

АНАЛИЗ СВОЙСТВ КАТАСТРОФИЧНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ
СВЕРТОЧНЫХ КОДЕРОВ И МОДУЛЯТОРОВ ЧМ-НФ СИГНАЛОВВ. Л. БАНКЕТ
С. Ю. МАНАКОВ

ОНАС им. А.С. Попова

THE ANALYSIS OF CATASTROPHIC PROPERTIES OF CONVOLUTIONAL CODERS
AND CPFM MODULATORS DISCRETE MODELSS. JU. MANAKOV
V. L. BANKET

Аннотация. В статье выполнен анализ свойств катастрофичности дискретных моделей сверточных кодеров и модуляторов сигналов частотной модуляции с непрерывной фазой.

Annotation. The letter deals with the analysis of catastrophic properties of convolutional coders and continuous phase frequency modulators discrete models. The recursive and nonrecursive models have studied.

ВВЕДЕНИЕ

Сверточные коды (СК) широко используются в современных системах цифровой связи для обнаружения и исправления канальных ошибок. После первого описания в 1955 г. П. Элайесом метода сверточного кодирования интерес к СК возрос в связи с публикацией А. Витерби эффективного алгоритма декодирования СК [1]. Связка «сверточный код-алгоритм декодирования Витерби» оказалась настолько прочной, что упоминание в литературе об СК автоматически подразумевало применение для декодирования алгоритма Витерби и не требовало особых оговорок. Первые СК с хорошими характеристиками помехоустойчивости отыскивались путем полного перебора. При этом было установлено, что среди отобранных кодов «попадаются» экземпляры, декодирование которых сопровождается неким «катастрофическим размножением ошибок»: без видимых причин на выходе декодера появлялись пакеты ошибок, хотя при этом канальные ошибки исправлялись «закономерно», т.е. в соответствии с корректирующими способностями кода. Такие коды были названы «катастрофическими СК» (ниже, в интересах однозначности определений будет дано определение «нерекурсивных катастрофических сверточных кодов» (НР-КСК)). При этом, на основе эвристических соображений были сформулированы «признаки» таких НР-КСК (пример такого признака обсуждается ниже, в разделе 2). Коды, удовлетворяющие этим признакам, было принято отбрасывать из результатов перебора [7]. По умолчанию предполагалось, что таблицы лучших СК, неоднократно публикуемые в руководствах по кодированию такие катастрофические коды не содержат [2...6]. Казалось, что в теории СК вопрос о катастрофичности был закрыт. Но публикация ведущего специалиста по СК Д. Костелло [10] привлекла внимание специалистов к этой проблеме теории. Затем, одному из авторов этой статьи удалось теоретически решить проблемы катастрофичности НР-КСК [11]. Основные методы анализа и результаты из этой работы, необходимые для последующего изложения, приведены ниже в разделе 1 статьи. Новый этап исследований катастрофичности СК наступил вслед за публикациями об использовании специфического класса сверточных кодов с обратными связями (т. н. «рекурсивных» кодов) в проектах турбо-кодов [16,17]. Такие рекурсивные сверточные коды (РСК) использовались в качестве «компонентных» в систематических турбо-конструкциях, которые свойствами катастрофичности нерекурсивных СК по определению не обладали. Вместе с тем, это не уменьшило интерес к РСК, поскольку, как показано ниже в разделе 2, введение обратной связи сулит привлекательные возможности снижения сложности декодирования, но может явиться причиной нового вида катастрофичности СК: способности кодера к неустойчивой работе при неверном выборе вида обратной связи. Ниже,

для однозначности определений, введено понятие «рекурсивных катастрофических сверточных кодов» (Р-КСК).

Теоретические исследования условий устойчивости моделей РСК оказались своевременными для анализа нового класса цифровых сигналов – сигналов частотной модуляции с непрерывной фазой (ЧМ-НФ), предложенных группой Шведских ученых [12,13]. В разделе 3 настоящей статьи показано, что обеспечение непрерывности фазы в процессе модуляции обеспечивается наличием обратной связи в модели модулятора, что может вызывать вопросы относительно устойчивости (и, соответственно, катастрофичности) таких моделей. Итальянский автор Б. Римольди не только посвятил статью исследованиям катастрофичности моделей ЧМ-НФ [15], но и предпринял попытки поиска их «некатастрофических эквивалентов». Следует отметить, что ответы на вопросы об устойчивости и, соответственно, катастрофичности моделей ЧМ-НФ мы не находим не только в основополагающих статьях Шведских авторов [12,13], но даже в их итоговой монографии [14]. Анализ показывает, что причина появления всех упомянутых выше видов катастрофичности кроется в особенностях характеристик структур дискретных моделей соответствующих кодеров и модуляторов. Причем, единый подход к анализу таких моделей позволяет найти много общего в их свойствах, что и облегчает *предсказание* появления катастрофичности (т. е. облегчает формулировку «признаков катастрофичности»). Учитывая актуальность решения проблемы катастрофичности для теории дискретных сигналов и корректирующих кодов, авторы настоящей статьи предприняли попытку рассмотрения проблемы катастрофичности с единых позиций.

Цель статьи – разработка единой теории катастрофичности дискретных моделей цифровых сигналов с непрерывной фазой и сверточных корректирующих кодов. Анализ выполнен с использованием математического аппарата алгебры степенных многочленов, теории конечных автоматов, и многотактных линейных фильтров, изложенного в пособии [18].

1. УСЛОВИЯ КАТАСТРОФИЧНОСТИ НЕРЕКУРСИВНЫХ КОДЕРОВ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Сверточные коды образуют подкласс непрерывных кодов. Кодер нерекурсивного сверточного кода содержит один либо несколько *регистров памяти* для хранения определенного числа информационных символов и *преобразователь* информационных последовательностей в кодовые последовательности. Процесс кодирования производится *непрерывно*. Схема простого кодера двоичного кода показана на рис. 1.

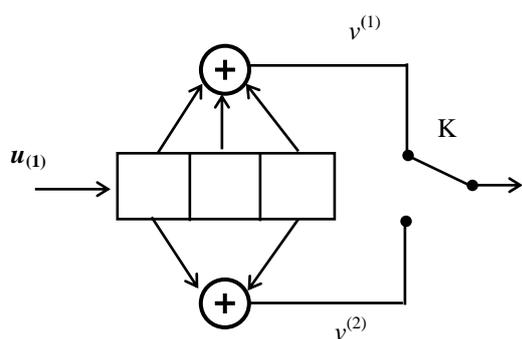


Рисунок 1 – Кодер СК

Информационные двоичные символы u поступают на вход *регистра сдвигов* с K разрядами. На выходах сумматоров по модулю 2 образуются *кодовые символы* $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$. Входы сумматоров соединены с определенными разрядами регистра сдвигов. *Коммутатор К* на выходе кодера устанавливает *очередность* посылки кодовых символов в канал. За время одного информационного символа на выходе образуется два кодовых символа. Таким образом, *скорость кода* в этом примере *равна* $R=1/2$. Возможно кодирование и с другими скоростями.

Сверточный кодер как *автомат с конечным числом состояний* (конечный автомат) может быть описан диаграммой состояний. *Диаграмма состояний* представляет собой *направленный граф* и описывает все возможные переходы кодера из одного *состояния* в другое, а также содержит символы выходов кодера, которые сопровождают эти переходы. *Состояния кодера* – содержимое элементов регистра сдвигов кодера.

Пример диаграммы состояний кодера из рис. 1 показан на рис. 2. В кружках указаны четыре возможные *состояния кодера* $S_1S_2=00, 10, 11$ и 01 , а стрелками – возможные переходы. Символы около стрелок обозначают символы на выходе кодера $v^{(1)}, v^{(2)}$, соответствующие данному переходу. *Сплошными* линиями отмечены переходы, совершаемые при поступлении на вход кодера информационного символа 0, *пунктирными* – при поступлении символа 1. Первоначально кодер находится в состоянии 00, и поступление на вход информационного символа $u=0$ переводит кодер также в состояние 00. При этом на выходе кодера будут символы $(v^{(1)}, v^{(2)}) = (00)$. На диаграмме этот переход обозначается *петлей* "00", выходящей из состояния 00 и вновь возвращающейся в это состояние. Далее, при поступлении символа $u=1$ кодер переходит в состояние 10, при этом на выходе будут символы $(v^{(1)}, v^{(2)}) = (11)$. Этот переход обозначается *пунктирной* линией из состояния 00 в состояние 10. Далее, возможно поступление на вход кодера информационных символов 0 либо 1. При этом кодер переходит в состояние 01, либо 11, а символы на выходе будут 10, либо 01, соответственно. Процесс построения диаграммы заканчивается, когда будут *просмотрены все возможные переходы* из каждого состояния во все остальные.

