_{k=0}^{1} a_{ki}\psi_k(t), \ i = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{6}$$

где a_{0i} и a_{1i} – координаты i-го канального символа в пространстве канальных символов.

Будем считать, что в системе передачи используется канал связи с постоянными параметрами, в котором сигнал претерпевает случайный сдвиг по фазе $\varphi_{\text{нес}}$. В канале связи действует АБГШ $n(t)$ со спектральной плотностью мощности N_0. В таком случае сигнал на выходе канала связи записывается

$$z(t) = s(t)\cos\varphi_{\text{нес}} - \tilde{s}(t)\sin\varphi_{\text{нес}} + n(t), \tag{7}$$

где $\tilde{s}(t)$ – преобразованный по Гильберту сигнал $s(t)$.

Обработка сигналов ФМ-M ($M \geq 4$), АФМ-M, КАМ-M в демодуляторе заключается в синхронном детектировании и согласованной фильтрации [1]. В результате обработки на каждом тактовом интервале необходимо получить оценки коэффициентов $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$, на основе которых выносится решение о номере канального символа либо эти оценки используются для декодирования по максимуму правдоподобия последовательности. Проблема состоит в том, что опорные колебания в синхронных детекторах демодулятора имеют начальные фазы $\varphi_{\text{оп}}$, отличающиеся от начальной фазы несущей, которая на входе демодулятора равна $\varphi_{\text{нес}}$.

В работе обсуждаются два альтернативных пути, обеспечивающих получение максимально правдоподобных оценок коэффициентов $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$.

АНАЛИЗ ОБРАБОТКИ СИГНАЛА В ДЕМОДУЛЯТОРЕ

Демодулятор двумерных сигналов обеспечивает «поэлементный прием», при котором последовательно обрабатываются отдельные канальные символы, с вынесением решений по каждому из них независимо от других символов. Рассмотрим обработку канального символа, передаваемого на произвольном тактовом интервале, например, на интервале с номером $k = 0$:

$$z(t) = a_{0i}\sqrt{2}A(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}}) + a_{1i}\sqrt{2}A(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}}) + n(t). \qquad (8)$$

Оптимальная обработка сигнала (8), соответствующая критерию максимума правдоподобия, заключается в вычислении скалярного произведения сигнала (8) и базисных функций

$$\left.\begin{aligned} \psi_0^{\text{нес}}(t) &= \sqrt{2}A(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}}), \\ \psi_0^{\text{нес}}(t) &= \sqrt{2}A(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}}). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Реализуется эта обработка с использованием трех операций: синхронного детектирования с опорными колебаниями $\cos(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}})$ и $\sin(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{нес}})$, согласованной фильтрации импульсов $A(t)$ и взятия отсчетов фильтрованных импульсов.

Значение фазы $\varphi_{\text{нес}}$ в демодуляторе не известно, и используются базисные функции

$$\left.\begin{aligned} \psi_0^{\text{оп}}(t) &= \sqrt{2}A(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{оп}}), \\ \psi_0^{\text{оп}}(t) &= \sqrt{2}A(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{оп}}) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Сигнал (8) представляется коэффициентами z_0 и z_1:

$$z(t) = z_0\psi_0^{\text{оп}}(t) + z_1\psi_1^{\text{оп}}(t), \qquad (11)$$

где

$$z_k = \int_0^{T_s} z(t)\psi_k^{\text{оп}}(t)dt, \quad k = 0, 1; \qquad (12)$$

T_s – длительность базисных функций.

