

**ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
СИГНАЛОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ МСИ,
ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ВЕЙВЛЕТАМИ ХААРА**

СУКАЧЕВ Э. А., ШКУЛИПА П. А.

Одесская национальная академия связи (ОНАС) им. А. С. Попова

**INVESTIGATION OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF
THE SIGNALS WITH CONTROLLED ISI
REPRESENTED WITH HAAR WAVELETS**

SUKACHEV E.A., SHKULIPA P.A.

ONAT named after A. S. Popov

Аннотация. Рассматриваются особенности спектральных характеристик парциальных сигналов, т.е. сигналов с управляемой межсимвольной интерференцией (МСИ). Предложены расчетные соотношения для определения комплексного спектра ступенчатых функций, которые представляют собой аппроксимацию парциальных сигналов вейвлетами Хаара.

Проблема синтеза сигналов с управляемой МСИ, обладающих компактным спектром, по-прежнему остается достаточно актуальной. Известные способы формирования сигналов этого вида строятся, как правило, на методах приближения их с любой степенью точности в некоторой системе базисных функций.

При выборе системы руководствуются двумя противоречивыми требованиями, которые сводятся к высокой точности воспроизведения и простоте аппаратной реализации.

В работах [1, 2] рассмотрены проблемы применения ортогональных вейвлетов Хаара для представления сигналов с управляемой МСИ с компактным спектром. Подобные сигналы называют также сигналами с частичным или парциальным откликом (partial response), а устройства для их формирования и передачи – системами с коррелятивным кодированием (correlative encoding) [3]. От сигналов, удовлетворяющих первому критерию Найквиста, парциальные сигналы отличаются наличием дополнительных отсчетов в тактовых точках, которые принято называть управляемой межсимвольной интерференцией.

Тот факт, что каждый сигнал занимает несколько тактовых интервалов, приводит к частичному взаимному наложению импульсов и, следовательно, к возникновению корреляции между символами, что было отмечено в названии этих систем. От количества и величины дополнительных отсчетов зависит класс парциального сигнала, определяющий характеристики его комплексного спектра [4].

Одним из достоинств парциальных сигналов по сравнению с сигналами Найквиста является возможность придать спектральной плотности необходимую форму, например, определенным образом разместить нули на оси частот, что позволяет достаточно просто решать проблему согласования спектра цифрового потока с частотной характеристикой тракта передачи.

Аналитическая запись парциального сигнала выглядит следующим образом:

$$g \langle T \rangle = \sum_{i=-L_1}^{L_2} a_i f \langle -iT \rangle, \quad g \langle T \rangle = 0, \quad i \notin \{L_1, L_2\}, \quad L_1, L_2 \in N,$$

где $f \langle T \rangle$ – сигнал Найквиста, т.е.:

$$f \langle T \rangle = \begin{cases} U, & i = 0, \\ 0, & i = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad F \langle j\omega \rangle = \begin{cases} UT, & |\omega| < \omega_c, \\ 0 & \text{при прочих } \omega; \end{cases}$$

a_i – отсчеты парциального сигнала в моменты iT , один из которых является информационным, а все остальные создают управляемую МСИ;

$\omega_c = \pi/T$ – граничная частота спектральной плотности сигнала Найквиста f_c и парциального сигнала g ; T – величина тактового интервала или длительность одного символа.

Без ограничения общности рассмотрим аппроксимацию парциального сигнала класса 4, который чаще других находит практическое применение [5]. Аналитическая запись сигнала может быть представлена следующим образом:

$$g_4(t) = \frac{2U \sin(\pi t/T)}{\pi (t/T) - 1}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

Поскольку сигнальная функция (1) обладает нечетной симметрией относительно начала координат, то ее комплексная спектральная плотность $G_4(\omega)$ не содержит вещественной части и состоит только из мнимой нечетной функции частоты [4]:

$$G_4(\omega) = j2UT \sin \omega T, \quad |\omega| < \frac{\pi}{T}. \quad (2)$$

Для аппроксимации функции (1) целесообразно выбрать отрезок с симметричными границами $[-sT, sT]$, $s = 1, 2, 3, \dots$. Далее заметим, что область определения функций Хаара обычно определяется отрезком $[0, 1]$ [6], который не совпадает с выбранным отрезком для аппроксимации. Для устранения этого расхождения в [7] была предложена система обобщенных функций Хаара χ_{mj} , которая пригодна для любого симметричного интервала.