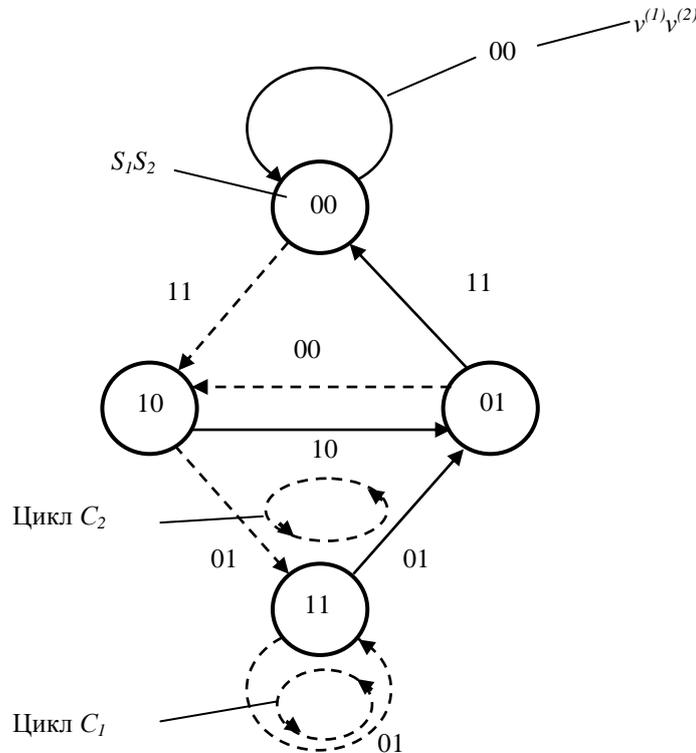


Рисунок 2 – Диаграмма состояний нерекурсивного СК

Для описания работы кодера последовательности символов на входе и выходе удобно представлять с использованием *оператора задержки D* в виде рядов:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(i)}(D) &= u_{(i),0}D^0 + u_{(i),1}D + u_{(i),2}D^2 + \dots, \\ \mathbf{v}^{(j)}(D) &= v_0^{(j)}D^0 + v_1^{(j)}D^1 + v_2^{(j)}D^2 + \dots \end{aligned}$$

Здесь индексы в скобках обозначают:

i – номер входа кодера, $1 \leq i \leq k$;

j – номер выхода кодера, $1 \leq j \leq n$.

Индексы без скобок (0,1,2...) обозначают *дискретные моменты времени*.

Процесс кодирования с использованием порождающих многочленов может быть представлен как *умножение* многочлена входной информационной последовательности $u_{(i)}(D)$ на *порождающий многочлен* $G_{(i)}^{(j)}(D)$, описывающий связи ячеек (i) – го регистра кодера с j – м выходом:

$$v^{(j)}(D) = u_{(i)}(D)G_{(i)}^{(j)}(D), \quad 1 \leq i \leq \kappa; \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1)$$

Сверточный код будет полностью задан, если известны схема кодера: количество входов кодера k , количество выходов кодера n , длина каждого из регистров K_i , а также указаны связи сумматоров с ячейками регистров. Для двоичных кодов со скоростью $R = 1/n$ связи j -го сумматора ($1 \leq j \leq n$) с ячейками регистра сдвига описываются путем задания *порождающего многочлена*:

$$G^{(j)}(D) = g_0^{(j)} + g_1^{(j)}D + g_2^{(j)}D^2 + \dots + g_v^{(j)}D^v, \quad (2)$$

причем $g_k^{(j)} = 1$, если связь j -го сумматора с k -й ячейкой регистра существует, и $g_k^{(j)} = 0$, если такой связи нет. К примеру, кодер на рис. 1 характеризуется порождающими многочленами $G^{(1)}(D) = (1 + D + D^2)$ и $G^{(2)}(D) = (1 + D^2)$, или, записывая последовательность коэффициентов g_k в виде двоичных комбинаций, получаем $G^{(1)} = (111)$ и $G^{(2)} = (101)$. Для длинных кодов часто используют *восьмеричную форму записи*. В этом случае порождающие многочлены будут представлены так: $G^{(1)} = (7)$ и $G^{(2)} = (5)$, либо $G = (7, 5)$.

Изучению свойств катастрофичности сверточных кодов посвящен ряд работ. В первых публикациях о свойствах СК обсуждается вопрос о появлении на выходе двоичного сверточного кодера последовательности символов конечного веса при подаче на вход кодера информационной последовательности бесконечного веса. Свойство катастрофичности такого рода приводит к тому, что незначительные ошибки, действующие в канале, выводят декодер Витерби, прослеживающий декодируемый путь по решетчатой диаграмме, на иной фрагмент пути, соответствующий появлению дополнительных ошибок. Образно можно сказать, что структура катастрофического кода допускает спотанные «перескоки» декодера Витерби под действием канальных ошибок с одного фрагмента декодируемого пути на другой фрагмент, которые *порождают пакеты ошибок* в потоке декодированных данных. Уместно дать следующее определение:

Определение 1. Нерекурсивный сверточный код называется *нерекурсивным катастрофическим сверточным кодом* (НР-КСК), если при декодировании кода алгоритмом Витерби информационной последовательности конечного веса на входе кодера соответствует ее *оценка* на выходе декодера в виде последовательности неограниченного веса.

Свойство катастрофичности поясним на примере описанного выше короткого двоичного СК (7,5) с длиной кодового ограничения $v=2$. Диаграмма состояний такого кодера показана на рис. 2.

В процессе кодирования кодер под воздействием символов входной последовательности $u(D)$ последовательно меняет состояния S_1S_2 на диаграмме состояний. При этом, в ряде случаев кодер совершает *циклы* C , последовательно обходя одни и те же наборы состояний.

На рис. 2 показаны примеры *циклов*:

- цикл C_1 (последовательность состояний 11, 11, 11, ...);
- цикл C_2 (10, 11, 01, 10, 11, 01, ...).

Обозначим символом L *длину цикла* (количество различных состояний кодера в пределах одного цикла). В рассматриваемых примерах $L_{C1} = 1$ и $L_{C2} = 3$.

При определенных условиях на выходах кодера в пределах цикла могут располагаться *только нулевые символы*. Так, если на вход двоичного кодера поступает полубесконечная последовательность циклов $u(D) = 1+D+D^2+D^3+\dots$ (двоичная последовательность $u = 1111\dots$), то, как следует из диаграммы цикл C_1 содержит полубесконечную последовательность символов *нулевого веса* $v^{(1)} = (0000\dots)$. Аналогично, при $u(D) = 1+D+D^3+D^4+D^6+D^7+\dots$ ($u = 11011011\dots$) цикл C_2 содержит полубесконечную последовательность нулевых символов $v^{(1)} = (0000\dots)$.

Введем следующее определение:

Определение 2. Цикл нулевого веса (ЦНВ) – это последовательность состояний $(S_1 \dots S_{v-1} S_v)$ вместе с соответствующей последовательностью символов ветвей $v^{(j)}$, $j = 1 \dots n$, образующие *замкнутый контур* на диаграмме состояний кодера СК, причем, все символы ветвей $v^{(j)} = 0$.