Вычисление коэффициентов z_0 и z_1 производится схемой, приведенной на рис.1. В синхронных детекторах используются опорные колебания

$$u_{\text{оп}\,0}(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{оп}}) \text{ и } u_{\text{оп}\,1}(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t + \varphi_{\text{оп}}). \qquad (13)$$

Полагая, что отклик согласованного фильтра $P(t)$ на импульс $A(t)$ имеет значение $P(0) = 1$, после подстановки (6) и (10) в (9) получим

$$\left.\begin{aligned} z_0(\varphi) &= a_{0i}\cos\varphi - a_{1i}\sin\varphi + \zeta_0, \\ z_1(\varphi) &= a_{0i}\sin\varphi + a_{1i}\cos\varphi + \zeta_1, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где $\varphi = \varphi_{\text{оп}} - \varphi_{\text{нес}}$;

ζ_0 и ζ_1 – гауссовские некоррелированные величины с нулевым средним.

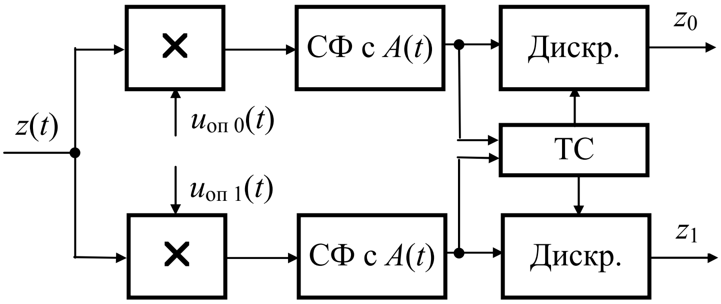

Рисунок 1 – Вычисление коэффициентов z_0 и z_1
(× – перемножитель; СФ с $A(t)$ – фильтр, согласованный с $A(t)$;
Дискр. – дискретизатор; ТС – тактовая синхронизация)

Из выражений (14) следует, что коэффициенты z_0 и z_1 дают максимально правдоподобные оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ при $\varphi = 0$:

$$\hat{a}_0 = a_{0i} + \zeta_0, \qquad \hat{a}_1 = a_{1i} + \zeta_1. \tag{15}$$

Для получения максимально правдоподобных оценок $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$ может быть использован один из двух альтернативных подходов:

1) обеспечение $\varphi_{оп} = \varphi_{нес}$ путем подстройки фазы опорных колебаний [2, 3]; благодаря своей простоте этот подход использовался на протяжении многих последних десятилетий, для чего в состав демодулятора вводилась схема восстановления несущей (ВН), выполненная на основе фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ);

2) сдвиг по фазе демодулируемого сигнал на угол $\varphi_{оп} - \varphi_{нес}$; этот подход является относительно новым, поскольку может быть реализован только при процессорной реализации, так как подход требует вычисления значений тригонометрических функций.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАПЧ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ОПОРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Коэффициенты z_0 и z_1 (14) являются, во-первых, функциями разности фаз φ и, во-вторых, случайными гауссовскими некоррелированными величинами. Условные плотности вероятности $p(z/i,\varphi)$ являются двумерными распределениями, определяемыми произведениями двух одномерных распределений:

$$p(z/i,\varphi) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{1}\left(z_k(\varphi) - a_{ki}\right)^2\right), \quad i = 0, ..., M-1, \tag{16}$$

где σ^2 – дисперсия коэффициентов z_k.

Оценка параметра $\hat{\varphi}$ по критерию максимума правдоподобия заключается в решении уравнения [2]

$$\frac{d}{d\varphi}\ln p(z/\varphi) = 0. \tag{17}$$

До решения уравнения (17) необходимо в (16) исключить параметр i. Полагая, что канальные символы $s_i(t)$ – равновероятные, запишем

$$p(z/\varphi) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{1}\left(z_k(\varphi) - a_{ki}\right)^2\right). \tag{18}$$

Производя несложные преобразования выражения (18) и отбрасывая постоянные множители с учетом того, что при решении уравнения (17) производная плотности вероятности приравнивается нулю, уравнение (18) перепишем в виде

$$\frac{d}{d\varphi}\ln\sum_{i=0}^{M-1}\exp\left[z_0(\varphi)a_{0i}+z_1(\varphi)a_{1i}\right]=0\,. \qquad (19)$$