Множество обобщенных функций Хаара удобно представить в виде матрицы размером $N \times N$, которая образуется в результате дискретизации χ_{mj}^* , $x = t/T$, на отрезках постоянства. Первые восемь обобщенных функций Хаара, пригодных для аппроксимации сигнала (1) на отрезке $[-4T, 4T]$, могут быть записаны в виде матрицы $H \in M_8(\mathbb{R})$, которая имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{2\sqrt{2}}{1} & \frac{2\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{4} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{7} & \frac{2\sqrt{2}}{8} \\ \frac{2\sqrt{2}}{1} & \frac{2\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{4} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{7} & -\frac{2\sqrt{2}}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Легко показать, что $\det H = 1$, т.е. матрица H является неособенной и унитарной (изометричной), т.к. соответствующее ей линейное преобразование сохраняет евклидову длину. Столбцы и строки в H образуют ортонормированные множества.

Представим парциальный сигнал $g_4(x)$ на отрезке $[-4T, 4T]$ рядом Фурье-Хаара. При этом частичная сумма равна:

$$g_4^*(x; n) \approx \sum_{k=1}^n c_k \chi_k^*(x) \quad (4)$$

где:

$$c_k = \int_{-4}^4 g_4(x) \chi_k^*(x) dx$$

представляет собой коэффициент Фурье-Хаара функции $g_4(x)$. При этом справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_{-4}^4 g_4(x) dx.$$

Для определения коэффициентов c_k можно использовать записанную в матричной форме систему уравнений:

$$H^T C = G \text{ или } C = (H^T)^{-1} G,$$

где H – квадратная матрица $N \times N$, которая имеет вид (3) для $N = 8$;

C – вектор-столбец коэффициентов ряда Фурье-Хаара; G – вектор-столбец средних значений функции $g_4(x)$ на интервалах постоянства обобщенных вейвлетов Хаара.

На рис. 1 представлены ступенчатые функции $g_4^*(x)$, аппроксимирующие парциальный сигнал (1) при различном числе слагаемых n в частичной сумме (4).

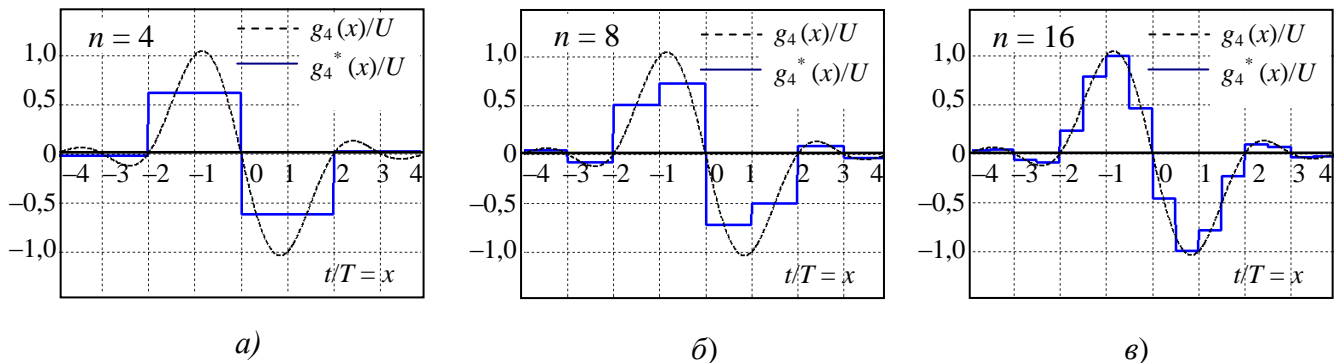


Рисунок 1 – Аппроксимация сигнальной функции вейвлетами Хаара

Для исследования спектральных характеристик ступенчатых функций выведем расчетные формулы. Заметим, что при изменении числа n меняется длительность прямоугольных импульсов, образующих ступеньки, и количество этих ступенек.

Рассмотрим три случая, представленных на рис. 1.