Наличие ЦНВ на диаграмме состояний кодера, очевидно, ухудшает весовую *структуру* СК, поскольку нулевые символы снижают расстояния соответствующих путей на ДС от полнотью нулевого пути. Однако наиболее *опасными* являются случаи *совпадения всех циклов нулевого веса* C_j ($j = 1 \dots n$), когда все символы $v^{(j)}$ ($j = 1 \dots n$) на длине цикла равны нулю. Коды, обладающие таким свойством, названы *катастрофическими*, поскольку при их декодировании конечное число ошибок в канале вызывает бесконечное число ошибок декодирования.

УСЛОВИЯ КАТАСТРОФИЧНОСТИ НЕРЕКУРСИВНЫХ СК.

Замкнутый цикл на диаграмме состояний СК образуется при воздействии на входе кодера периодической последовательности символов. Полубесконечная последовательность:

$$u(D) = \frac{1}{1+D^L} = 1+D^L+D^{2L}+D^{3L}+\dots \text{ периодична с периодом } L. \text{ Пусть } u^*(D) = \sum_{i=0}^{L-1} u_i^* \cdot D^i, \text{ где}$$

$u_i^* \in \{0, 1, 2, \dots, (m-1)\}$. Тогда дробь $u^*(D)/(1+D^L)$ также периодична с периодом L и определяет один из $(m^L - 1)$ всех возможных вариантов ненулевых периодических последовательностей на входе кодера (и, соответственно, $(m^L - 1)$ циклов на диаграмме состояний кодера).

Если $G^{(j)}(D)$ – порождающий многочлен кода по j -му выходу, то последовательность символов на этом выходе будет $v^{(j)}(D) = \frac{u^*(D)G^{(j)}(D)}{1+D^L}$.

Старшие степени многочленов в этом выражении определяются следующим образом:

$$\max \{ \deg u^*(D) \} \leq L-1; \max \{ \deg G^{(j)}(D) \} \leq v,$$

где v – длина кодового ограничения СК. Следовательно, старшая степень произведения многочленов $\max \{ \deg [u^*(D) \cdot G^{(j)}(D)] \}$ может быть больше длины цикла L и в общем случае результат деления можно представить так:

$$v^{(j)}(D) = \frac{u^*(D)G^{(j)}(D)}{1+D^L} = a(D) + \frac{b(D)}{1+D^L}. \quad (3)$$

Здесь: $a(D)$ – (“целое”) – многочлен, старшая степень которого $\max \{ \deg a(D) \} \leq v-1$;

$b(D)$ – (“остаток”) – многочлен, старшая степень которого $\max \{ \deg b(D) \} \leq L-1$.

Вид остатка $b(D)$ определяет поведение кодера СК на цикле периода L .

Если $b(D) \neq 0$, то выходная последовательность кодера $v^{(j)}(D)$ содержит начальный фрагмент $a(D)$ длиной не более чем v символов, вслед за которым начинается периодическая последовательность $\frac{b(D)}{1+D^L}$, вес которой *непрерывно нарастает*. Такой цикл длины L имеет

ненулевой вес, а соответствующий порождающий многочлен не принадлежит катастрофическому коду.

Если $b(D) = 0$, то результатом деления в (3) является только многочлен $a(D)$ (“целое”) и последовательность $v^{(j)}(D)$ на выходе кодера содержит конечное число ненулевых символов, а все символы на длине цикла L равны нулю.

Отсюда следует:

Утверждение 1. Порождающий многочлен $G_{\kappa}^{(j)}(D)$, $j = \overline{1, n}$, образующий на решетчатой диаграмме цикл нулевого веса длины L определяется выражением:

$$G_{\kappa}^{(j)}(D) = \frac{a(D)(1 + D^L)}{u^*(D)}. \quad (4)$$

Таблица 1 – Разложение многочлена цикла на неприводимые многочлены.

Длина цикла L	Многочлен цикла	Разложение на неприводимые многочлены
1	$1+D$	$(1+D)$
2	$1+D^2$	$(1+D)^2$
3	$1+D^3$	$(1+D)(1+D+D^2)$
4	$1+D^4$	$(1+D)^4$
5	$1+D^5$	$(1+D)(1+D+D^2+D^3+D^4)$
6	$1+D^6$	$(1+D)^2(1+D+D^2)^2$
7	$1+D^7$	$(1+D)(1+D^2+D^3)(1+D+D^3)$
8	$1+D^8$	$(1+D)^8$
9	$1+D^9$	$(1+D)(1+D+D^2)(1+D^3+D^6)$
10	$1+D^{10}$	$(1+D)^2(1+D+D^2+D^3+D^4)^2$

Многочлен вида (4) назовем *катастрофическим* многочленом. Выражение (4) получено из (3) при условии $b(D) = 0$.

К примеру, при $m = 2$, $L = 3$ многочлен $(1+D^3) = (1+D)(1+D+D^2)$ и, выбирая $a(0) = 1$, $u^*(D) = 1+D$, получаем $G_{\kappa}^{(j)}(D) = 1+D+D^2$. Цикл нулевого веса C_2 , порожденный таким многочленом $G^{(2)}(D)$ показан на рис. 2.

Рассмотрим свойства многочленов с двоичными коэффициентами вида (4), порождающих циклы нулевого веса. Результаты представления многочленов вида $(1+D^L)$ в виде произведения многочленов степеней, меньших L сводятся к следующему:

Свойство 1. Если L – простое число, то $(1+D^L) = (1+D)(1+D+D^2+\dots+D^{L-1})$.

Свойство 2. Если L – четное число, то $(1+D^L) = (1+D^{L/2})^2$.

Если L – составное число, используя свойства 1 и 2, двучлен $(1+D^L)$ можно представить в виде произведения *неприводимых многочленов*. В таблице 1 даны примеры таких разложений для $L \leq 10$.

Утверждение 2. Произведение двоичных многочленов $(g_0D^0 + g_1D^1 + g_2D^2 + \dots + g_kD^k)(1+D)$ всегда содержит четное число ненулевых слагаемых (при любых значениях g_i , $i = \overline{0, k}$ и любом k). Доказательство утверждения 2 тривиально и подтверждается, в частности, данными табл.1.

ОБЩИЙ ПРИЗНАК КАТАСТРОФИЧНОСТИ НЕРЕКУРСИВНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Изложенное выше позволяет сформулировать признак катастрофичности в общем виде. Рассмотрим сверточный код с произвольным основанием алфавита m и скоростью $R=1/n$.

Порождающий многочлен этого кода по одному из выходов кодера представим в виде произведения двух многочленов $G^{(j)}(D)=G_0(D)G^{*(j)}(D)$. Если $G^{(j)}(D)$ – неприводимый многочлен, то многочлен $G^*(D) = 1$. При известном многочлене $G_0(D)$ выберем многочлен $u^*(D)$ так, чтобы выполнялось равенство $G_0(D)u^*(D) = 1+D^L$, L – некоторое целое число. Нетрудно видеть, что при подстановке выбранных многочленов в формулу (3) получим:

$$v^{(j)}(D) = \frac{u^*(D)G^{(j)}(D)}{1+D^L} = \frac{u^*(D)G_0(D)G^{*(j)}(D)}{G_0(D)u^*(D)} = G^{*(j)}(D). \quad (5)$$

Таблица 2 – Катастрофические порождающие многочлены

Длина цикла L	Задающий многочлен цикла $u^*(D)$	Порождающий многочлен G_k	Длина ограничения порождающего многочлена v
1	1	3	1
2	1	7	2
	1+D	3	1
3	1	1,1	3
	1+D	7	2
	1+D+D ²	3	1
4	1	2,1	4
	1+D	1,7	3
	1+D ²	5	2
	1+D ³	3	1
5	1	4,1	5
	1+D	3,7	4
	1+D+D ² +D ³ +D ⁴	3	1
6	1	1,0,1	6
	1+D	4,1	5
	1+D ²	2,1	4
	1+D ³	1,1	3
	1+D+D ²	3,3	4
	1+D ² +D ⁴	5	2
	1+D+D ³ +D ⁴	7	2
	1+D+D ² +D ³ +D ⁴	3	1

Поскольку многочлен $G^{*(j)}(D)$ конечной степени, то в соответствии с утверждением 2, порождающий многочлен кода $G^{(j)}(D) = G_0(D)G^{*(j)}(D)$ удовлетворяет условию катастрофичности, причем последовательность на выходе кодера $u^*(D)/1+D$ периодична с периодом L . В табл. 2 приведены сведения о катастрофических порождающих многочленах, представленных в восьмеричной форме записи.

