ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОРНЫХ СПЛАЙНОВ

Стрелковская И.В., Григорьева Т.И.

RECOVERY OF SAMPLED STOCHASTIC PROCESSES AND FIELDS WITH USE OF TENSOR SPLINES

Strelkovskaya I.V., Grygoryeva T.I.

ОНАС им. А.С. Попова

Рассматриваются задачи аппроксимации случайных процессов и полей. При восстановлении исходного состояния дискретизированного сигнала, как правило, используют линейную интерполяцию [1]. Предлагается производить интерполирование с помощью сплайн - функций. Наиболее легкий для вычисления способ – интерполяция с помощью линейного сплайна. Для получения более точного приближения функции, используют кубические сплайны и кубические В-сплайны [2]. При обработке полей, в отличие от процессов, возникает необходимость в интерполировании не функций, а вектор - функций. Приводится обобщение понятия интерполяционной сплайн - функции с помощью понятия тензора, компонентами которого являются сплайн - функции.

Для областей, разделенных на прямоугольники (параллелепипеды), тенденция в развитии многомерных сплайнов состоит в их рассмотрении как тензорного произведения одномерных сплайнов, что обеспечивает сохранение свойств сходимости и алгоритмичности, а во многих задачах – и экстремальных свойств. Известна тесная связь этого направления с теорией конечно - разностных схем. Идея триангуляции области реализована в математической физике в методе конечных элементов, когда решение вариационной задачи строится в виде слайн – функции. Рассмотрим, согласно [2], на отрезке $[a,b]$ разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Для целого $k \ge 0$ через $C^k = C^k[a,b]$ обозначим множество k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, а через $C^{-1}[a,b]$ - множество кусочно-непрерывных функций с точками разрыва первого рода.

Определение. Функция $S_{n,v}(x)$ называется сплайном степени n дефекта v (v - целое число, $0 \le v \le n+1$) с узлами на сетке Δ, если

а) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S_{n,v}(x)$ является многочленом степени n, т.е.

$$S_{n,v}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha^i (x - x_i)^\alpha \text{ для } x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0,...,N-1;$$

б) $S_{n,v}(x) \in C^{n-v}[a,b]$.

Рассмотрим в прямоугольной области $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ сетку линий $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b,$$

$$\Delta_y : c = y_0 < y_1 < ... < y_N = d,$$

делящую область на прямоугольные ячейки

$$\Omega_{i,j} = \{(x,y) \mid x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_i, y_{i+1}]\},$$

$$i = 0,...,N-1;\ j = 0,...,M-1.$$

Для целых $k \ge 0$ и $l \ge 0$ через $C^{k,l}[\Omega]$, обозначим множество непрерывных на Ω функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные и смешанные производные $D^{r,s} f(x,y)$ $(r \le k, s \le l)$. Символом $C^{-l,}[\Omega]$, обозначается множество кусочно-непрерывных функций с разрывами первого рода на некоторых замкнутых линиях, содержащих, быть может, границы области.

Определение. Функция $S_{n,m,v,\mu}(x,y)$ называется сплайном двух переменных степени n и дефекта v $(0 \le v \le n+1)$ по x и степени m дефекта μ $(0 \le \mu \le m+1)$ по y с линиями склейки на сетке Δ, если

а) в каждой ячейке $\Omega_{i,j}$ функция $S_{n,m,v,\mu}(x)$ является многочленом степени n по x и степени m по y, т.е.

$$S_{n,m,v,\mu}(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{\beta=0}^{m} a_{\alpha,\beta}^{i,j}(x-x_i)^{\alpha}(y-y_j)^{\beta},$$
$$i = 0,\dots,N-1;\ j = 0,\dots,M-1;$$

б) $S_{n,m,v,\mu}(x,y) \in C^{n-v,m-\mu}[\Omega]$.

Множество сплайнов, удовлетворяющих определению, обозначим через $S_{n,m,v,\mu}(\Delta)$. Оно является линейным пространством.