1. При $n = 4$ длительность импульса составляет $\tau_1 = 2T$. Аналитическое выражение для спектральной плотности ступенчатой функции (рис. 1 а) имеет вид:

$$G_4^*(\omega) \approx S_1(\omega) \sum_{k=1}^2 d_{1k} (e^{j\omega \tau_{k-1}} - e^{-j\omega \tau_{k-1}})$$

где $S_1(\omega) = 2UT \frac{\sin \omega T}{\omega T}$ – спектр прямоугольного импульса; d_{1k} – высота k -й ступеньки.

После соответствующих преобразований получаем следующий результат:

$$G_4^*(\omega) = j4UT \frac{\sin \omega T}{\omega T} \left[d_{11} \sin \omega T + d_{12} \sin \omega T \right] \quad (5)$$

2. При $n = 8$ длительность импульсов равна $\tau_2 = T$. Аналитическое выражение для спектральной плотности ступенчатой функции (рис. 1 б) имеет вид:

$$G_4^*(\omega) = S_2(\omega) \sum_{k=1}^4 d_{2k} \left(e^{j\omega(k-1)T/2} - e^{-j\omega(k-1)T/2} \right),$$

где $S_2(\omega) = UT \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}$ – спектр прямоугольного импульса; d_{2k} – высоты k -ой ступеньки.

Окончательно:

$$G_4^*(\omega) = j2UT \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \cdot \left[d_{21} \sin \left(\omega \frac{T}{2} \right) + d_{22} \sin \left(\omega \frac{3T}{2} \right) + d_{23} \sin \left(\omega \frac{5T}{2} \right) + d_{24} \sin \left(\omega \frac{7T}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

3. При $n = 16$ длительность импульса составляет $\tau_3 = T/2$. Спектральная плотность ступенчатой функции (рис. 1 в), аппроксимирующей парциальный сигнал класса 4, можно записать следующим образом:

$$G_4^*(\omega) = S_3(\omega) \sum_{k=1}^8 d_{3k} \left(e^{j\omega(k-1)T/4} - e^{-j\omega(k-1)T/4} \right),$$

где $S_3(\omega) = \frac{UT \sin \omega T/4}{2 \omega T/4}$ – спектр прямоугольного импульса; d_{3k} – высота k -й ступеньки.

Окончательно:

$$G_4^*(\omega) = jUT \frac{\sin \omega T/4}{\omega T/4} \sum_{k=1}^8 d_{3k} \sin \left[\omega \left(k-1 \right) \frac{T}{4} \right]. \quad (7)$$

На рис. 2 представлены модули спектральной плотности ступенчатой функции (4), построенные по формулам (5) – (7) для различных значений n .

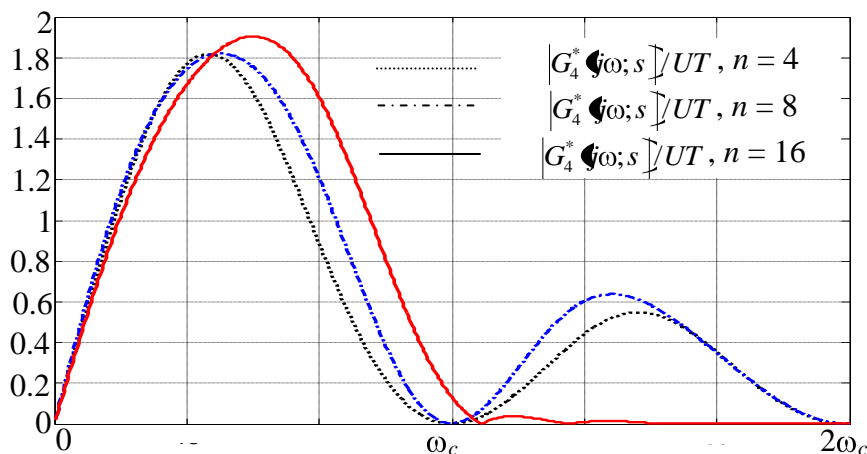


Рисунок 2 – Нормированные спектральные характеристики парциального сигнала класса 4, представленного вейвлетами Хаара

Как видно на рисунке, кривая при $n = 16$ хорошо согласуется со спектральной плотностью парциального сигнала класса 4, описываемой выражением (2).

Аппаратный синтез сигналов с управляемой МСИ в базисе вейвлетов Хаара можно построить согласно схеме, представленной на рис. 3.

