УДК 621.391

МЕТОД СИНТЕЗА РЕКУРСИВНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

БАНКЕТ В.Л., НЕЗГАЗИНСКАЯ Н.В.

SYNTHESIS METHOD OF RECURSIVE CONVOLUTIONAL CODES

V.L. BANKET, N.V.NEZGAZINSKAJA

Аннотация. *В статье исследован новый класс помехоустойчивых кодов («рекурсивные сверточные коды»), которые имеют по сравнению с нерекурсивными кодами ряд существенных преимуществ, допускают упрощение алгоритма декодирования, обеспечивают повышение помехоустойчивости в каналах с независимыми ошибками. Дано математическое описание рекурсивных кодов. Исследование характеристик выполнено на базе специально разработанных компьютерных программ.*

Abstract. *In the article new class of codes («recursive convolutional codes») is investigated. Such codes have in comparison with nonrecursive codes a number of essential advantages: suppose simplification of decoding algorithm, provide increasing the noiseimmunity in channels with independent errors. The mathematical description of recursive codes is given. Research of characterristics is executed on the basis of specially developed computer programs.*

ВВЕДЕНИЕ

Проблема повышения помехоустойчивости передачи цифровой информации при действии различных помех в современных телекоммуникационных системах обычно решается применением сверточных кодов (СК) [3-7]. Наиболее популярным является сочетание сверточного кодирования с алгоритмом декодирования *А.Витерби* [6,7]. При этом типично использование *нерекурсивных сверточных* кодов (НСК) (генерируемых кодерами без обратной связи). Вместе с тем, в последнее время особое внимание обращено на *рекурсивные сверточные коды* (РСК) ввиду их явного преимущества перед нерекурсивными кодами. Особый интерес к РСК проявляется при реализации турбо-кодов [1,2]. Роль использования обратной связи при формировании турбо-кодов обсуждалась в работе [3]. Анализ показывает, что переход к рекурсивным кодам позволяет существенно *упростить реализацию алгоритма Витерби* вследствие специфических особенностей РСК (в сравнении с нерекурсивными кодами). Вместе с тем, в известной нам литературе теория РСК не разработана. Причем, сведения об РСК ограничены публикацией структурных схем кодеров [1-4]. Даже в популярном детальном руководстве по цифровой связи Б.Скляра свойствам РСК уделено всего две страницы [4, с.510-511], содержащих элементарные сведения об РСК. *Задача настоящей работы* – восполнить этот пробел, представить основы теории двоичных РСК, дать оценку характеристик РСК в сравнении с НСК, разработать методы синтеза РСК на основе результатов переборного поиска рекурсивных порождающих многочленов. Для исследования характеристик РСК использованы программы, разработанные в пакете прикладных программ *HPVEE*.

1.КОДЕР РЕКУРСИВНОГО СВЕРТОЧНОГО КОДА

На рис.1 представлена структурная схема кодера РСК (систематический РСК со скоростью 1/3), используемого в составе аппаратуры перспективной системы мобильной связи *UMTS* [2]. Прямые связи в схеме кодера показаны сплошными линиями, а обратная связь отмечена пунктиром.

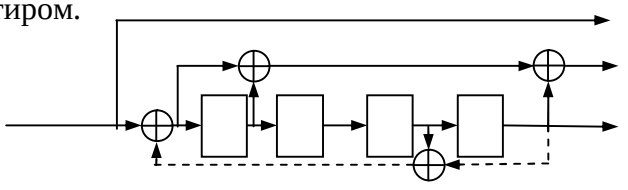

Рисунок 1 – Структура рекурсивного сверточного кодера

Введение обратной связи в структуру нерекурсивного СК существенно изменяет его количественные характеристики, которые рассмотрены в следующем разделе.

2. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ НЕРЕКУРСИВНЫХ СК

Известно[5-7], что кодер нерекурсивного (т.н. «обычного») сверточного кода содержит один либо несколько *регистров* элементов задержки на такт, по которым продвигаются кодируемые информационные символы и *преобразователь* информационных последовательностей в кодовые последовательности. Процесс кодирования производится *непрерывно.*

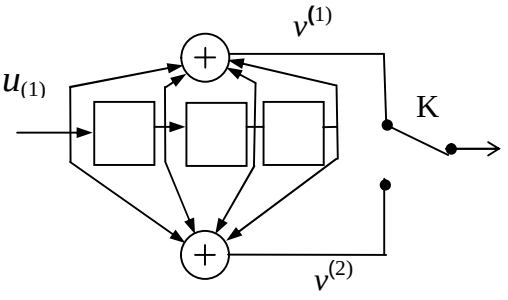

Рисунок 2 – Структура нерекурсивного кодера

Скорость кода равна $R=k/n$, где k – число информационных символов, одновременно поступающих на вход кодера, n – количество соответствующих им кодовых символов на выходах кодера. Структура простейшего нерекурсивного кодера двоичного СК показана на рис.2. Информационные двоичные символы u поступают на вход *регистра* из K элементов задержки. На выходах сумматоров по модулю 2 образуются *кодовые символы* $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$. Входы сумматоров соединены с определенными входами элементов задержки. *Коммутатор* К на выходе кодера устанавливает *очередность посылки* кодовых символов в канал. За время одного информационного символа на выходе такого кодера образуется два кодовых символа. Таким образом, скорость кода в этом примере равна $R=1/2$. Возможно кодирование и с другими скоростями.

Сверточный кодер, как автомат с конечным числом состояний, может быть описан диаграммой состояний. *Диаграмма состояний* представляет собой направленный граф и описывает все возможные переходы кодера из одного состояния в другое, а также содержит символы выходов кодера, которые сопровождают эти переходы.