Рассмотрим сплайн $S_{n,v}(x)$ одной переменной x степени n дефекта v $(0 \le v \le n+1)$, сплайн $S_{m,\mu}(y)$ одной переменной y степени m дефекта μ $(0 \le \mu \le m+1)$ и сплайн $G_{n,m,v,\mu}(x,y)$ двух переменных x и y степени n дефекта v по x и степени m дефекта μ по y с линиями склейки на сетке Δ.

Введем понятие тензорного сплайна.

Определение. Тензорным спайном $S(x)$ типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ одной переменной x, назовём математический объект, определяющийся в каждой локальной системе координат (χ) на дифференцируемом многообразии X_k совокупностью k^{p+q} функций $S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(\chi)$, каждая из которых является сплайном одной переменной $S_{n,v}(x)$ и при переходе к другой системе координат $\chi' = \chi'(\chi)$ изменяется по тензорному закону [3]:

$$S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(\chi') = S_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}(\chi) \cdot \frac{\partial \chi'^{i_1}}{\partial \chi^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial \chi'^{i_2}}{\partial \chi^{\alpha_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \chi'^{i_p}}{\partial \chi^{\alpha_p}} \cdot \frac{\partial \chi'^{\beta_1}}{\partial \chi^{j_1}} \cdot \frac{\partial \chi'^{\beta_2}}{\partial \chi^{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \chi'^{\beta_q}}{\partial \chi^{j_q}}.$$

(каждые из индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$; $j_1, j_2, \dots, j_q$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ принимает независимо друг от друга все значения от 1 до k).

Здесь $S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(\chi')$ - компоненты тензорного сплайна в системе координат $(\chi') = (\chi'^1, \chi'^2, \dots, \chi'^k)$, а $S_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}(\chi)$ - в системе координат $(\chi) = (\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^k)$.

Если каждая компонента тензорного сплайна определяется сплайном двух переменных x и y $G_{n,m,v,\mu}(x,y)$, то будем иметь более сложный объект – тензорный сплайн типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ двух переменных x и y $G(x,y)$.

Операцию сложения тензорных сплайнов введем следующим образом. Складывать тензорные сплайны одного типа можно при условии, что их соответствующие компоненты имеют одну сетку разбиения. В результате сложения тензорных сплайнов типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ получим тензорный сплайн того же типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, каждая компонента которого есть сумма соответствующих компонентов слагаемых.

$$S\left(x, \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right) + M\left(x, \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right) = T\left(x, \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right).$$

Операция умножения тензорных сплайнов одной переменной вводится следующим образом. В результате умножения тензорных сплайнов одной переменной типа $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $S(x)$ и типа $\begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix}$ $R(y)$ получим тензорный сплайн типа $\begin{pmatrix} p+r \\ q+t \end{pmatrix}$ двух переменных $G(x, y)$

$$S\left(x, \begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right) \cdot R\left(y, \begin{matrix} r \\ t \end{matrix}\right) = G\left(x, y, \begin{matrix} p+r \\ q+t \end{matrix}\right).$$

Каждая компонента тензорного сплайна $G(x, y)$ есть сплайн двух переменных $G_{n,m,\nu,\mu}(x, y)$, который является произведение сплайнов одной переменной $S_{n,\nu}(x)$ и $R_{m,\mu}(y)$.

Таким образом, получены следующие результаты: обобщена процедура интерполирования исходного состояния дискретизированного сигнала с помощью сплайн - функций. При восстановлении дискретизированных полей предложено обобщение понятия сплайн - функций с помощью понятия тензора. Введено в рассмотрение понятие тензорного сплайна, рассмотрены некоторые операции над тензорными сплайнами.

Литература

1 Родимов А. П., Поповский В. В. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех. М.: Радио и связь, 1984. – 272 с.

2 Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн - функций. М.: Наука, 1980. – 352 с.

3 Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. – 664 с.