Нетрудно заметить, что если все порождающие многочлены кодера можно представить в виде $G^{(j)}(D) = G_0(D)G^{*(j)}(D)$, $j = 1 \dots n$, то они будут одновременно удовлетворять условиям катастрофичности, породить на всех выходах кодера в пределах совпадающих циклов $u^*(D)/1+D^L$ полностью нулевые последовательности и *в совокупности задавать катастрофический сверточный код.*

ПРИЗНАК КАТАСТРОФИЧНОСТИ НЕРЕКУРСИВНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДОВ

Сверточный код с произвольным основанием, скоростью $R=1/n$ и набором порождающих многочленов $\{G^{(j)}(D)\}, j = 1 \dots n$ является *катастрофическим*, если каждый из многочленов можно представить в виде произведения многочленов $G^{(j)}(D) = G_0(D)G^{*(j)}(D)$, где $G_0(D)$ – общий делитель всех многочленов.

Если $G_0(D)$ – наибольший общий делитель, то длина цикла L – наименьшая.

Сформулированный выше признак легко обобщается на случай кодов с произвольной скоростью $R = k/n$ (k и n – целые числа, $k < n$), когда кодер задается набором порождающих многочленов $\{G_{(i)}^{(j)}(D)\}, i=1 \dots k, j=1 \dots n$. Такой код будет катастрофическим, если условию катастрофичности удовлетворяет набор порождающих многочленов хотя бы по одному из входов кодера ($i=const, j=1 \dots n$). Отсюда следует:

Общий признак катастрофичности нерекурсивных сверточных кодов. Сверточный код с произвольным основанием, скоростью $R=k/n$ и набором порождающих многочленов $\{G_{(i)}^{(j)}(D)\}, (i = 1 \dots k, j = 1 \dots n)$ является *катастрофическим*, если каждый из n многочленов хотя бы по одному из входов кодера i можно представить в виде произведения многочленов $G_{(i)}^{(j)}(D) = G_0(D)G_{(i)}^{*(j)}(D)$, где $G_0(D)$ – общий делитель всех многочленов.

Используемый в литературе *частный признак* катастрофичности двоичных сверточных кодов [4] (*четное число единиц* в двоичном представлении каждого из порождающих многочленов СК) вытекает из сформулированного выше общего признака, поскольку, в соответствии с утверждением 2 многочлены с четным числом единиц содержат общий делитель вида $(1+D)$.

2. КАТАСТРОФИЧНОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ СВЕРТОЧНЫХ КОДЕРОВ

Сверточные коды (СК) широко применяются в современных цифровых телекоммуникационных системах для повышения помехоустойчивости при действии различных помех. При этом типично использование *нерекурсивных сверточных кодов* (генерируемых кодерами без обратной связи). Вместе с тем, в последнее время особое внимание обращено на *рекурсивные сверточные коды* (РСК) ввиду их явного преимущества перед нерекурсивными кодами. Особый интерес к РСК проявляется при реализации турбо-кодов [16].

К примеру, на рис. 3 представлена структурная схема кодера РСК, используемого в составе аппаратуры перспективной системы мобильной связи UMTS [17].

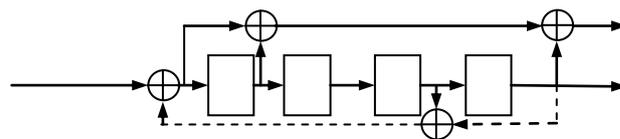


Рисунок 3 – Структура рекурсивного сверточного кодера:

 – элемент задержки на такт;

\oplus – сумматор по модулю 2.

На рис. 3 прямые связи в схеме кодера показаны сплошными линиями, а обратная связь – пунктиром. Анализ показывает, что переход к рекурсивным кодам позволяет существенно упростить реализацию алгоритма Витерби вследствие специфических особенностей РСК (в сравнении с нерекурсивными кодами). Вместе с тем, в известной нам литературе теория РСК не разработана, причем, сведения о РСК ограничены публикацией структурных схем кодеров [16,17]. Даже в популярном детальном руководстве по цифровой связи Б. Скляра свойствам

РСК уделена всего одна страница [6]. Задача настоящего раздела – анализ особенностей структуры РСК с целью изучения их катастрофичности.

СЛОЖНОСТЬ ДЕКОДИРОВАНИЯ СК ПО АЛГОРИТМУ ВИТЕРБИ

Как отмечалось выше, использование РСК, позволяет существенно упростить реализацию алгоритма Витерби за счет снижения количества вычислений, необходимых для декодирования одного бита.

Ниже на примере рассмотренного ранее не рекурсивного кода (7,5) даны оценки сложности реализации этого алгоритма, пригодные как для НСК, так и для РСК. Структура рассматриваемого кодера двоичного СК (7,5) показана на рис. 1, а диаграмма состояний – на рис. 2.

Решетчатая диаграмма является *разверткой* диаграммы состояний во времени. На *решетке* состояния показаны *узлами*, а переходы – соединяющими их *линиями*. После каждого перехода из одного состояния в другое происходит *смещение на один шаг вправо*. Пример решетчатой диаграммы показан на рис. 4.

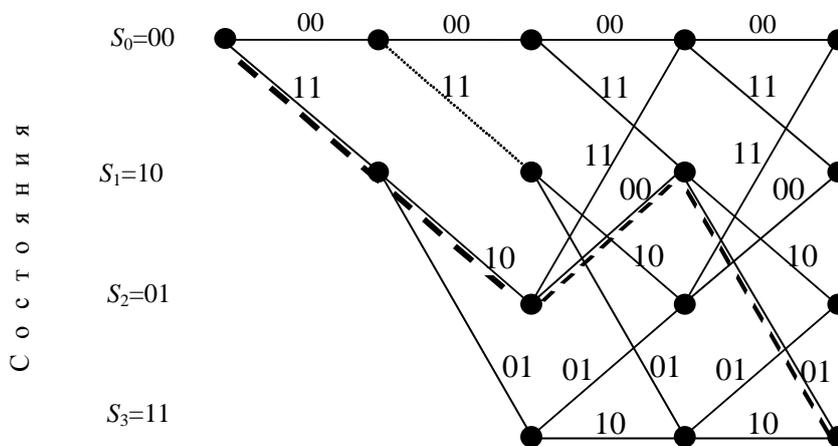


Рисунок 4 – Решетчатая диаграмма СК

Решетчатая диаграмма дает наглядное представление всех *разрешенных путей*, по которым может *продвигаться* кодер при кодировании. Каждой информационной последовательности на входе кодера соответствует *единственный путь* по решетке. Построение решетчатой диаграммы производят с использованием диаграммы состояний. Исходным является нулевое состояние $S^{(1)}S^{(2)} = 00$. Далее, с поступлением очередного информационного символа $u = 0$ (либо 1) возможны переходы в состояние 00, либо 10, обозначаемые ветвями 00 и 11, соответственно.

Процесс можно продолжить, причем через 3 шага (см. рис. 4) *очередной фрагмент решетки будет повторяться*. Пунктиром показан *путь по решетке 11100001...*, соответствующий поступлению на вход кодера информационной последовательности 1011... Поскольку алгоритм Витерби состоит в прослеживании «*выживших*» путей по решетчатой диаграмме [4], сложность реализации декодера СК определяется *структурной сложностью решетки* кода. Можно указать число состояний решетчатой диаграммы:

$$S = m^v, \tag{5}$$

где: m – основание кода;

v – длина кодового ограничения СК, равная количеству элементов задержки регистра кодера.

Т. е. количество состояний кодера равно числу всех возможных вариантов комбинаций символов на входах элементов задержки. Реализация алгоритма Витерби состоит в регулярной обработке принимаемой из канала последовательности устройствами, которые реализуют процедуры «сложения-сравнения-выбора» в каждом из узлов решетчатой диаграммы [4].

