УДК 621.391

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФИЛЬТРА БАТТЕРВОРТА ДЛЯ СГЛАЖИВАНИЯ СТУПЕНЧАТЫХ ФУНКЦИЙ В СИНТЕЗАТОРЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

СУКАЧЕВ Э. А., ШКУЛИПА П. А.

BUTTERWORTH FILTER EMPLOYMENT FOR SMOOTHING OF MULTI-STAGE FUNCTIONS IN THE SYNTHESATOR OF TELECOMMUNICATION SIGNALS

SUKACHEV E. A., SHKULIPA P. A.

Аннотация. *Рассмотрены возможности применения ФНЧ типа Баттерворта для сглаживания ступенчатых функций, аппроксимирующих сигналы в системах с коррелятивным кодированием. Исследована зависимость степени сглаживания согласно D-критерию от порядка фильтра и частоты среза.*

Summary. *Possibilities of Butterworth LPF application to the smoothing of multi-stage functions approximating the signals in the correlative encoding systems are considered. The smoothing degree dependence on filter order and cutoff frequency according to D-criterion is analyzed.*

Введение

Поиск сигнальных функций с хорошей частотно-временной локализацией является одной из проблем в теории и практике цифровых систем связи. С практической точки зрения основным этапом этого процесса можно считать синтез сигнальной функции по найденному для неё аналитическому выражению. Установлено [1], что высокой спектральной эффективностью обладают сигналы, которые используются в системах с коррелятивным кодированием [2]. Их также называют сигналами с управляемой межсимвольной интерференцией (МСИ). Аппаратная реализация подобных сигналов осуществятся на основе ортонормированных базисов, в частности вейвлетов Хаара. Синтезированный таким образом сигнал представляет собой ступенчатую функцию с широким спектром, которую необходимо сгладить при помощи ФНЧ. Фильтрация приближает сигнал к своему теоретическому прототипу, при этом возникает дополнительная неуправляемая МСИ, снижающая помехоустойчивость системы передачи. Посредством вариации параметров ФНЧ эту межсимвольную интерференцию можно свести к минимуму. Однако в литературе отсутствуют исследования в направлении оптимизации парметров ФНЧ.

Цель данной работы – исследовать целесообразность использования фильтра Баттерворта для сглаживания ступенчатых функций и разработать рекомендации по оптимальеному выбору его параметров.

Особенности сглаживания ступенчатых функций фильтра Баттерворта

В работах [1,2] решена задача аппроксимации сигналов с управляемой МСИ посредством вейвлетов Хаара.

Известно, что такая аппроксимация позволяет получать ступенчатые функции, представляющие собой частичные суммы равномерно сходящегося ряда [3]. Для получения гладких сигнальных функций с компактным спектром используют сглаживающий ФНЧ.

Рассмотрим процедуру сглаживания ступенчатых функций при помощи фильтра Баттерворта, обладающего достаточно плавными АЧХ и ФЧХ в трех полосах, представляющих традиционный интерес, а именно: в полосе пропускания, переходной и задерживания [4].

Функция передачи ФНЧ описывается выражением

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0}, \qquad (1)$$

где $s = j\omega$, a_i и b_i – постоянные вещественные коэффициенты.

Без ограничения общности рассмотрим аппроксимацию парциального сигнала класса 4, который чаще других находит практическое применение [5]. Аналитическая запись такого сигнала может быть представлена следующим образом

$$g_4(t)=\frac{2U}{\pi}\frac{\sin(\pi t/T)}{(t/T)^2-1}, \quad -\infty < t < \infty, \qquad (2)$$

где T – длительность тактового интервала или символа.

Легко заметить, что сигнальная функция (2) обладает нечетной симметрией относительно начала координат, поэтому ее комплексная спектральная плотность $G_4(j\omega)$ не содержит вещественной части и состоит только из мнимой нечетной функции частоты

$$G_4(j\omega)= j2UT\sin\omega T, \quad |\omega| < \frac{\pi}{T}.$$

Частичная сумма ряда Фурье-Хаара для сигнала $g_4(t)$ на сегменте $[-mT, mT]$ имеет вид

$$g_4^*(x;n)=\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k^*(x), \qquad (3)$$

где

$$c_k = \int_{-m}^{m} g_4(x)\chi_k^*(x)dx, \quad x = t/T,$$

n – число функций $\chi_k^*(x)$, участвующих в аппроксимации;

$\chi_k^*(x)$ – обобщенные функции Хаара [2].