Состояния кодера – набор символов на входах элементов задержки кодера. Пример диаграммы состояний кодера показан на рис.3. В кружках указаны четыре возможных состояния кодера S_1S_2 = 00, 10, 11 и 01,стрелками – возможные переходы. Символы около стрелок обозначают символы на выходе кодера ($v^{(1)}$,$v^{(2)}$), соответствующие данному переходу. Сплошными линиями отмечены переходы, совершаемые при поступлении на вход кодера информационного символа 0, пунктирными– при поступлении символа 1.

Первоначально кодер находится в состоянии 00, и поступление на его вход информационного символа u=0 переводит его также в состояние 00. При этом на выходе кодера будут символы $v^{(1)}v^{(2)}$=00. На диаграмме этот переход обозначается петлей "00", выходящей из состояния 00 и вновь возвращающейся в это состояние.

Далее, при поступлении символа u=1 кодер переходит в состояние 10, при этом на выходе будут символы($v^{(1)}v^{(2)}$)=11. Этот переход обозначается пунктирной линией из состояния 00 в состояние 10. Затем возможно поступление на вход кодера информационных символов 0 либо 1. При этом кодер переходит в состояние 01 либо 11, а символы на выходе будут 10, либо 01, соответственно. Процесс построения диаграммы заканчивается, когда будут *просмотрены все возможные переходы* из каждого состояния во все остальные.

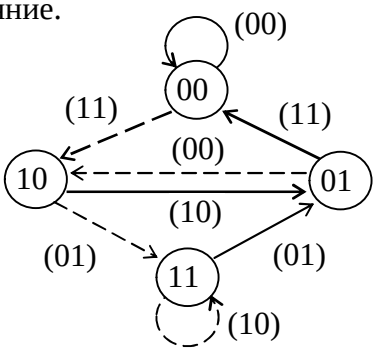

Рисунок 3 – Диаграмма состояний НСК

Решетчатая диаграмма является разверткой диаграммы состояний во времени. На *решетке* состояния показаны узлами, а переходы– соединяющими их линиями. После каждого перехода из одного состояния в другое происходит смещение на один шаг вправо. Пример решетчатой диаграммы показан на рис.4.

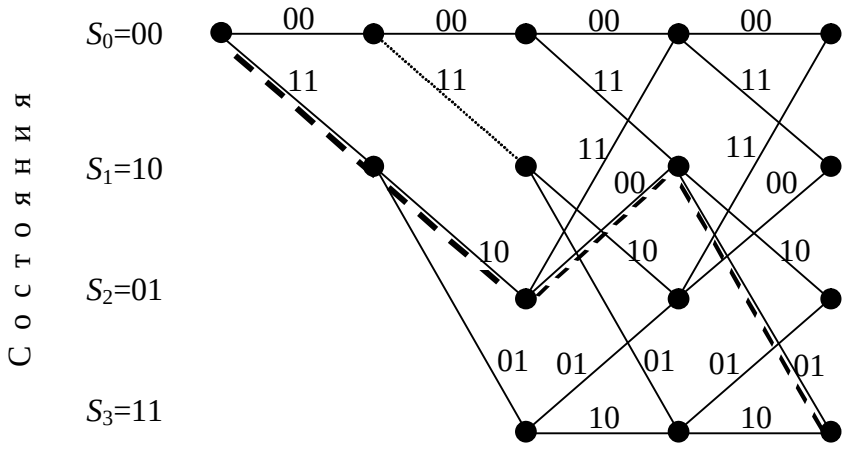

Рисунок 4 – Решетчатая диаграмма СК

Решетчатая диаграмма дает наглядное представление всех *разрешенных путей*, по которым может продвигаться кодер при кодировании. Каждой информационной последовательности на входе кодера соответствует *единственный* путь по решетке. Построение решетчатой диаграммы производят с использованием диаграммы состояний. Исходным является нулевое состояние $S^{(1)}S^{(2)}$=00. Далее, с поступлением очередного информационного символа u=0, либо u=1 возможны переходы в состояние 00, либо 10, обозначаемые ветвями 00 и 11, соответственно. Процесс можно продолжить, причем, через 3 шага очередной фрагмент решетки будет повторяться(см. рис.4). Пунктиром показан *путь по решетке* ...11100001..., соответствующий поступлению на вход кодера информационной последовательности .....1011.... . Для описания работы кодера последовательности символов на входе и выходе представляют с использованием оператора задержки D в виде полубесконечных рядов:

$$u_{(i)}(D) = u_{(i)0}D^0 + u_{(i)0}D^1 + u_{(i)2}D^2 +\ldots,$$
$$v^{(j)}(D) = v_0^{(j)}D^0 + v_1^{(j)}D^1 + v_2^{(j)}D^2 +\ldots. \quad (1)$$

Здесь индексы в скобках обозначают:

i – номер входа кодера, $1 \le i \le k$;

j – номер выхода кодера, $1 \le j \le n$.

Индексы без скобок (0,1,2...) обозначают дискретные моменты времени.

В теории кодирования *длину кода* характеризуют следующими показателями[5]:

–Длина кодирующего регистра (ДКР) K, равная количеству элементов задержки в регистре кодера;

–Длина кодового ограничения v (ДКО), равная числу входных символов (исключая первый символ), которые оказывают влияние на символы на выходе кодера.

Сверточный код будет полностью задан, если известна схема кодера: количество входов кодера k, количество выходов кодера n, длина кодового ограничения v, а также указаны связи сумматоров с ячейками регистров. Для кодов со скоростью $R= 1/n$ связи j-го сумматора ($1 \le j \le n$) с входами элементов задержки описывается путем задания порождающего многочлена

$$G^{(j)}(D)= g_0^{(j)}D + g_1^{(j)}D + g_2^{(j)}D^2 +\ldots+ g_v^{(j)}D^v, \quad (2)$$

причем, для двоичных кодов $g_k^{(j)}$=1, если связь *j*-го сумматора с входом *k*-го элемента задержки существует, и $g_k^{(j)}$=0, если такой связи нет. К примеру, кодер на рис. 2 характеризуется порождающими многочленами $\boldsymbol{G}^{(1)}(D)=1+D+D^2$ и $\boldsymbol{G}^{(2)}(D)=1+D^2$, или, записывая последовательность коэффициентов g_k в виде двоичных комбинаций, получаем $\boldsymbol{G}^{(1)}$=(111) и $\boldsymbol{G}^{(2)}$=(101). Для длинных кодов часто используют восьмеричную форму записи.

