

РОЗВИТОК МЕТОДІВ КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛІЗУ

Устінов С.С

PROGRESS OF MULTISCALE ANALYSIS METHODS

Ustinov S.S.

ІРТЕ ОНАЗ ім. О.С. Попова, ДП УНДІРТ

Проаналізовані методи кратномасштабного аналізу. Проаналізовані переваги та недоліки. Наведені основні характеристики перетворень.

Multiscale analysis methods are analyzed. Advantages and disadvantages are analyzed. Main multiscale analysis methods characteristics are presented.

За останніх 15 років відбувся ривок в технологіях обробки зображень. Був розроблений вейвлет аналіз, в якому використовувався принцип ортогонального розкладання на базисні функції – вейвлети. Функції, кожна з яких є зсунутою і масштабованою копією однієї функції – материнського вейвлета.

Розробка вейвлет перетворення була викликана недоліками Фур'є-перетворення. Основним недоліком є його "глобальна" чутливість до "локальних" перепадів і піків функції. При цьому зміна коефіцієнтів Фур'є (наприклад, фільтрація високих гармонік) вносить однакові зміни до сигналу на всій області визначення. Ця особливість виявляється корисною для стаціонарних сигналів, властивості яких в цілому мало змінюються із часом.

Проте і вейвлет аналіз не позбавлений недоліків. Можна виділити наступні недоліки вейвлет аналізу:

недоліки неперервного аналізу:

- велика надлишковість;
- відсутність швидких алгоритмів;
- неможливість ієрархічного представлення;
- складність інтерпретації;

недоліки дискретного аналізу:

- груба зміна масштабу (сусідні масштаби відрізняються від сусіднього в два рази);
- неадаптивна ієрархічна структура.

Також недоліком як безперервного так і дискретного вейвлет аналізу є неоптимальний опис граничних структур.

При стисненні зображень вейвлетним методом відновлене зображення є апроксимованим, або методом лінійної апроксимації, або нелінійною.

При лінійній апроксимації сигнал представлено наступним чином

$$f = \sum_n \langle f, g_n \rangle \cdot g_n, \quad (1)$$

де $\{g_n\}$ - ортонормований базис множини S , який є найкращою проекцією в обмежену множину з розміром M

$$f_M = \sum_{n \in J_M} \langle f, g_n \rangle \cdot g_n. \quad (2)$$

Помилка апроксимації дорівнює

$$\mathcal{E}_M = \|f - \mathcal{f}\|^2 = \sum_{n \notin I_M} |\langle f, g_n \rangle|^2. \quad (3)$$

При нелінійній апроксимації сигнал представляють наступним чином

$$f = \sum_n \langle f, g_n \rangle \cdot g_n, \quad (4)$$

де $\{g_n\}$ - ортонормований базис множини S , яка є кращою проекцією в множину з адаптивним розміром M

$$\mathcal{f}_M = \sum_{n \in I_M} \langle f, g_n \rangle \cdot g_n. \quad (5)$$

Множина $I_M : |\langle f, g_n \rangle|_{n \in I_M} \geq |\langle f, g_m \rangle|_{m \in I_M}$, складається з найбільших значень $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Помилка нелінійної апроксимації становить

$$\tilde{\mathcal{E}}_M = \|f - \tilde{f}\|^2 = \sum_{n \notin I_M} |\langle f, g_n \rangle|^2. \quad (6)$$

Та помилка нелінійної апроксимації не більша за помилку лінійної апроксимації $\tilde{\mathcal{E}}_M \leq \mathcal{E}_M$.

Проте при застосуванні вейвлет перетворення, та апроксимації невеликою кількістю коефіцієнтів відбувається розмиття в області границь об'єктів, яке значно погіршує результати суб'єктивну оцінку якості.



Рисунок 1 – Зображення, відновлене з невеликої кількості вейвлет-коефіцієнтів

На рисунку 1 наведено приклад погіршення зображення при нелінійній апроксимації невеликою кількістю вейвлет коефіцієнтів.

Існують і інші методи кратномасштабного аналізу, при розробці яких були початі спроби позбавитись від вищенаведених недоліків вейвлет перетворення.