Ввиду громоздких последующих выкладок, рассмотрим решение задачи для конкретного метода модуляции, а именно, ФМ-4. С учетом сигнального созвездия ФМ-4 (рис. 2) и координат сигнальных точек (табл. 1) уравнение (19) приводится к виду

$$\mathrm{th}\left(z_0(\varphi)a\right)\cdot\frac{dz_0(\varphi)}{d\varphi}+\mathrm{th}\left(z_1(\varphi)a\right)\cdot\frac{dz_1(\varphi)}{d\varphi}=0. \qquad (20)$$

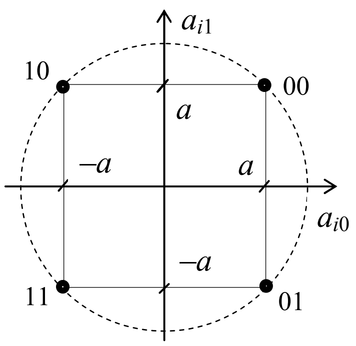

Рисунок 2– Сигнальное созвездие ФМ-4

Таблица 1 – Координаты сигнальных точек

i	a_{i0}	a_{i1}
0	a	a
1	a	$-a$
2	$-a$	a
3	$-a$	$-a$

Из соотношений (14) определим производные коэффициентов разложения z_0 и z_1:

$$\frac{dz_0(\varphi)}{d\varphi}=-z_1(\varphi), \qquad \frac{dz_1(\varphi)}{d\varphi}=z_0(\varphi)\,. \qquad (21)$$

Уравнение (20) приобретает следующий вид

$$\mathrm{th}\left(z_1(\varphi)a\right)z_0(\varphi)-\mathrm{th}\left(z_0(\varphi)a\right)z_1(\varphi)=0\,. \qquad (22)$$

Если в демодуляторе сигнала ФМ-4 разность фаз не равна нулю ($\varphi \neq 0$), то уравнение (22) при подстановке в него φ не выполняется. При этом левая часть дает значение ошибки, которая используется для подстройки фазы подстраиваемого генератора ФАПЧ

$$\varepsilon=\mathrm{th}\left(z_1 a\right)z_0-\mathrm{th}\left(z_0 a\right)z_1\,. \qquad (23)$$

Поскольку алгоритм вычисления ошибки фазы в петле ФАПЧ был предложен в эпоху аналоговой схемотехники [4], то вместо вычисления значений функции th x предложено было использовать аппроксимирующую знаковую функцию

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \qquad (24)$$

При этом соотношение (23) преобразуется к виду

$$\varepsilon = z_0 \cdot \mathrm{sgn}(z_1) - z_1 \cdot \mathrm{sgn}(z_0). \qquad (25)$$

Этот алгоритм вычисления ошибки фазы известен в литературе как алгоритм Костаса [4]. Используя соотношения (11) и табл. 1, можно убедиться, что при любом номере i демодулируемого сигнала оценка ошибки по фазе определяется

$$\varepsilon = 2a \sin\varphi + \xi, \qquad (26)$$

где ξ – гауссовская случайная величина, дисперсия которой в 2 раза больше дисперсий величин ζ_0 и ζ_1.

При работе ФАПЧ $\varphi \to 0$, и при $\varphi = 0$ разность $\varphi_{оп} - \varphi_{нес}$ кратна величине 90° – это явление получило название неопределенность фазы порядка 90°. Как видим, оценка разности фаз $\hat{\varphi}$ в явном виде не вычисляется – условие синхронного детектирования выполняется путем $(\varphi_{оп} - \varphi_{нес}) \to 0$.

На рис. 3 показана система ФАПЧ, обеспечивающая формирование опорных колебаний и использующая детектор ошибки Костаса.