Для получения числовых результатов целесообразно отобразить $g_4^*(x,n)$ в базисе ортогональных *rect*-функций, имеющих, как и вейвлейты Хаара, локальный характер:

$$g_4^*(x;n)=\sum_{k=1}^{n/2} a_{-k}\eta_{-k}(t)+\sum_{k=1}^{n/2} a_k \eta_k(t),$$

где

$$\eta_{-k}(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad -k\xi T \le t \le (1-k)\xi T, \quad \xi = 2m/n, \\ 0 & \text{при} \quad t < -k\xi T \quad \text{и} \quad t > (1-k)\xi T\end{cases}$$

и

$$\eta_k(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad (k-1)\xi T \le t \le k\xi T, \\ 0 & \text{при} \quad t < (k-1)\xi T \quad \text{и} \quad t > k\xi T.\end{cases}$$

Значения a_{-k} и a_k для $m = 4$ и $n = 16$ приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Коэффициенты аппроксимации $g_4(t)$

k	a_{-k}	*k*	a_{-k}	*k*	a_k	*k*	a_k
1	0,4611	5	–0,09344	1	–0,4611	5	0,09344
2	0,9931	6	–0,06544	2	–0,9931	6	0,06544
3	0,7849	7	0,04053	3	–0,7849	7	–0,04053
4	0,2309	8	0,03253	4	–0,2309	8	–0,03253

Проводить исследования, связанные с фильтрацией ступенчатых функций, удобно в вычислительной среде MATLAB, в которой содержится большое число встроенных функций, позволяющих выполнять цифровую обработку сигналов и, в частности, моделировать процессы фильтрации. Среда MATLAB и ее пакеты расширения ориентированы прежде всего на цифровую обработку сигналов, поэтому функции, связанные с расчетом аналоговых цепей, рассматриваются как вспомогательные.

В основном они предназначены для вызова из других функций или процедур, использующих аналоговые прототипы фильтров. Большая часть этих функций относится к пакету Signal Processing [6].

Например, функция

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = butter(5, 0.2);$$

дает представление о характеристиках Баттерворта 5-го порядка с нормированной частотой среза, равной 0,1 частоты дискретизации или 0,2 частоты Найквиста [6, с. 217]. Выходные параметры **b** и **a** – векторы, содержащие коэффициенты полиномов числителя и знаменателя функции передачи (1).

Основная функция, реализующая процедуру фильтрации в MATLAB, носит имя *filter*. В простейшем виде она имеет следующий синтаксис

$$\boldsymbol{y} = filter(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \boldsymbol{x}); \ .$$

Здесь векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – это отсчеты входного и выходного сигналов соответственно.

Для визуализации импульсной реакции фильтра можно воспользоваться встроенной функцией *impz*(**b**,**a**). На рис. 1 в качестве примера показана импульсная реакция ФНЧ типа Баттерворта 5-го порядка.