В этом случае порождающие многочлены будут представлены так**:** $\boldsymbol{G}^{(1)}$=(7) и $\boldsymbol{G}^{(2)}$=(5), либо сокращенно $\boldsymbol{G}$= (7,5). *Процесс кодирования* может быть представлен как умножение многочлена входной информационной последовательности $u_{(i)}(D)$ на порождающий многочлен $\boldsymbol{G}_{(i)}^{(j)}(D)$, описывающий связи ячеек *(i)*-го регистра кодера с *j*-м выходом:

$$v^{(j)}(D) = u_{(i)}(D)G_{(i)}^{(j)}(D), \quad 1 \le i \le \kappa \; ; \; 1 \le j \le n \; . \quad (3)$$

Величина ДКО определяет также значение старшей степени порождающего многочлена в (2). Значения ДКР и ДКО для кодов с одним входом связаны простым соотношением $v=K-1$.

Помехоустойчивость декодирования зависит от дистанционных свойств кодовых последовательностей на выходе кодера. При этом для двоичных кодов чаще всего расстояние между последовательностями оценивают в *метрике Хэмминга*[7].

Свободное расстояние сверточного кода d_f (*free*) – минимальное расстояние между двумя произвольными полубесконечными последовательностями на выходе кодера, отличающимися в первой ветви. Для коротких кодов свободное расстояние можно определить по диаграмме состояний (либо по решетчатой диаграмме). Если диаграмма состояний задана, то свободное расстояние кода в метрике Хэмминга равно минимальному весу Хэмминга пути по диаграмме из состояния 00 в это же состояние (исключая петлю у этого состояния). На диаграмме на рис.3 такой «короткий» путь(111011) с минимальным весом Хэмминга d_{min}=5 определяет свободное расстояние этого кода $d_f=d_{min}$=5. Аналогичные вычисления свободного расстояния можно произвести по решетке этого кода на рис.5.

Свободное расстояние используется для *оценки помехоустойчивости декодирования* сверточных кодов с применением *алгоритмов максимального правдоподобия* или близких к ним (алгоритм Витерби и др.)[4,6].

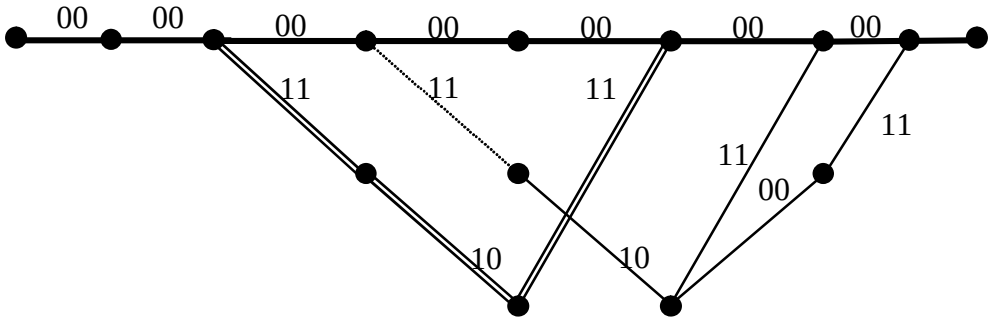

Рисунок 5 – К определению свободного расстояния СК
по решетчатой диаграмме

При известном свободном расстоянии d_f и *декодировании по минимуму расстояния* исправление ошибок происходит по следующим правилам[7]:

1.Если количество ошибок *e* на длине кодового ограничения не превосходит половину свободного расстояния($e<d_f/2$(для четных d_f), или $e<(d_f-1)/2$(для нечетных d_f), то такие *ошибки исправляются*;

2. При невыполнении этих условий *исправление канальных ошибок невозможно*. В этом случае *декодер совершает ошибки* в поцессе декодирования, характер которых зависит от свойств кода. Некоторые СК обладают свойством катастрофичности.

Катастрофическим СК называется такой код, у которого входная информационная последовательность бесконечного веса дает на выходе кодера последовательность конечного веса [8]. При декодировании катастрофического кода конечное число ошибок в канале вызывает бесконечное число ошибок при декодировании. По этой причине использовать на практике катастрофические коды не рекомендуется. Исследование условий «*катастрофического размножения ошибок*» при декодировании, а также признаков катастрофичности кодов опубликовано в пособии [9]. Приведенное выше определение катастрофичности кода может быть переформулировано следующим образом. Пусть для двоичных кодов имеется возможность экспериментально определить вес Хэмминга W_i информационной последовательности определенной длины на входе кодера $u(D)$ и одновременно определить вес Хэмминга W_c соответствующей ей кодовой последовательности $v(D)$ на выходе кодера. Тогда справедливо следующее определение.

Сверточный код обладает *свойством катастрофичности*, если выполняется неравенство

$$K_{cat}= W_i / W_c>1 \qquad (4)$$

Это определение применимо для любых классов сверточных кодов. Коэффициент K_{cat} может быть назван *коэффициентом катастрофичности.* При оценке помехоустойчивости декодирования сверточных кодов решающую роль играют скорость кода R, дистанционные свойства кода (свободное расстояние d_f) и длина кода (длина кодового ограничения v) а также алгоритм декодирования кода. Практически важным результатом применения помехоустойчивого кодирования является величина энергетического выигрыша (ЭВК)[5]

$$\Theta=10\lg Rd_f \text{ (дБ)}, \qquad (5)$$

который равен разности значений отношения сигнал/шум на входе демодулятора $E_б/N_0$, необходимых для обеспечения заданной вероятности ошибки декодирования при отсутствии и при использовании кодирования. Величина ЭВК показывает, насколько можно повысить энергетический потенциал линии связи при использовании кодирования. Видно, что для повышения ЭВК произведение Rd_f следует увеличивать. Это условие определяет правило выбора корректирующего кода для реализации: при фиксированной скорости кода R лучшим следует считать код, обеспечивающий максимум свободного расстояния d_f. Однако повышение свободного расстояния возможно лишь за счет увеличения длины кода, что приводит к росту сложности реализации декодера.