Это позволяет оценивать сложность декодера по формуле, подобной (5):

$$C = m^v . \quad (6)$$

Как известно, величина энергетического выигрыша при применении кодирования (ЭВК) возрастает с увеличением длины кодового ограничения v . По этой причине выбор длины кода для реализации основан на компромиссе между величиной ЭВК и сложностью C . В ряде специфических случаев (турбо-коды, например) выбирают короткие коды, допускающие простую реализацию.

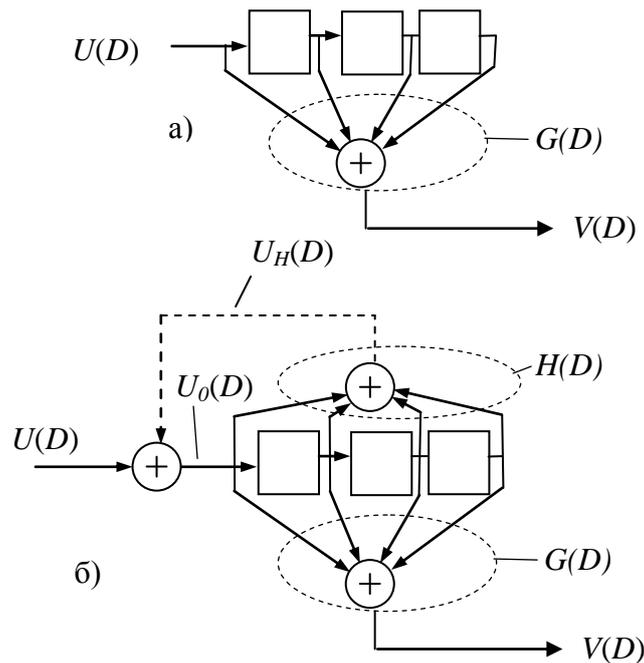


Рисунок 5 – Канонические структуры порождающих многочленов:

- а)– нерекурсивного;
- б)– рекурсивного.

УСТОЙЧИВОСТЬ И КАТАСТРОФИЧНОСТЬ РЕКУРСИВНЫХ СК.

В кодерах рекурсивных сверточных кодов используются рекурсивные порождающие многочлены. Каноническая структура рекурсивного порождающего многочлена приведена на рис. 5 б. Она получена путем введения цепи обратной связи (показана пунктиром) в каноническую структуру нерекурсивного порождающего многочлена (рис. 5 а).Здесь:

- $G(D)$ – исходный нерекурсивный порождающий многочлен;
- $H(D)$ – многочлен цепи обратной связи рекурсивного порождающего многочлена.

Видно, что символы обратной связи вводятся через сумматор, расположенный на входе первого элемента задержки.

Для нерекурсивной структуры на рис. 5 а порождающий многочлен можно записать как передачу от входа к выходу структуры:

$$G(D) = \frac{V(D)}{U(D)} . \quad (7)$$

В тоже время для рекурсивной структуры на рис. 5 б можно записать следующие соотношения:

$$U_0(D)=U(D)+U_H(D), U_H(D)= U_0(D)H(D), U_0(D)=U(D)+ U_0(D)H(D),$$

$$U(D)= U_0(D)[1-H(D)], V(D)= U_0(D)G(D).$$

Откуда следует выражение для передачи рекурсивного многочлена через нерекурсивный многочлен и многочлен обратной связи:

$$G_R(D) = \frac{V(D)}{U(D)} = \frac{G(D)}{1-H(D)} \quad (8)$$

Представим многочлен обратной связи в следующем виде:

$$H(D)=1+h(D), \quad (9)$$

$$\text{где: } h(D) = h_{(0)}D^0 + \dots + h_{(r-1)} D^{(r-1)} + h_{(r)} D^r - \quad (10)$$

– *ядро* многочлена обратной связи, в котором коэффициенты h выбираются из алфавита $\{0,1\}$, тогда формула (7) может быть преобразована к виду:

$$G_R(D) = \frac{G(D)}{h(D)} \quad (11)$$

поскольку для двоичных кодов справедливо равенство $1-H(D) = h(D)$.

Выражение (11) является ключевым в теории рекурсивных кодов, поскольку оно позволяет решить ряд важных вопросов.

Прежде всего, оно открывает *путь с синтезу рекурсивных кодов с пониженным числом состояний кодовой решетки* (и, соответственно, к упрощению реализации алгоритма декодирования). В частности, если старшая степень нерекурсивного порождающего многочлена $G(D)$ (форм. (2)) есть v , а старшая степень многочлена обратной связи $h(D)$ (форм.(10)) есть $r < v$, то деление в выражении (11) приводит к *понижению старшей степени рекурсивного порождающего многочлена $G_R(D)$* и к *уменьшению длины кодового ограничения рекурсивного кода с таким многочленом* (и, соответственно, к *упрощению реализации алгоритма его декодирования*).

Кодер РСК с рекурсивным порождающим многочленом вида (11) содержит *цепь обратной связи* и должен быть *устойчивым*. Невыполнение условий устойчивости кодера переводит его в *режим генерации* неконтролируемой последовательности. Выполнение условий устойчивости кодера РСК зависит от вида многочлена обратной связи $h(D)$.

Утверждение 3. *Необходимым условием устойчивости кодера с рекурсивным порождающим многочленом вида (11) является отсутствие корней многочлена обратной связи $h(D)$.*

По теореме Виета любой степенной многочлен $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ с коэффициентами (a_1, a_2, \dots, a_n) из некоторого поля F :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F$$

имеющий корни (r_1, r_2, \dots, r_n) из этого поля разлагается на линейные множители:

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_n). \quad (12)$$

Наличие линейного множителя вида $(x-r_i)$ в составе многочлена обратной связи $h(D)$ в выражении (12) приводит при $(x=r_i)$ к *неопределенности коэффициента передачи* рекурсивного многочлена вида (12) и, соответственно, к *неустойчивой работе рекурсивного кодера*.

Как следствие этого утверждения можно сформулировать следующее:

Утверждение 4. Достаточным условием устойчивости РСК с порождающим многочленом вида (11) является принадлежность многочлена обратной связи $h(D)$ к множеству неприводимых многочленов.

Доказательство тривиально: любой неприводимый многочлен не может быть представлен в виде произведения линейных множителей вида (12). Выбор многочлена обратной связи из множества неприводимых многочленов гарантирует устойчивость РСК.

Итак, неустойчивая работа рекурсивного кодера приводит к появлению в декодированных данных неконтролируемой цифровой последовательности. Руководствуясь аналогией с появлением катастрофических последовательностей при декодировании нерекурсивных кодов (см. разд. 1) уместно обозначить результат неустойчивой работы рекурсивного кодера как *проявление катастрофичности*, хотя ясно, что причинами явления катастрофичности являются различные свойства нерекурсивного и рекурсивного кодеров. Для определенности полезно дать следующее:

Определение 3. Рекурсивный сверточный код называется *рекурсивным катастрофическим сверточным кодом* (Р-КСК), если при кодировании кодер порождает неконтролируемую последовательность символов, появление которой обусловлено неустойчивостью кодера.

Признаком катастрофичности рекурсивного сверточного кода является невыполнение условий утверждения 4.

Пример 1. Оценим катастрофичность рекурсивного кодера, показанного на рис. 3. Сопоставляя структуру этого кодера с канонической на рис. 5 б определяем выражения для многочленов:

- нерекурсивный многочлен в прямой цепи: $G(D)=1+D+D^3$;
- многочлен цепи обратной связи: $h(D)=1+D+D^2$. Такой многочлен $h(D)$ относится к классу неприводимых многочленов и на основании достаточного условия устойчивости (утверждение 3) кодер на рис. 3 является *устойчивым*.

Пример 2. Оценим катастрофичность рекурсивного кодера, показанного на рис. 6.

Структура, представленная на рис. 6 является, как известно [18], автоматной моделью относительного кодера и модулятора двоичного ЧМ-НФ сигнала с индексом модуляции 1/2. Передаточная функция такого автомата равна $G_R(D) = 1/(1+D)$. Определим многочлен обратной связи $h(D) = D$, который является *неприводимым*.