Направлені вейвлети

Звичайне ДВП розділяє початковий двовимірний сигнал по трьом напрямам – горизонтальному, вертикальному і діагональному. Причому обидва діагональні напрями виявляються змішаними в одній смузі. Таким чином, недоліком звичайного ДВП є погане компактування енергії уздовж нахильних границь. Отже, чим більше буде напрямів, тим якісніше будуть оброблятися границі деталей зображення. Тому використовують так звані направлені вейвлети, які забезпечують кращу спрямованість

Риджлет-аналіз

Риджлет-перетворення було розроблене Еммануелем Кандесом в 1999 році [1]. Риджлет-функція має вигляд:

$$\psi_{a,b,\theta}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b}{a}\right), \quad (7)$$

при, $b \in R$ і $\theta \in [0, 2\pi)$.

Двовимірну функцію можна представити риджлет-коефіцієнтами:

$$R_f(a, b, \theta) = \int \bar{\psi}_{a,b,\theta}(x) f(x) dx. \quad (8)$$

Також існує формула повного зворотного відновлення:

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(a, b, \theta) \psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} db \frac{d\theta}{4\pi}. \quad (9)$$

Риджлет-аналіз може бути представлений як вейвлет аналіз в просторі ознак Радона [4].

Вейвлет-аналіз є зручним інструментом для аналізу точкових сингулярностей, але, наприклад при аналізі об'єкта:

$$f(x_1, x_2) = H(x_1 \cos \theta_0 + x_2 \sin \theta_0 - t_0) g(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in [0, 1]^2, \quad (10)$$

де g це двовимірна функція простору Соболева, f має сингулярність уздовж $x_1 \cos \theta_0 + x_2 \sin \theta_0 = t_0$, потрібно множина вейвлет-коефіцієнтів, тоді як при риджлет-аналізі знадобиться тільки один.

Курвлет-аналіз

Курвлет-перетворення – член сімейства кратномасштабних геометричних перетворень, що його було розроблено в останні декілька років [2], в спробі подолати властиві недоліки традиційних кратномасштабних представлень подібних вейвлетам.

Неперервне курвлет-перетворення

Розглянемо функцію з простору R^2 , з просторовою змінною x , із змінної частотної області ω , з полярними координатами в частотній області r і θ . Вікна $W(r)$ і $V(t)$ є гладкими, з W приймаючим позитивні дійсні значення $r \in (1/2, 2)$, і V приймаючим дійсні значення $t \in [-1, 1]$. Ці вікна завжди підкоряються умові:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(2^j r) = 1, \quad r \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right); \quad (11)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} V^2(t-l) = 1, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (12)$$

Для кожного $j \geq j_0$ введено частотне вікно U_j визначене у Фур'є-області

$$U_j(r, \theta) = 2^{-\frac{3j}{4}} W(2^{-j}r) V\left(\frac{2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta}{2\pi}\right), \quad (13)$$

де $\lfloor j/2 \rfloor$ - ціла частина числа $j/2$. Носій U_j в полярних координатах має клиноподібну форму, і визначається носіями радіального і кутового вікна W і V , застосованих в залежності від масштабу, шириною вікон в кожному напрямку. Щоб одержати дійсні курвлети, використовують симетричну версією (13), тобто, $U_j(r, \theta) + U_j(r, \theta + \pi)$.

$\varphi_j(x)$ визначено за допомогою перетворення Фур'є $\phi_j(\omega) = U_j(\omega)$ φ_j , -“материнський” курвлет. Всі курвлети в масштабі 2^{-j} одержують шляхом обертання і переміщення φ_j :

- еквідистантна послідовність кутів обертання $\theta_l = 2\pi \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} \cdot l$ де $l = 0, 1, \dots$ при яких $0 \leq \theta_l < 2\pi$ (інтервал між послідовними кутами залежить від масштабу)
- і послідовність параметрів перенесення $k = (k_1, k_2) \in Z^2$.

З цією системою позначень визначено курвлет-функцію (як функцію $x = (x_1, x_2)$) з масштабом 2^{-j} , орієнтацією θ_l і позицією $x_k^{(j,l)} = R_{\theta_l}^{-1}(k_1 \cdot 2^{-j}, k_2 \cdot 2^{-j/2})$ як

$$\varphi_{j,l,k}(x) = \varphi_j\left(R_{\theta_l}\left(x - x_k^{(j,l)}\right)\right),$$

де R_{θ} - обертання на θ радіан. Курвлет-коефіцієнти є тоді просто скалярний добуток між елементами $f \in L^2(R^2)$ і курвлетом,

$$c(j, l, k) := \langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle = \int_{R^2} f(x) \overline{\varphi_{j,l,k}(x)} dx. \quad (14)$$