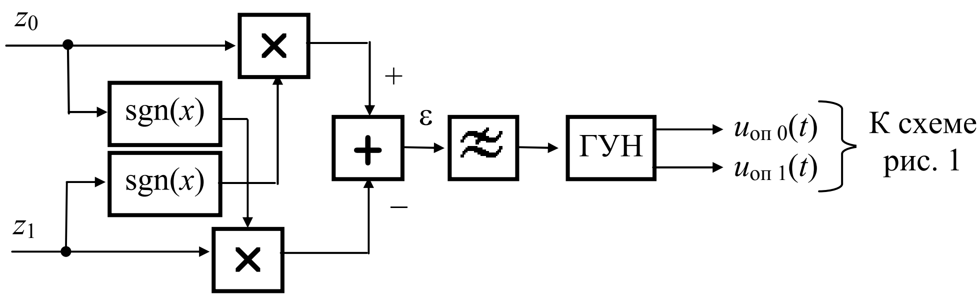

Рисунок 3 – Формирование опорных колебаний системой ФАПЧ
(ГУН – генератор, управляемый напряжением)

Так ка схема ФАПЧ обеспечивает $(\varphi_{оп} - \varphi_{нес}) \to 0$, то коэффициенты z_0 и z_1 дают максимально правдоподобные оценки $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_1$.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОЦЕНКИ РАЗНОСТИ ФАЗ ДЛЯ СДВИГА ПО ФАЗЕ ДЕМОДУЛИРУЕМОГО СИГНАЛА

Оценка фазы демодулируемого сигнала

$$\hat{\varphi}(i) = -\mathrm{arctg}(z_1 / z_0) \qquad (27)$$

является максимально правдоподобной, поскольку полученные коэффициенты z_0 и z_1 с помощью соотношения (12), удовлетворяют критерию максимума правдоподобия. Значение этой оценки зависит от номера передаваемого символа i. Исключить i можно путем снятия модуляции [3] – умножением $\hat{\varphi}(i)$ на 4. Последующим делением на 4 значение оценки приводится к первому квадранту. При $\varphi = \varphi_{оп} - \varphi_{нес} = 0$ оценка $\hat{\varphi}$ должна соответствовать номинальным значениям φ_i на рис. 2 – это $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ и $7\pi/4$. Эти значения после умножения на 4 по модулю 2π дают π. С учетом сказанного приведенное к первому квадранту пространства канальных символов значение оценки фазы

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{4}\mathrm{mod}\left(\frac{4\cdot\hat{\varphi}(i)-\pi}{2\pi}\right). \tag{28}$$

Используем полученное значение оценки для поворота по фазе демодулируемого сигнала

$$(z_0 + jz_1)e^{-j\hat{\varphi}} = (z_0 + jz_1)(\cos\hat{\varphi} - j\sin\hat{\varphi}) = (z_0\cos\hat{\varphi} + z_1\sin\hat{\varphi}) + j(z_1\cos\hat{\varphi} - z_0\sin\hat{\varphi}). \tag{29}$$

Новые координаты сигнала

$$z_0^* = z_0\cos\hat{\varphi} + z_1\sin\hat{\varphi}; \quad z_1^* = z_1\cos\hat{\varphi} - z_0\sin\hat{\varphi}. \tag{30}$$

После подстановки соотношения (14), описывающего демодулируемый сигнал $z_0(\varphi)$, в (30) получим среднее значение

$$\overline{z_0^*} = (a_{0i}\cos\varphi - a_{1i}\sin\varphi)\cos\hat{\varphi} + (a_{0i}\sin\varphi + a_{1i}\cos\varphi)\sin\hat{\varphi}.$$

Легко убедиться, что при $\varphi = \hat{\varphi}$ и отсутствии помех $\overline{z_0^*} = a_0$. Аналогично убеждаемся, что $\overline{z_1^*} = a_1$. Следовательно, оценки коэффициентов определяются $\hat{a}_0 = z_0^*$ и $\hat{a}_1 = z_1^*$.