Это гарантирует *абсолютную устойчивость* структуры, представленной на рис. 6.

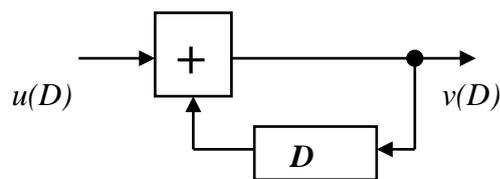


Рисунок 6 – Модель рекурсивного кодера

3. КАТАСТРОФИЧНОСТЬ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ МОДУЛЯТОРОВ ЧМ СИГНАЛОВ С НЕПРЕРЫВНОЙ ФАЗОЙ

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧМ-НФ СИГНАЛА

Дискретные сигналы с частотной модуляцией и непрерывной фазой (ЧМ-НФ) характеризуются постоянной огибающей и отсутствием скачков фазы и применяются в системах наземной и спутниковой мобильной связи [6]. Ниже представлена алгебраическая модель ЧМ-НФ сигнала с парциальным откликом, которую целесообразно использовать для анализа катастрофичности модели модулятора ЧМ-НФ.

Дискретный сигнал ЧМ-НФ имеет вид [12]:

$$S(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\pi f_0 t + \varphi(t) + \varphi_0), \quad (13)$$

где текущая фаза:

$$\varphi(t) = 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2\alpha_i - m + 1) g_{\varphi}(t - iT). \quad (14)$$

Здесь E – энергия сигнала длительностью T , f_0 и φ_0 – частота и начальная фаза, h – индекс модуляции, m – объём алфавита модулирующих символов $\alpha \in \{0, \dots, m-1\}$.

Из выражений (13) и (14) следует, что последовательности сигналов S не являются линейными функциями последовательностей символов α . По этой причине они не могут быть описаны в терминах теории линейных кодов. Вместе с тем, изучение структуры ЧМ-НФ сигналов можно проводить на основе описанной ниже обобщённой алгебраической модели.

Фазу сигнала (14) в дискретные моменты времени $t_{k+1} = (k+1)T$, соответствующие окончанию k -го тактового интервала можно представить так:

$$\varphi(t_{k+1}) = 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2\alpha_i - m + 1) g_{\varphi}((k-i+1)T) \quad (15)$$

В простейшем случае фазовая функция ЧМ-НФ сигнала с парциальным откликом имеет вид (рис. 7):

$$g_{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{t}{2LT} & \text{при } 0 \leq t \leq LT, \\ \frac{1}{2} & \text{при } t > LT. \end{cases} \quad (16)$$

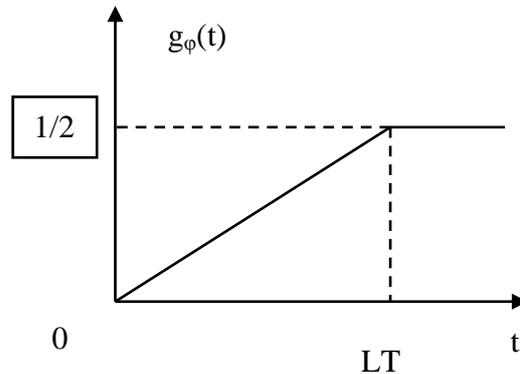


Рисунок 7 – Фазовая функция ЧМ-НФ сигнала

Тогда вид фазовой функции, используемой в формуле (15) будет:

$$g_{\varphi}(k-i+1)T = \begin{cases} 0 & \text{при } i > k+1, \\ \frac{k-i+1}{2L} & \text{при } k+1-L \leq i \leq k+1 \\ \frac{1}{2} & \text{при } i < k+1-L \end{cases} \quad (17)$$

С учетом выражения (17) текущую фазу сигнала можно представить в виде четырех слагаемых:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\alpha_i) &= 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{k-L} \alpha_i, \\ \varphi_2(i) &= 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{k-L} \frac{1-m}{2}, \\ \varphi_3(\alpha_i) &= 2\pi h \sum_{i=k+1-L}^{k+1} \frac{k+1-i}{L} \alpha_i, \\ \varphi_4(i) &= 2\pi h \sum_{i=k+1-L}^{k+1} \frac{k+1-i}{2L} (1-\bar{m}).\end{aligned}$$

Отметим, что слагаемые $\varphi_1(\alpha_i)$ и $\varphi_3(\alpha_i)$ зависят от информационных символов и определяют структуру *фазовой решётки* сигнала. Слагаемые $\varphi_2(i)$ и $\varphi_4(i)$ от информационных символов не зависят и определяют регулярное приращение фазы на каждом такте.

При $L = 1$ получаем выражение для текущей фазы ЧМ-НФ сигнала *полного отклика*:

$$\varphi(t_{k+1}) = 2\pi h \sum_{i=-\infty}^k \alpha_i + 2\pi h \sum_{i=-\infty}^k \frac{1-m}{2} \quad (18)$$

Нетрудно проверить, что ЧМ-НФ сигнал вида (13) удовлетворяет *условию инвариантности* [18]. Действительно, пусть заданы две последовательности:

$$\begin{aligned}S'(t) &= \sqrt{\frac{2LE}{LT}} \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2\alpha'_i - m + 1) g_\varphi(t - iT)\right) \text{ и} \\ S''(t) &= \sqrt{\frac{2LE}{LT}} \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} (2\alpha''_i - m + 1) g_\varphi(t - iT)\right)\end{aligned} \quad (19)$$

Полагая, что $\alpha'_i = \alpha''_i$, при $i < 0$, определим квадрат расстояния по Евклиду на интервале $(0, \dots, NT)$. Если выполняется условие узкополосности ЧМ-НФ сигнала ($f_0 T \gg 2\pi$), получим:

$$\delta_N^2(\bar{S}', \bar{S}'') = 2EN \left[1 - \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \cos\left(2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2(\alpha'_i - \alpha''_i) g_\varphi(t - iT)\right) dt \right]. \quad (20)$$

Поскольку переход к новым информационным последовательностям $\bar{\alpha}'^* = \bar{\alpha}' + \bar{\alpha}^*$ и $\bar{\alpha}''^* = \bar{\alpha}'' + \bar{\alpha}^*$ ($\bar{\alpha}^*$ – произвольная последовательность) расстояние (20) не изменяет, сигналы ЧМ-НФ вида (13) относятся к категории *инвариантных*, а расстояние $\delta_N^2(\bar{S}', \bar{S}'')$ зависит только от разности фазовых траекторий, определяемых аргументами косинусов в (19, 20). Поэтому в последующем целесообразно анализировать *приведенную фазовую функцию*:

$$\tilde{\varphi}(t_{k+1}) = \varphi_1(t_{k+1}) + \varphi_3(t_{k+1}) = \frac{2\pi h}{L} \left(\sum_{i=-\infty}^{k-L} L\alpha_i + \sum_{i=k-L+1}^{k+1} (k+1-i)\alpha_i \right). \quad (21)$$

Поскольку выражение для $\tilde{\varphi}(t_{k+1})$ входит в аргумент косинуса, можно перейти к *модифицированной фазовой функции*:

$$\tilde{\varphi}(t_{k+1}) = \frac{2\pi h}{L} \left(\sum_{i=-\infty}^{k-L} L\alpha_i + \sum_{i=k-L+1}^{k+1} (k+1-i)\alpha_i \right) \text{mod}(2\pi) \quad (22)$$

Для индекса модуляции $h = p/q$, где p и q – целые числа, выражение (22) можно представить в виде:

$$\tilde{\varphi}(t_{k+1}) = \left[p \left(L \sum_{i=-\infty}^{k-L} \alpha_i + \sum_{i=k-L+1}^{k+1} (k+1-i)\alpha_i \right) \right] \text{mod}(Lq) . \quad (23)$$

Выражению (23) соответствует *конечный автомат*, описывающий поведение фазы на выходе модулятора ЧМ-НФ (рис. 8). На рис. 8 и далее по тексту символы сложения и умножения означают операции сложения и умножения по модулю Lq .

Последующие преобразования удобно производить, используя многочленные представления последовательностей в виде многочленов от аргумента D , причем задержке на время T соответствует операция умножения на D .