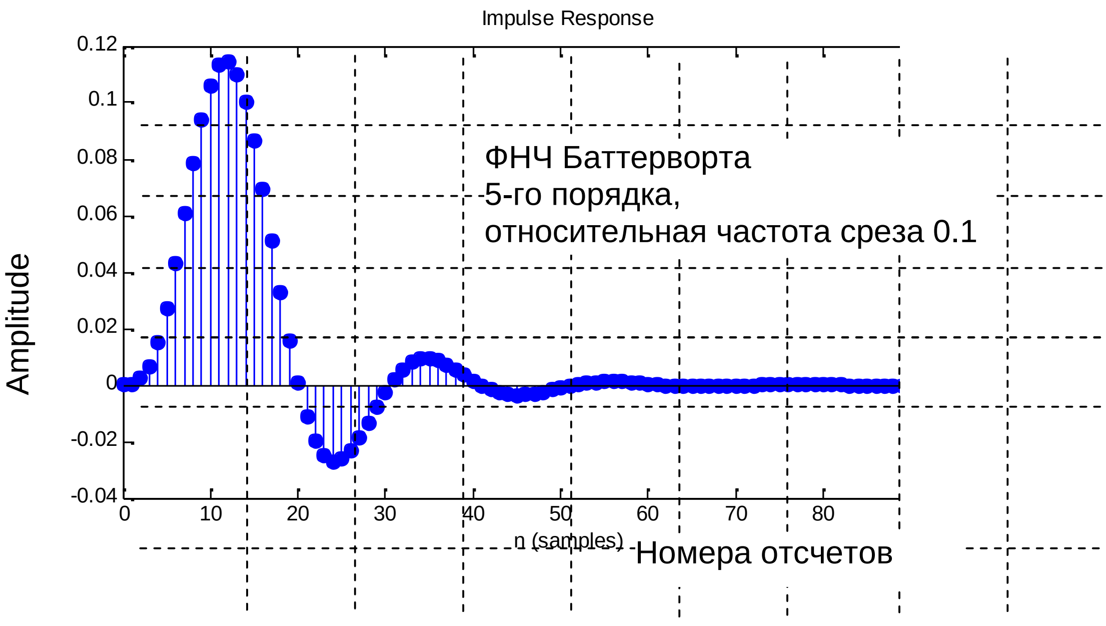

Рис. 1

Если на вход ФНЧ подать ступенчатую функцию (3), то на его выходе будет иметь место гладкая кривая $y(t)$, более или менее точно повторяющая сигнальную функцию класса 4, описываемую выражением (2). Обе функции показаны на рис. 2.

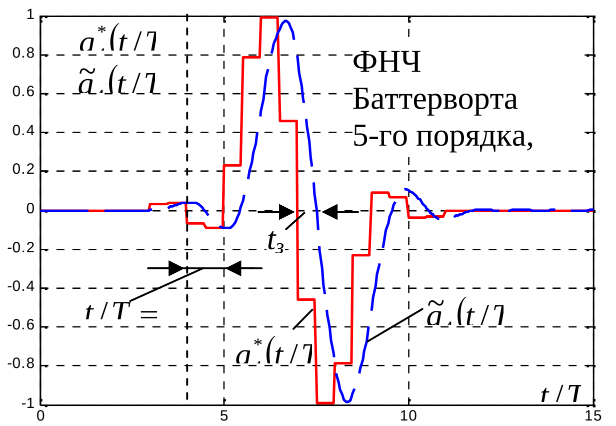

Рис. 2

Для оценки степени близости функций $g_4(t)$ и $\tilde{g}_4(t)$ можно воспользоваться *D*-критерием, имеющим в данном случае следующий вид:

$$D(n_1) = \frac{1}{\tilde{g}_4(t_з - T)} \sum_{\substack{i=-n_1 \\ i\neq -1,\, i\neq 1}}^{n_1} \left|\tilde{g}_4(t_з - iT)\right|, \tag{4}$$

где $\left|\tilde{g}_4(t_з - iT)\right|$ – модуль значения сглаженного сигнала в *i*-й точке; $t_з$ – время задержки сигнала.

Выражение (4) дает фактически оценку остаточной МСИ, которую не удалось устранить фильтрацией. Если в эквидистантных точках отсчеты равны нулю, кроме точек i = –1 и i = 1, т.е. $\tilde{g}_4(t_з - iT) = 0$, то в этом случае МСИ отсутствует и $D(n_1) = 0$.

На рис. 3 представлена зависимость времени задержки сглаженного сигнала от порядка ФНЧ Баттерворта и относительной частоты среза.

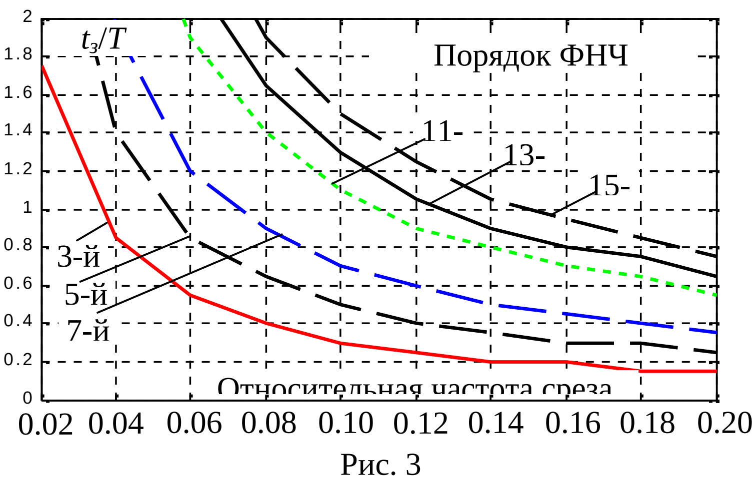

Рис. 3

Завершающим является исследование зависимости величины МСИ согласно *D*-критерию от порядка фильтра и частоты среза.