3. СЛОЖНОСТЬ ДЕКОДИРОВАНИЯ СК ПО АЛГОРИТМУ ВИТЕРБИ

Подробное описание алгоритма А.Витерби приведено в пособиях [5-6]. Ниже даны оценки сложности реализации этого алгоритма, пригодные как для НСК так и для РСК. Поскольку алгоритм Витерби состоит в прослеживании «*выживших*» путей по решетчатой диаграмме[5], сложность реализации декодера СК определяется структурной сложностью решетки кода. Можно указать число состояний решетчатой диаграммы

$$S=m^{K-1}, \qquad (6)$$

где: m–основание кода. Т.е. количество состояний кодера равно числу всех возможных вариантов комбинаций символов на входах элементов задержки. Для кода, представленного на рис.2 имеем K=3 (v=2), а число состояний кодовой решетки $S=m^{K-1}=4$, что подтверждается данными рис.4. Реализация алгоритма Витерби состоит в регулярной обработке принимаемой из канала последовательности устройствами ССВ (см.[5, рис.2.4]), которые

реализуют процедуры «Сложения-Сравнения-Выбора» в каждом из узлов решетчатой диаграммы. Это позволяет оценивать сложность декодера по формуле, подобной (6):

$$C=m^{K-1}. \qquad (7)$$

Как известно, величина ЭВК возрастает с увеличением длины кодового ограничения v [6.7]. По этой причине выбор длины кода для реализации основан на *компромиссе* между величиной ЭВК и сложностью C. В ряде специфических случаев (турбо-коды, например) выбирают короткие коды, допускающие простую реализацию.

4. РЕКУРСИВНЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ

В кодерах рекурсивных сверточных кодов используются *рекурсивные порождающие многочлены.* Каноническая структура рекурсивного порождающего многочлена приведена на рис.6. Она получена путем введения *цепи обратной связи* (показана пунктиром) в каноническую структуру нерекурсивного порождающего многочлена (рис.6а).

Здесь:

– $G(D)$– исходный нерекурсивный порождающий многочлен;

– H(D)– многочлен цепи обратной связи рекурсивного порождающего многочлена.

Видно, что символы обратной связи вводятся через сумматор, расположенный на входе первого элемента задержки. Для нерекурсивной структуры на рис.6а порождающий многочлен можно записать как передачу от входа к выходу структуры:

$$G(D)=\frac{V(D)}{U(D)} \quad . \qquad (8)$$

В то же время, для рекурсивной структуры на рис.6б можно записать следующие соотношения:

$$U_0(D)=U(D)+U_H(D), U_H(D)= U_0(D)H(D),\ U_0(D)=U(D)+ U_0(D)H(D),$$
$$U(D)= U_0(D)[1–H(D)], V(D)= U_0(D)G(D).$$

Откуда следует выражение для передачи рекурсивного многочлена через нерекурсивный многочлен и многочлен обратной связи:

$$G_R(D)=\frac{V(D)}{U(D)}=\frac{G(D)}{1-H(D)} \qquad (9)$$

В соответствии с выражением (9) порождающий многочлен РСК задается двумя многочленами($G(D)$ и $H(D)$). Эти многочлены в последующем удобно именовать как:

G(D)–многочлен прямой связи;

H(D)– многочлен обратной связи.

Представим многочлен обратной связи в следующем виде:

$$H(D)=1+\boldsymbol{h}(D), \qquad (10)$$

где: $\boldsymbol{h}(D)= h_{(0)}D^0+...+h_{(r-1)}D^{(r-1)}+ h_{(r)}D^r$ – (11)

ядро многочлена обратной связи, в котором для двоичных кодов коэффициенты h выбираются из алфавита{0,1}.

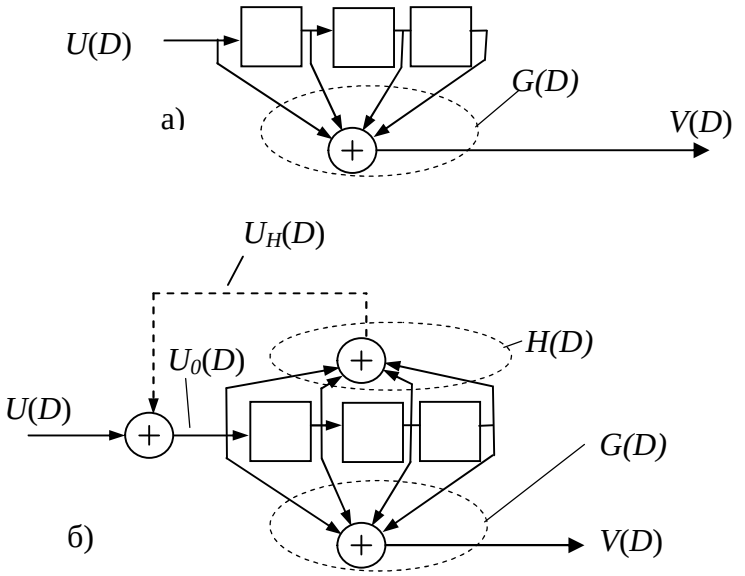

Рисунок 6 – Канонические структуры порождающих многочленов:
а) –нерекурсивного; б) – рекурсивного.