Схема вычисления оценки разности фаз и сдвига по фазе демодулируемого сигнала приведена на рис. 4.

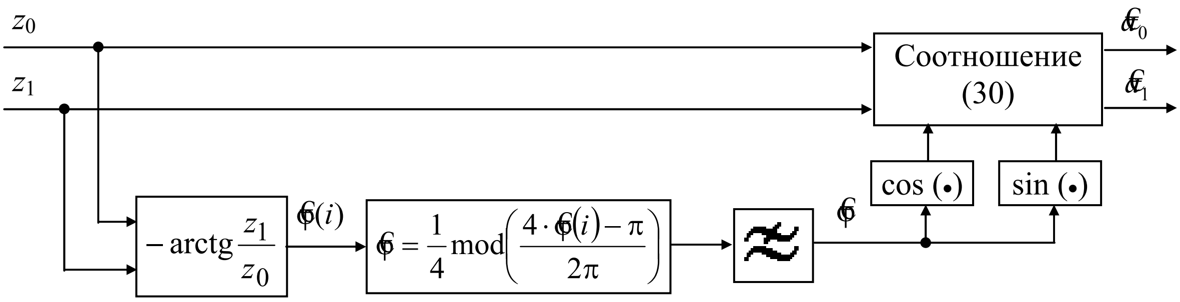

Рисунок 4 – Схема вычисления оценки разности фаз и сдвига по фазе демодулируемого сигнала

ФНЧ в цепи оценки разности фаз, так же как и в схеме ФАПЧ, предназначен для уменьшения дисперсии оценки.

Если разность фаз $\varphi = \varphi_{\text{оп}} - \varphi_{\text{нес}}$ является функцией времени, то можно говорить о разности частот несущей демодулируемого сигнала и опорного колебания. Некоторые алгоритмы обработки сигналов требуют знания оценки этой разности частот. Имея оценку фазы (28), можно оценить разность частот несущей демодулируемого сигнала и опорного колебания

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_{k-1}}{T}, \tag{31}$$

где k – номер тактового интервала;

T – тактовый интервал.

ВЫВОДЫ

1 Имеется два альтернативных способа выполнения когерентного детектирования сигналов цифровой модуляции – на основе ФАПЧ и сдвигом по фазе демодулируемого сигнала.

2 Схема со сдвигом по фазе демодулируемого сигнала свободна от ряда недостатков, свойственных схемам ФАПЧ и заключающихся в следующем:

– *при снятии модуляции демодулируемого сигнала появляются новые шумовые составляющих, увеличивающие дисперсию фазы формируемого колебания [5];*

– *имеет место явление ложных захватов;*

– *ФАПЧ является системой с обратной связью и требует соответствующего обеспечения устойчивости.*

3 В схеме со сдвигом по фазе демодулируемого сигнала можно осуществить оценку сдвига по частоте (31) и использовать ее при демодуляции сигнала.

4 В схеме со сдвигом по фазе демодулируемого сигнала по статистическим характеристикам разности фаз $\varphi = \varphi_{\text{оп}} - \varphi_{\text{нес}}$ *можно синтезировать оптимальный ФНЧ для фильтрации оценки фазы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

2. **Стиффлер Дж. Дж.** Теория синхронной связи. Пер. с англ. Б.С. Цыбакова под ред. Э.М. Габидулина. М., Связь, 1975. – 488 с.

3. **Окунев Ю.Б.** Теория фазоразностной модуляции. – М.: Связь, 1979. – 216 с.

4. **Costas J.P.** Synchronous Communications. // PIRE. – 1956. – № 12, p. 1713 – 1718.

5. **Банкет В.Л.**, Мельник А.М. Системы восстановления несущей при когерентном приеме дискретных сигналов. // Зарубежная радиоэлектроника. – 1983. – № 12, с. 28 – 49.