Можна виразити скалярний добуток як інтеграл в частотній площині

$$c(j, l, k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathfrak{F}(\omega) \overline{\phi_{j,l,k}(\omega)} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathfrak{F}(\omega) U_j(R_{\theta_l} \omega) e^{i\langle x_k^{(j,l)}, \omega \rangle} d\omega. \quad (15)$$

Як в теорії вейвлетів, також використовуються грубі масштабні елементи. Низькочастотне вікно W_0 задовольняє умовам

$$|W_0(r)|^2 + \sum_{j \geq 0} |W(2^{-j}r)|^2 = 1,$$

і для $k_1, k_2 \in Z$, визначений грубий масштаб курвлета як:

$$\varphi_{j_0,k}(x) = \varphi_{j_0}(x - 2^{-j_0}k), \quad \phi_{j_0,k}(\omega) = 2^{-j_0} W_0(2^{-j_0}|\omega|).$$

Отже, курвлети з грубим масштабом – ненаправлені. Повне курвлет перетворення складається з направлених елементів з точним масштабом, і ненаправлених грубого масштабу.

Основні властивості курвлет-перетворення:

1. *Щільна система координат.* Подібно до ортонормованого базису, ми можемо легко розширити довільну функцію $f(x_1, x_2) \in L^2(R^2)$ як сімейство курвлетів: ми маємо формулу відновлення

$$f = \sum_{j,l,k} \langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle \varphi_{j,l,k}, \quad (16)$$

при

$$\sum_{j,l,k} |\langle f, \varphi_{j,l,k} \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(R^2)}^2, \quad \forall f \in L^2(R^2). \quad (17)$$

2. *Параболічний масштаб.* Частотна локалізація φ_j має на увазі наступну просторову структуру: $\varphi_j(x)$ від прямокутника з головними осями, вказуючими у вертикальному напрямі. Ефективна довжина і ширина задовольняють умовам:

$$length \approx 2^{-j/2}, \quad width \approx 2^{-j} \Rightarrow width \approx length^2. \quad (18)$$

На рисунку 2 наведено приклад відновлення зображення по невеликій кількості коефіцієнтів курвлет перетворення. Можна побачити, різницю при кодуванні зображень вейвлет перетворенням та курвлет перетворенням (рис 1).



Рисунок 2. Курвлет-апроксимація зображення невеликою кількістю курвлет-коефіцієнтів

Різницю між вейвлет перетворенням та курвлет перетворенням показано на рисунку 3.

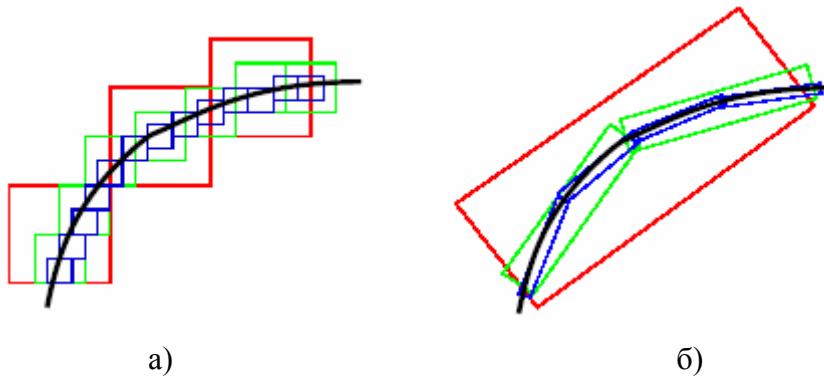


Рисунок 3. Кратномасштабна апроксимація границь об'єктів на зображенні
а) – вейвлет апроксимація, б) – курвлет апроксимація

На рисунку 3 показано порівняння кодування границь об'єктів зображення. Як видно з рисунка 3 при курвлет-апроксимації необхідно значно менше коефіцієнтів ніж при вейвлет апроксимації. Курвлет перетворення є практично оптимальним для кодування об'єктів з границями. Більш детально це описано у [3].

Література

- 1 E. J. Candes and D. L. Donoho. Ridgelets: the key to higher-dimensional intermittency? *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 357 (1999), 2495–2509.
- 2 E. J. Candès and D. L. Donoho. Curvelets: new tools for limited-angle tomography, Manuscript, 2004.
- 3 E. J. Candès and D. L. Donoho. A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation For Objects with Edges. *Comm. on Pure and Appl. Math.* 57 (2004), pp. 219–266.
- 4 Хелгасон С. Преобразование Радона: –М.: Мир, 1983. 152 с.