Тогда формула (9) может быть преобразована к виду:

$$G_R(D) = \frac{G(D)}{h(D)} \quad , \qquad (12)$$

поскольку для двоичных кодов справедливо равенство 1–*H(D)*=***h****(D).*

Выражения (9), (12) являются *ключевыми* в теории рекурсивных кодов, поскольку они позволяют решить ряд важных вопросов.

Выясним влияние обратной связи на характеристики рекурсивных СК. Оно сводится к следующему:

1. Введение обратной связи понижает число состояний конечного автомата, описывающего «*поведение*» РСК, т.е. *уменьшает число состояний* диаграммы состояний и решетки. В частности, если старшая степень исходного нерекурсивного порождающего многочлена *G(D*) (многочлена прямой связи) есть *v*, а старшая степень ядра многочлена обратной связи ***h***(D)(форм. (12) есть *r*<*v*, то деление в выражении(12) приводит к понижению старшей степени рекурсивного порождающего многочлена $G_R(D)$ и, соответственно, к снижению длины кодового ограничения рекурсивного кода с таким многочленом. Это обстоятельство открывает *путь с синтезу* рекурсивных кодов с пониженным числом состояний кодовой решетки (и, соответственно, к *упрощению реализации алгоритма декодирования)*. При этом следует отметить н*еобходимость поиска форм многочленов G(D)* и *H(D)* таких «*коротких*» РСК.

2. *Введение обратной связи увеличивает среднее расстояние между кодовыми последовательностям на выходе кодера.* Это подтверждается данными экспериментальных исследований, приведенными в табл. 1.Для сравнения взяты стандартные нерекурсивные СК с различными скоростями *R* и длинами кодирующих регистров. Оценивался средний вес последовательностей на длине кодирующего регистра при действии на входе кодера последовательности случайных равновероятных двоичных символов, одновременно оценивался средний вес при случайном выборе многочленов обратной связи. Видно,что при использовании обратной связи средний вес $d_{\text{ср(РСК)}}$ оказывался выше среднего веса кодов без

обратной связи $d_{ср(НСК)}$. Это означает, что *дистанционные свойства исходных стандартных нерекурсивных СК могут быть улучшены за счет введения обратной связи.*

Таблица 1 – Сравнение среднего расстояния Хэмминга, обеспечиваемого компонентными порождающими многочленами с обратной связью и без нее

Исходные стандартные нерекурсивные СК[5,табл.П.2]: Скорость R=1/3, K=6, порождающие многочлены G=(47,53,75); Скорость R=1/2, K=6, порождающие многочлены G=(53,75).			
Среднее расстояние Хэмминга ,обеспечиваемое компонентными порождающими многочленами с обратной связью и без нее			
G	(47)	(53)	(75)
РСК:$d_{ср(РСК)}$	5,85	5,641	5,872
НСК: $d_{ср(НСК)}$	5,54	5,385	5,795

3. *Кодер РСК* с рекурсивным порождающим многочленом вида(10) содержит цепь обратной связи и *может быть неустойчивым.* Выполнение условий устойчивости кодера РСК зависит от вида многочлена обратной связи $\boldsymbol{h}(D)$.

Необходимым условием устойчивости кодера с рекурсивным порождающим многочленом вида (10) является отсутствие корней многочлена обратной связи $\boldsymbol{h}(D)$.

По теореме Виета любой степенной многочлен $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n$ с коэффициентами $(a_1,a_2,\ldots a_n)$ из некоторого поля F, имеющий корни $(r_1, r_2,\ldots, r_n)$ из этого поля разлагается на линейные множители:

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n=(x-r_1)(x-r_2)\ldots.(x-r_n). \qquad (13)$$

Для завершения доказательства заметим, что наличие многочлена вида $(1-D)$ в составе многочлена обратной связи $\boldsymbol{h}(D)$ в выражении (10) приводит к неустойчивой работе рекурсивного кодера, поскольку результат деления

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D^2 + D^3 + D^4 + \ldots\ldots \qquad (14)$$

представляет собой полубесконечную последовательность периодически повторяющихся единиц. Иными словами, кодер с такой цепью обратной связи переходит в *режим генерации* последовательности (14), которая в процессе кодирования накладывается на последовательность кодовых символов на его выходе, что и является свидетельством неустойчивости РСК. Следовательно, если многочлен обратной связи $\boldsymbol{h}(D)$ не содержит линейных множителей вида(13) (т. е. не имеет корней), РСК будет устойчив,что и доказывает *следующее утверждение*.

Достаточным условием устойчивости РСК с порождающим многочленом вида (10) является принадлежность ядра многочлена обратной связи $\boldsymbol{h}(D)$ к множеству *неприводимых многочленов.*

Доказательство тривиально: любой неприводимый многочлен не может быть представлен в виде произведения линейных множителей вида (13). Выбор многочлена обратной связи из *множества неприводимых многочленов* гарантирует устойчивость РСК.

Теоретическая возможность неустойчивой работы кодера рекурсивного кода, обусловленная некорректным выбором многочлена обратной связи $H(D)$ не должна ограничивать попытки поиска перспективных РСК. В радиотехнике известно множество полезных и поучительных примеров использования обратной связи для улучшения (и даже для изменения) свойств устройств. Например, охват отрицательной обратной связью электронных усилителей улучшает их линейность и частотные свойства. В тоже время,

используя положительную обратную связь, добиваются автогенерации колебаний. Причем, изменение параметров положительной обратной связи позволяет управлять характеристиками таких автогенераторов (частотой, фазой, например). В технике цифровых устройств известны генераторы псевдослучайных последовательностей (ПСП). Генератор ПСП есть регистр сдвигов с специально подобранной обратной связью, которая может быть условно трактована, как «*положительная*» обратная связь. Конструктивная теория работы генераторов ПСП изложена в пособии[9]. В упоминаемых выше радиотехнических устройствах используется, как известно, отрицательная и положительная обратная связь. В случае двоичных кодов с метрикой Хэмминга оба вида связи эквивалентны, поскольку в алгебре двоичных чисел результаты сложения и вычитания совпадают.