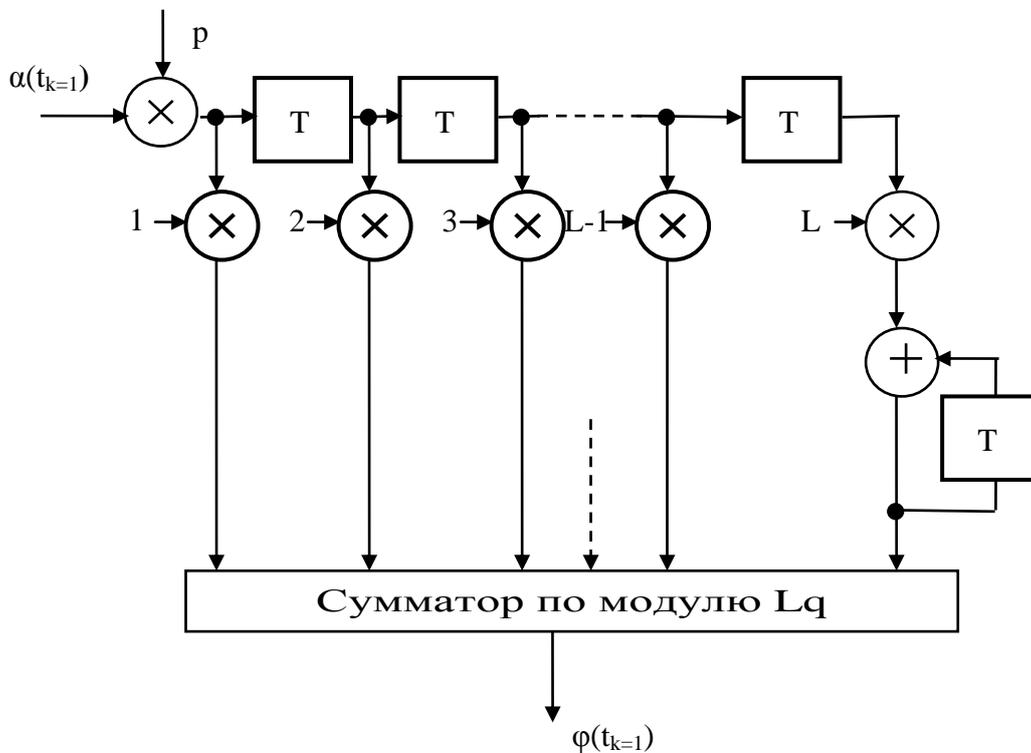


Рисунок 8 – Модель модулятора ЧМ-НФ сигнала в виде конечного автомата с памятью

Тогда передаточная функция структуры, изображенной на рис. 8 будет иметь вид:

$$K(D) = \frac{\tilde{\varphi}(D)}{\alpha(D)} = \left[p \left(1 + 2D + 3D^2 + \dots + (L-1)D^{L-2} + L \frac{D^{L-1}}{1-D} \right) \right] \text{mod}(Lq) . \quad (24)$$

Структура автомата с такой передаточной функцией показана на рис. 9.

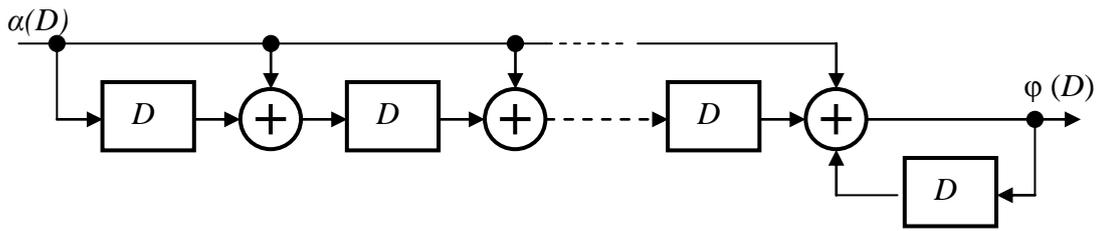


Рисунок 9 – Структура автомата

Число состояний конечного автомата определяется полным множеством наборов переменных на входах элементов задержки.

Количество элементов задержки и, соответственно, число состояний можно уменьшить, минимизируя структурную схему.

Выражение (23) можно преобразовать к виду (25):

$$K(D) = \left[p \left(1 + D + D^2 + \dots + D^{L-2} + D^{L-1} \frac{1}{1-D} \right) \right] \text{mod}(Lq). \quad (25)$$

Схема минимального автомата в этом случае принимает вид, изображенный на рис. 10:

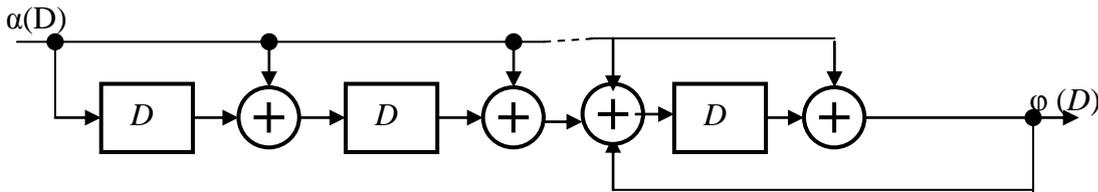


Рисунок 10 – Автомат с минимальным числом элементов задержки

Из структуры рис. 10 следует, что общее число состояний автомата равно $S = q^L L$, причем, из них $S_b = q^{L-1}$ – количество временных состояний (обусловленных наличием элементов памяти) и $S_\phi = qL$ – количество фазовых состояний (обусловленных набегом фазы сигнала к концу каждого тактового интервала).

При решении задач построения сигнально-кодовых конструкций на основе внутренних ЧМ-НФ сигналов и внешних кодов возникает задача корректного соединения нескольких выходов кодера помехоустойчивого кода со входами модулятора с непрерывной фазой. Пусть кодер помехоустойчивого кода имеет v выходов. В этом случае модулятор ЧМ-НФ сигнала также должен иметь v входов и символы поступают на параллельные входы модулятора блоками длиной v . Разобьем последовательность тактовых моментов времени $t_k = kT$ на блоки длительностью vT , т.е. представим текущий индекс как $k = vs + r$. Здесь v – длина блока, s – текущий номер блока, r – текущий номер символа в пределах блока ($0 \leq r \leq v-1$). Соответственно, передаточная функция модели модулятора может быть представлена в виде матрицы:

$$K(D) = \begin{pmatrix} K_0(D) & K_1(D) & K_2(D) & \dots & K_{v-1}(D) \\ K_{v-1}(D) & K_0(D) & K_1(D) & \dots & K_{v-2}(D) \\ K_{v-2}(D) & K_{v-1}(D) & K_0(D) & \dots & K_{v-3}(D) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1(D) & K_2(D) & K_3(D) & \dots & K_0(D) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

в которой каждый элемент $K_r(D)$ составлен из всех членов ряда (15), содержащих переменную D в степени $(vs+r)$, $s = 1,2,3$. Для ряда значений L и v выражения для элементов матрицы приведены в табл.3.

Таблица 3 – Компоненты матрицы передаточных фнкций (26):

L	v	$K_0(D)$	$K_1(D)$	$K_2(D)$	$K_3(D)$
1	1	$p/(1-D)$	-	-	-
1	2	$p/(1-D^2)$	$pD/(1-D^2)$	-	-
1	4	$p/(1-D^4)$	$pD/(1-D^4)$	$pD^2/(1-D^4)$	$pD^3/(1-D^4)$
2	2	$p(1+D^2)/(1-D^2)$	$2pD/(1-D^2)$	-	-
2	4	$p(1+D^4)/(1-D^4)$	$2pD/(1-D^4)$	$2pD^2/(1-D^4)$	$2pD^3/(1-D^4)$
4	2	$p(1+2D^2+D^4)/(1-D^2)$	$2p(D+D^3)/(1-D^2)$	-	-
4	4	$p(1+3D^4)/(1-D^4)$	$2p(D+D^5)/(1-D^4)$	$p(3D^2+D^6)/(1-D^4)$	$4pD^3/(1-D^4)$

Общее правило построения структурных моделей модуляторов параллельного типа состоит в подстановке элементов $K_r(D)$ в матрицу (26), формировании схемы соединений v входов с v выходами и последующей минимизации числа элементов задержки. Примеры таких моделей приведены на рис. 11 и 12.