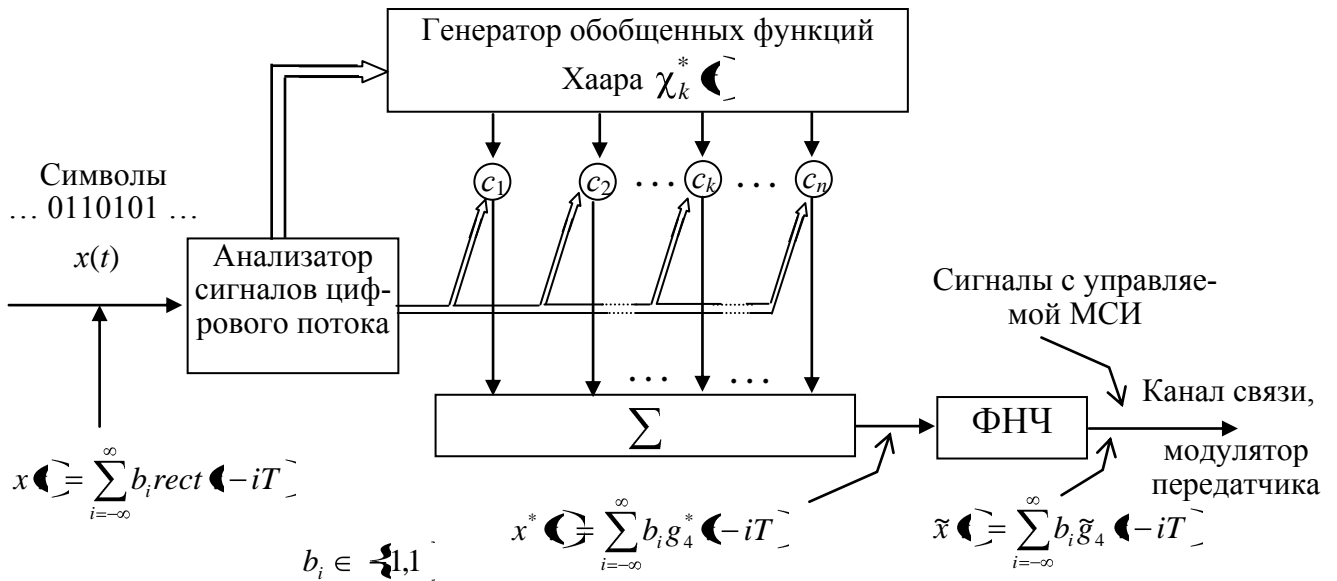


Рисунок 3 – Схема синтезатора сигналов с управляемой МСИ

Сглаживание ступенчатых функций, поступающих с выхода сумматора, производится при помощи аналогового ФНЧ. Минимизация неуправляемой МСИ в эквидистантных точках отсчета, возникающей в процессе фильтрации, достигается оптимальным выбором АЧХ и ФЧХ сглаживающего фильтра.

Литература

1. Сукачев Э. А., Ильин Д. Ю., Шкулипа П. А. Особенности спектральных характеристик сигналов, представленных в базисе Хаара // Праці УНДІРТ. – 2006. – №1 (45)-2(46). – С. 27-28.
2. Сукачев Э. А., Шкулипа П. А. Методы аппроксимации сигнальных функций с управляемой МСИ // Матеріали Міжнар. наук.-техн. конф. «Технології цифрового мовлення: стратегія впровадження» (ДВТ-2007) (3-4 липня 2007 р.). – Одеса, 2007. – С. 225-226.
3. Андреев А. М. и др. Состояние теории и практики использования сигналов с частичным откликом // Зарубежная радиоэлектроника. – 1992. – №9. – С. 57-83.
4. Kabal P., Pasupathy S. Partial-response signaling // IEEE Trans. Commun. – 1975. – Vol. COM-23, №9. – P. 921-934.
5. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь: Пер. с англ.: Под ред. В. В. Маркова. – М.: Связь, 1979. – 592 с.
6. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
7. Сукачев Э. А., Ильин Д. Ю., Шкулипа П. А. Особенности синтеза селективных сигналов для цифровых телекоммуникационных систем // Матеріали Міжнародн. науко-техн. конф. «Технології цифрового мовлення: стратегія впровадження в Україні» (ДВТ-2006, 29-30 червня 2006 г.). – Одеса, 2006. – С. 165-167.