5. СИНТЕЗ РЕКУРСИВНОГО КОДЕРА С МНОГОЧЛЕНАМИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНОЙ СВЯЗЕЙ

Нерекурсивные кодеры со скоростью $R=1/n$ содержат один вход, n выходов и n соответствующих им порождающих многочленов прямых связей $G^{(j)}(D)$, $j=1..n$. Особенность рекурсивных кодеров состоит в наличии цепи обратной связи. Общая структура РСК показана на рис.7. Видно, что для совокупности многочленов прямых связей $G^{(j)}(D)$ $j=1..n$ *многочлен обратной связи* $H(D)$ является *общим*, вследствие чего дистанционные свойства каждой пары $\{G^{(j)}(D),H(D)\}$*необходимо рассматривать в отдельности.* В формирователе ветвей образуется вектор ветви $\boldsymbol{V}=(\ v^{(1)},\ v^{(2)},\ v^{(3)},..,\ v^{(n)})$, составленный из символов на выходах каждого из n кодеров. Это и определяет дистанционные свойства кода. Ясно, что для повышения свободного расстояния такого «*составного*» кодера входящие в него «*компонентные*» рекурсивные кодеры должны обеспечивать *наилучшие* дистанционные свойства.

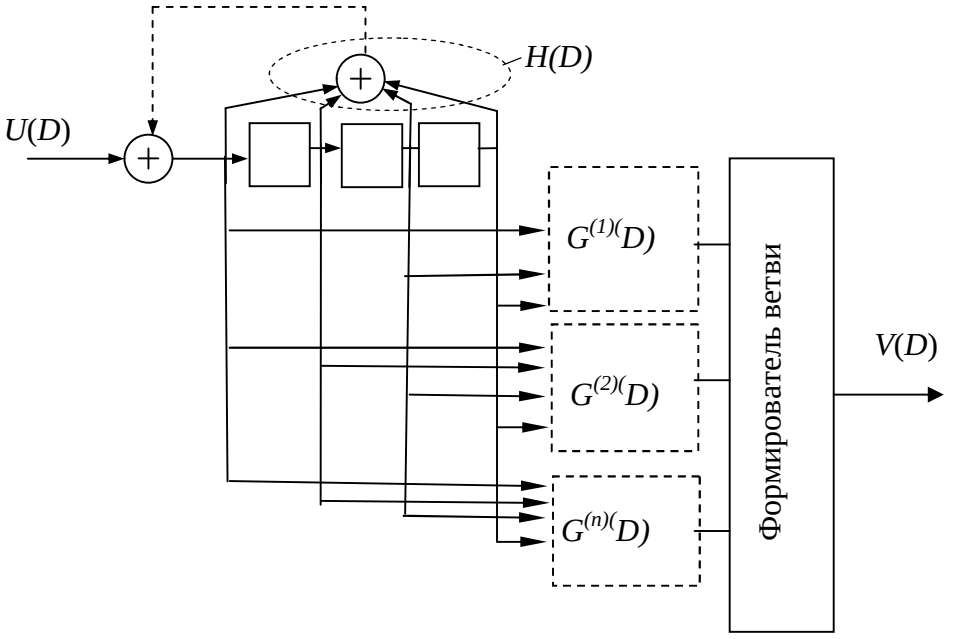

Рисунок 7– Каноническая структура
РСК со скоростью $R=1/n$

Это и определяет *методику оптимизации* рекурсивных кодов:

1. На основе перебора отыскиваются пары многочленов прямой и обратной связи $\{ G^{(j)}(D), H(D)\}$,обеспечивающие максимум свободного расстояния;

2. Для синтеза РСК из них отбираются такие пары, которые содержат *одинаковый многочлен обратной связи H(D).* Далее, набор многочленов(«*компонентных*» кодеров) $G^{(j)}(D)$,j=1..n и отобранных таким образом пар используется для синтеза РСК соответственно со структурой рис.7.

3. Опыт показывает, что практически более удобным оказывается поиск многочленов прямой связи $G^{(j)}(D$, которые совместно с ранее выбранным многочленом обратной связи *H(D)* обеспечивают заданное свободное расстояние.

4. Поиск завершает окончательная *проверка дистанционных свойств* синтезированного РСК, а также *проверка катастрофичности*.

В описанной процедуре поиска важную роль играет вычислительный алгоритм определения дистанционных свойств СК, представленный в следующем разделе.

6. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ СВОЙСТВ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

В теории сверточных кодов отыскание порождающих многочленов по заданному критерию (максимум свободного расстояния, например) производится на основе полного перебора с ограничениями. В соответствии с таким подходом оптимальные рекурсивные сверточные коды следовало бы отыскивать, также используя *переборный поиск.*

Причем, результатом поиска должны быть порождающие многочлены: многочлены прямой связи *G(D)* и многочлен обратной связи *H(D).* Сведения о свободных расстояниях лучших НСК опубликованы в литературе [5,6,7]. Эти сведениях получены различными авторами как результат переборного поиска. Известны несколько методов аналитического расчета минимальных расстояний СК[5]:метод порождающих функций и метод матрицы смежностей. Эти методы достаточно сложны и трудно применимы на практике ввиду их большой трудоемкости даже при использовании современных ЭВМ. Поэтому задачей настоящего раздела является изложение простого и легко реализуемого метода(алгоритма)для численного определения минимального расстояний СК, названный «*методом тест-пакета*». Корректность метода и компьютерной программы проверялись путем сопоставления результатов определения свободного расстояния для НСК с данными, известными из литературы. Выше отмечалось, что свободное расстояние определяется как минимальное расстояние в выбранной метрике между последовательностями на выходе СК, которые начинаются и заканчиваются в определенном состоянии кодера. Удобно в качестве такого определенного состояния выбирать *полностью нулевое состояние* кодера.