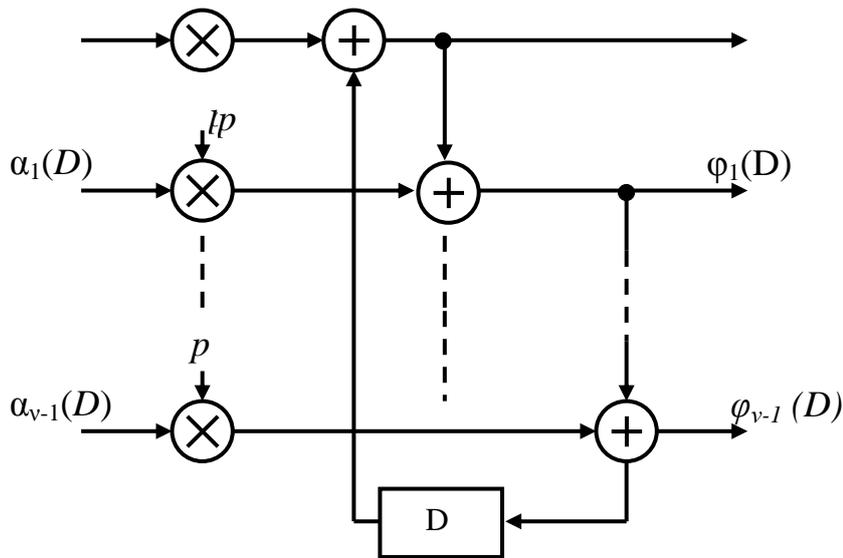


Рисунок 11 – Модель модулятора ЧМ-НФсигнала ($L=1$, v – произвольное, сложение и умножение по модулю q)

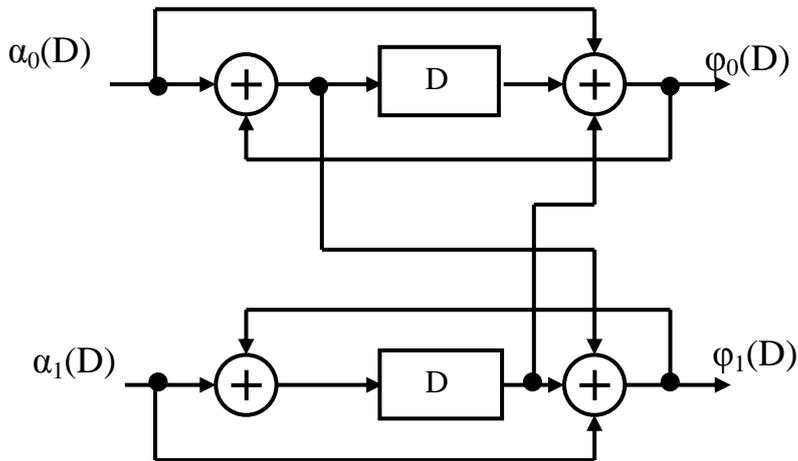


Рисунок 12 – Модель модулятора ($L=2, v=2, p=1, q=2$, сложение по модулю 4)

УСТОЙЧИВОСТЬ И КАТАСТРОФИЧНОСТЬ МОДЕЛЕЙ МОДУЛЯТОРОВ ЧМ-НФ СИГНАЛОВ

Представление модуляторов ЧМ-НФ сигналов в виде автоматных моделей позволяет анализировать свойства устойчивости и, соответственно, катастрофичности.

Утверждение 5. Рассмотренные выше модели модуляторов ЧМ-НФ сигналов являются абсолютно устойчивыми и, следовательно, некатастрофичными в смысле определения 3.

Доказательство утверждения базируется на результатах анализа устойчивости структуры автомата с передаточной функцией вида $G_R(D) = 1/(1+D)$, выполненного в примере 2. Такая структура имеет вид, показанный на рис. 6. и входит в состав всех рассмотренных выше моделей модуляторов (рис. 8...11), начиная с исходной модели (рис. 8). Анализ показывает, что наличие именно структуры (рис.6) с обратной связью в составе всех рассмотренных выше моделей обеспечивает непрерывность текущей фазы ЧМ сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье выполнен анализ свойств катастрофичности сверточных кодеров (как рекурсивных, так и не рекурсивных). Сформулированные признаки катастрофичности позволяют производить селекцию кодов со свойствами катастрофичности.

2. Разработанные в статье формальные алгебраические и структурные модели упрощают изучение свойств частотно-модулированных дискретных сигналов с парциальным откликом. Параллельные схемы модуляторов сочетаются с соответствующими выходами сверточных кодеров.

3. Показано, что все варианты моделей ЧМ сигналов с непрерывной фазой являются абсолютно устойчивыми и, соответственно, некатастрофичными.

4. Отмеченное выше свойство некатастрофичности моделей ЧМ-НФ сигналов лишает смысла предпринятый в публикации [15] поиск «некатастрофических эквивалентов» модуляторов ЧМ-НФ.

Перечень использованных источников

1. Viterbi A. J. Convolutional Codes and their Performance in Communication Systems // IEEE Transactions on Communication. Vol.COM-19, 1971– p.751-772.
2. Т. Касами, Н. Токура, Е. Ивадари, Я. Инагаки. Теория кодирования: Пер. с японского. М.: Мир, 1978. – 576 с.
3. Мак– Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. Пер. с англ. – М.: Связь. – 1979. – 744 с.
4. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи: Пер. с англ. – Радио и связь, 1987. – 392 с.
5. Блейхут Р. Теория и практика кодов, корректирующих ошибки: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
6. Скляр Б. Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е, испр.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
7. Банкет В.Л., Ляхов А.И., Салабай А.В. Спектры весов коротких сверточных кодов // В сб.: «Теория передачи информации по каналам связи» Труды учебных институтов связи. – 1984. – С.110-119.
8. Помехоустойчивость и эффективность передачи информации/ А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П. Панфилов, В.Л. Банкет, П. В. Ивашенко; Под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.
9. В. Л. Банкет, П. В. Ивашенко., А.Э. Геер. Цифровые методы в спутниковых системах связи: Учебн. пособ. – Одесса: УГАС, 1996. – 180 с.
10. Hemmati F., Costello D. J. Asymptotically Catastrophic Convolutional Codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. – V. IT – 26. № 3. – 1980. – p. 298 – 304.
11. Банкет В. Л. Условия катастрофичности сверточных кодов // Праці УНДІРТ. №1(25). 2001. – С.19-24.
12. Aulin T., Sundberg C.-E.W. Continuous phase modulation. Part 1: Full response signaling // IEEE Trans. Commun. – 1981. V.COM-29. – p.196-209.
13. Aulin T., Rydbek N., Sundberg C.-E.W. Continuous phase modulation. Part II: Partial response signalling // IEEE Trans. Commun. 1981. V.COM-29. – P.210-225.
14. Anderson J., Aulin T., Sundberg C.-E.W. Digital phase modulation. N.Y.: Plenum Press Publ. 1986. 504 p.
15. Rimoldi B., Li Quinn. Catastrophic Continuous Phase Modulation Schemes and Their Noncatastrophic Equivalents // IEEE Trans. on Inform. Theory. V. IT - 40. № 3. 1994.p. 687 – 695.
16. Berrou C. The Ten-Year-Old Turbo Codes are Entering into Service // IEEE Communicatios Magazine. Vol.41. No.8. August 2001. pp.110-116.
17. Valenti M. C. and Sun J. The UMTS Turbo Code and Efficient Decoder Implementation Suitable for Software-Defined Radios // International Journal of Wireless Information Networks. Vol.8, No.4, October 2001. pp.203-215.
18. Банкет В.Л. Использование положений дискретной математики в теории электрической связи: Учебн. пособие. – Одесса: ОНАС, 2005. – 36 с.