Результаты моделирования показаны на рис. 4.

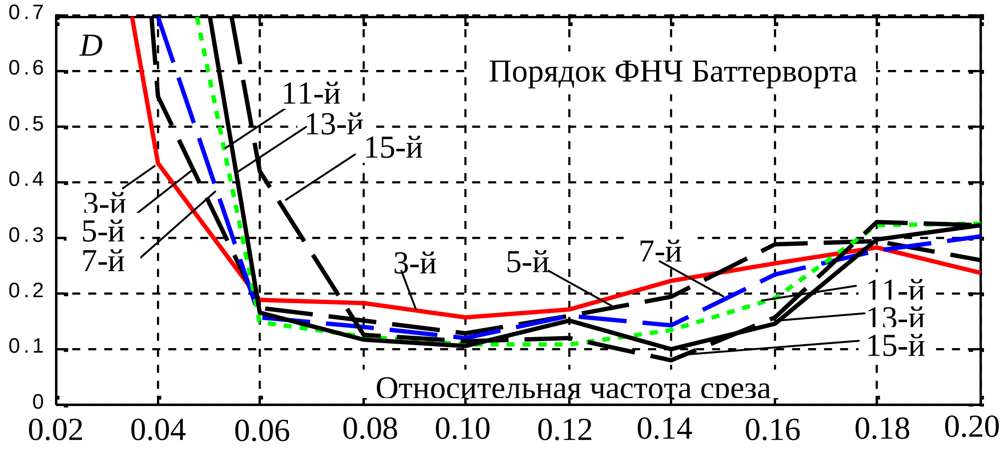

Рис. 4

Наилучшее сглаживание обеспечивает ФНЧ Баттерворта 15-го порядка при частоте среза 0,14, когда минимальное значение МСИ составляет $D_{min} \approx 0{,}07$. Это означает, что глаз-диаграмма по вертикали будет раскрыта на 93%. Дальнейшее снижение МСИ для данного порядка ФНЧ возможно при повышении точности аппроксимации, т.е. при увеличении количества функций Хаара и расширении сегмента $[-mT, mT]$.

ВЫВОДЫ

1. С увеличением порядка фильтра Баттерворта уровень остаточной МСИ выходного сигнала снижается, хотя скорость этого снижения невелика.
2. Уровень МСИ сглаженного сигнала имеет ярко выраженную чувствительность к частоте среза фильтра, достигая минимума приблизительно на участке 0,1 – 0,14 от частоты Найквиста для фильтров всех порядков.
3. Увеличение порядка фильтра более 17-того не приводит к существенному снижению величины D_{min}.
4. При фиксированной частоте среза с повышением порядка фильтра возрастает запаздывание выходного сигнала относительно входного. Например, при частоте среза 0,1 повышение порядка с 3-го по 13-й приводит к изменению задержки на величину, равную длительности одного тактового интервала *T*.
5. При фиксированном порядке фильтра задержка сигнала монотонно уменьшается при увеличении частоты среза. Например, для ФНЧ 11-го порядка задержка изменяется от 1,4 до 0,7 *T* при увеличении частоты среза от 0,08 до 0,16.

Литература

1. Сукачев Э. А., Шкулипа П. А. Методы аппроксимации сигнальных функций с управляемой МСИ // Цифрові технології. – 2007. – №2. – С. 98-99.
2. Сукачев Э. А., Шкулипа П. А. Исследование спектральных характеристик сигналов с управляемой МСИ, представленных вейвлетами Хаара // Матеріали Міжнар. наук.-техн. конф. “Технології цифрового мовлення: стратегія впровадження” (DBT-2008)(26-27 червня 2008 р.). – Одеса, 2008. – С. 340-345.
3. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
4. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 592 с.
5. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь: Пер. с англ. – М.: Связь, 1979. – 592 с.
6. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 608 с.