К примеру, свободное расстояние кода(7,5), кодер которого представлен на рис.1, можно определить, анализируя е его диаграмму состояний. На диаграмме рис.2 видно, что из нулевого состояния *00* в это же состояние имеется несколько путей с такими весами:

– Путь (11,10,11) с весом Хэмминга d_5=5;
– Путь (11,01,01,11) с весом Хэмминга d_6=6;
– Путь (11,01,10,01,11) с весом Хэмминга d_7=7.

Следовательно, *спектр расстояний* этого кода, записанный в виде последовательности расстояний по мере их возрастания, начиная с наименьшего, будет иметь вид: СР={5,6,7}. Наименьшее из этих расстояний и есть свободное расстояние кода(7,5). Следовательно, свободное расстояние кода (7,5) равно d_f= 5.

Для экспериментального определения дистанционных свойств сверточных кодов (как рекурсивных, так и нерекурсивных кодов) разработан метод, основанный на моделировании выходных последовательностей кодера при воздействии на его входе специальным образом сформированного «*тест-пакета*», который обеспечивает «*порождение*» кодером *всех возможных путей* из начального нулевого состояния «000..00» в такое же нулевое состояние. Для обеспечения возможности перебора *всех возможных путей* центральная часть тест-пакета (*активная часть* на интервале *T)* должна содержать все возможные комбинации входных символов. Для обеспечения полноты вариантов активной

части пакета она формируется из потока случайных равновероятных независимых символов. В этом случае имеется гарантия *полного перебора* ненулевых путей на выходе кодера. В последующем производится *анализ последовательностей на выходе кодера* с целью оценки распределения расстояний. Форма тест-пакета и временные диаграммы приведены на рис.8. Пакет содержит центральную «активную» часть длиной *T=Z2-Z1*символов, которая заполнена случайной последовательностью символов и окружена отрезками из нулевых символов. Длина пакета равна *P*. При подаче пакета на вход кодера на его выходе формируется последовательность кодовых символов, центральная часть которой содержит символы ветви, соединяющей нулевые состояния кодера. Для определения веса анализируемой ветви она подается на накопитель (в виде интегратора со сбросом, реализуемого схемой аккумулятора в составе пакета *HP VEE*). Выход аккумулятора подается ну схему анализа весов. Работа аккумулятора должна быть согласована во времени с прохождением пакета через кодер: *Сброс* производится в момент *C*,и *отсчет веса ветви* производится в момент S. Отсчитанные значения весов ветвей подаются на схему анализа, в которой организован анализ распределения весов. .Для корректной работы программы необходимо выполнение следующих условий: *T=K*(длина кодирующего регистра), *Z1<Z2, Z2<P,C=0, Z2<S<P.*

7. ПОИСК МНОГОЧЛЕНОВ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В соответствии с описанной выше методикой оптимизации произведен переборный поиск многочленов. Результаты поиска в восьмеричной форме записи представлены в таб. 2. При переборе отбрасывались многочлены, совпадающие с точностью до перестановки коэффициентов. Все многочлены обеспечивают условие некатастрофичности (Коэффициент катастрофичности $K_{cat}= W_i / W_c<1$. Порождающие многочлены приведены в восьмеричной форме записи.

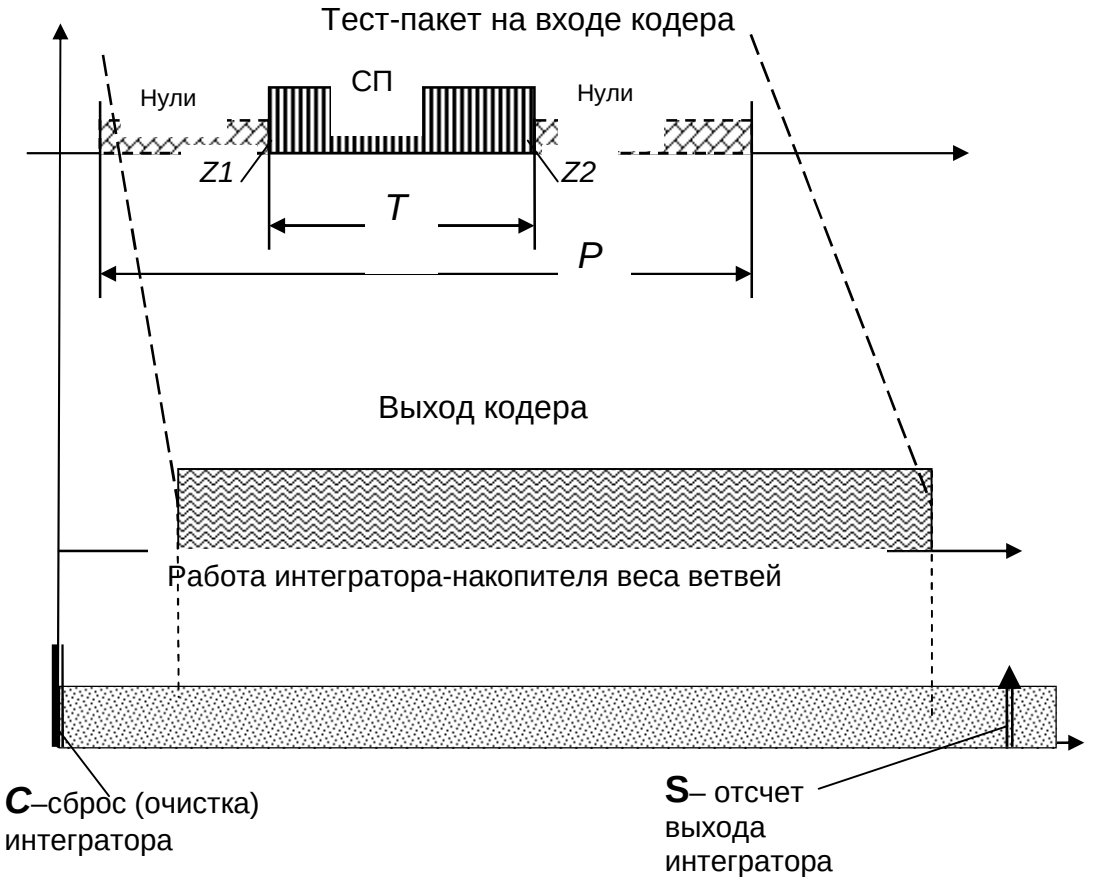

Рисунок 7–Временные диаграммы работы метода с использованием тест-пакета

Таблица 2– Результаты поиска многочленов

Длина кодирующего регистра K=6	
Многочлен обратной связи H	Порождающие многочлены прямой связиG), обеспечивающие минимальное расстояние d_{min}=5
16	04, 10, 16, 20, 25, 26,31, 32,34,45, 51, 64
Длина кодирующего регистра K=6	
Многочлен обратной связи H	Порождающие многочлены G, обеспечивающие минимальное расстояние d_{min}=6
14	03,11,12, 13, 14,15,20, 21, 22, 24, 25, 26, 32, 35,36, 41,44, 46, 54, 55, 60, 61,65

Номер кода №	Длина регистра K	Тип кода	Порожд. многочлены	Свободное расстояние d_{free}	Среднее расстояние $d_{ср}$	Показатель сложности S	ЭВК Θ (дБ)
1	6	РСК	{(16),(20)//16}	10	14,8	64	6,02
2	7	НРСК	(133,171)	10	12,4	128	6,02
3	6	РСК	{(11),(12)//14}	12	15,2	64	7,78

8. НЕРЕКУРСИВНЫЙ И РЕКУРСИВНЫЕ СВЕРТОЧНЫЕ КОДЫ

Таблица 3– Сравнительные характеристики кодов

Данные предыдущего раздела позволяют произвести синтез РСК по изложенной методике и сравнить их с нерекурсивными (*стандартными)* СК, сведения о которых помещены в справочниках [4,5,6]. Наибольший интерес представляет сравнение с нерекурсивным кодом со скоростью R=1/2 и порождающим многочленом(133,171), который был найден Р. Оденвальдером (*R.Odenwalder)* на заре эры активного освоения техники сверточного кодирования. Этот код вошел во многие стандарты спутниковой и космической связи [4,6] и получил статус «*Planetary Standard Code*»(стандартный код для планетных исследований), и в настоящее время широко используется во многих телекоммуникационных системах. Западными компаниями выпускается ИС кодека этого кода. Результаты такого сравнения приведены в таб.3. Принято следующее сокращенное обозначение РСК со скоростью

$R= 1/n:\{(G_1),(G_2),(G_n)//H\}$, в котором многочлены прямых связей $(G_1),(G_2),(G_n)$и многочлен обратной связи H приведены в восьмеричной форме записи. Даны также значения средних расстояний $d_{ср,}$ которые позволяют судить о дистанционных свойствах сравниваемых кодов.

Приведенные данные подтверждают перспективность применения рекурсивных кодов. Найден РСК {(16),(20)//16}(код№1), который обеспечивает величину свободного расстояния d_{free}=10, сопоставимую с расстоянием стандартного НСК(код №2 с показателем сложности S=128), но *при меньшей длине кодирующего регистра* (Показатель сложности

декодирования РСК вдвое меньше (S=64). Более того, удалось отыскать *короткий РСК* с большим свободным расстоянием(код №3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1.Как показывают проведенные исследования, введение обратной связи при сверточном кодировании существенно улучшает дистанционные свойства кодов.

2. В результате переборного поиска найден рекурсивный код, который обеспечивает значительное снижение сложности декодирования, нежели известный нерекурсивный код.

3. Представляет интерес также оценка возможностей применения РСК сравнительно со стандартными *нерекурсивными сверточными* кодами в *следующих каналах:*

– В гауссовских каналах;
– В сигнально-кодовых конструкциях[8,9];
– В каналах с памятью[3];
– В каналах с замираниями и *MIMO* технологиями[11].

Литература

1.Berrou C. The Ten-Year-Old Turbo Codes are Entering into Service// IEEE Communicatios Magazine.Vol.41. No.8.August 2001.pp.110-116.

2.Valenti M. C. and Sun J. The UMTS Turbo Code and Efficient Decoder Implementation Suitable for Software-Defined Radios//International Iournal of Wireless Information Networks.Vol.8,No.4, October 2001. pp.203-215.

3.Скляр Б.Цифровая связь:Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.:Пер. с англ.–М.: Издательский дом «Вильямс»,2003.–1104с.

4.Банкет В.Л. Сверточные коды в системах передачи информации:Учеб. пособие/Одесск.электротехн. ин-т связи им. А. С. Попова. Одесса,1986.–57 с.

5.Банкет В.Л.,Иващенко П. В.,Геер А. Э. Цифровые методы передачи информации в спутниковых системах связи:Учебн. пособ.– Одесса: УГАС,1996.–180 с.

.6.Кларк Дж.мл.,Кейн Дж.Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. –М.:Радио и связь,1987–387 с.

7.Банкет В.Л.Условия катастрофичности сверточных кодов//Праці УНДІРТ.–Одесса:–№1(25).–2001.–19-23.

8.Банкет В.Л.Дискретная математика в задачах цифровой связи: Учеб. пособие. –Одесса: ОНАС,2008. –118 с.

9.Ungerboeck G. Channel Coding with multiltvel/phase signal// IEEE Trans.on Inform.Theory.Vol. IT-28.No.1.1981. pp.55-67.

10.V.Banket, B. Janoudi, N. Michailov, A.Al-Dakdouki.On the Signal-to-Code Condtruction 0f Space-Time Codes.//Proceedings of 6-th International Conference «Modern Telecommunication Problems».Odessa. Vol.1. August 2003. –p.154-158.